Jürgen Müller

Einführung in die Mathematik für Fachstudierende

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2020/21
Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Abbildungen

Mathematik ist einfach – bzw. zweifach. Im Grunde genommen befasst man sich mit lediglich zwei Arten von Objekten, nämlich Mengen und Abbildungen. Im ersten Abschnitt werden die entsprechenden Begriffe in einer eher informellen Weise eingeführt und einige grundlegende Eigenschaften bewiesen. Unsere Darstellung gründet auf dem von G. Cantor geprägten (sogenannten naiven) Mengenbegriff:

> Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ein solches Objekt x heißt **Element** der Menge M (Schreibweise: $x \in M$; ist x nicht Element von M, so schreiben wir $x \notin M$). Die Menge ohne Elemente heißt die **leere Menge** (Schreibweise: $\varnothing$ oder $\{\}$).
Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Mengen, etwa die aufzählende Schreibweise oder auch die beschreibende, also eine Charakterisierung der Elemente. Die beschreibende Variante hat allgemein die Form[1]

$$M := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\},$$

wobei E eine gegebene „Eigenschaft" ist. Alternativ schreibt man statt $x :$ auch $x|$.
Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass natürliche, ganze und rationale Zahlen samt ihrer arithmetischen Eigenschaften bekannt sind, werden aber im Abschnitt A kurz auf eine axiomatische Einführung eingehen. Man definiert

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl}\}, \\ \mathbb{N}_0 &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl oder } x = 0\}, \\ \mathbb{Z} &:= \{x : x \text{ ganze Zahl}\}, \\ \mathbb{Q} &:= \{x : x \text{ rationale Zahl}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.1 Es seien A, B Mengen.

[1]Im Weiteren werden wir das Symbol $:=$ als definierendes Gleichheitszeichen verwenden, das heißt die linke Seite wird durch die rechte definiert.

1. A heißt **Teilmenge** von B (Schreibweise: $A \subset B$ oder auch $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Man nennt dann B auch eine **Obermenge** von A und schreibt dafür $B \supset A$.

2. A und B heißen **gleich** (Schreibweise $A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Sind dabei speziell $A := \{x\}$ und $B := \{y\}$ einelementig, so nennen wir x und y **gleich** (Schreibweise: $x = y$; sind x und y ungleich, so schreibt man $x \neq y$).

3. Die Menge
$$B \setminus A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}$$
heißt **Differenzmenge** von B und A. Ist $A \subset B$, so heißt
$$A^c := C_B(A) := B \setminus A$$
Komplement von A (bezüglich B).

Ähnlich wie bei der obigen Einführung von Mengen wollen wir auf eine eher informelle Definition des zweiten grundlegenden Begriffes der Mathematik zurückgreifen:
Es seien X und Y nichtleere Mengen. Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von X nach (oder in) Y ist eine „Vorschrift", die jedem $x \in X$ *genau ein* Element $f_x = f(x) \in Y$ zuordnet. Dabei heißen X der **Definitionsbereich** und Y der **Zielbereich** von f. Außerdem spricht man von x als der (unabhängigen) Variablen. Man schreibt $f : X \to Y$ oder alternativ $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$ (oder kürzer $x \mapsto f(x)$) beziehungsweise $(f_x)_{x \in X}$. Im Fall der Schreibweise $(f_x)_{x \in X}$ spricht man auch von einer **Familie** in Y und nennt dann X die **Indexmenge**. Weiter setzt man
$$Y^X := \mathrm{Abb}(X, Y) := \{f : f \text{ Abbildung von } X \text{ nach } Y\}\ .$$
für Menge der Abbildungen von X nach Y. Sind $f, g \in Y^X$, so heißen f und g **gleich**, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Ist $M \subset X$, so heißt die Funktion $f|_M : M \to Y$, definiert durch $f|_M(x) := f(x)$ für alle $x \in M$, die **Einschränkung** von f auf M.

Definition 1.2 Sind $n \in \mathbb{N}$ und X eine nichtleere Menge und ist $x : \{1, \ldots, n\} \to X$ eine Funktion, so schreibt man meist $(x_1, \ldots, x_n)$ oder $(x_j)_{j=1,\ldots,n}$ und spricht dann von einem n-**Tupel** in X. Im Fall $n = 2$ spricht man auch von (geordneten) Paaren und im Fall $n = 3$ von Tripeln. In diesen Fällen verwendet man oft eine indexfreie Schreibweise wie etwa (u, v) statt (x_1, x_2), beziehungsweise (u, v, w) statt (x_1, x_2, x_3).

Weiter setzt man

$$X^n := X^{\{1,\dots,n\}}$$

und für beliebige Mengen $A_1, \dots, A_n \subset X$

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \prod_{j=1}^{n} A_j := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_j \in A_j \text{ für } j \in \{1, \dots, n\}\} .$$

Ist $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to Y$ eine Funktion, so spart man sich Klammern, indem man kurz $f(x_1, \dots, x_n)$ statt $f((x_1, \dots, x_n))$ schreibt. Eine Teilmenge R von $X \times X$ heißt eine **Relation** auf (oder in) X. Man schreibt dann auch uRv, falls $(u, v) \in R$ gilt.

Definition 1.3 Es sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : M \times M \to M$ heißt **Verknüpfung** auf M. Man wählt dann oft ein nichtalphabetisches Zeichen wie $\cdot\,, \circ\,, *\,, \times\,, +$ für f und schreibt wieder xfy statt $f(x, y)$ für $x, y \in M$, also etwa $x \cdot y\,, x \circ y\,, x * y\,, x \times y\,, x + y$. Im Fall des Multiplikationszeichens $\cdot$ schreibt man meist kurz xy statt $x \cdot y$.

Wir werden im Weiteren, wie bereits angedeutet, die Kenntnis der „üblichen“ Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sowie der Relationen $<$ oder auch $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ samt entsprechender Rechenregeln als bekannt voraussetzen. Genaueres findet sich im Abschnitt A.

Beispiel 1.4 Es seien $X := Y := \mathbb{N}_0$, und es sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x\ , & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 2x, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Ist $M := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ungerade}\}$, so ist[2]

$$f|_M(x) = 2x \qquad (x \in M).$$

Definition 1.5 Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$, so heißt für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

[2]Die Schreibweise $(x \in X)$ ist im Weiteren als Kurzform von „für alle $x \in X$“ zu lesen.

Urbildmenge von B unter f und für $A \subset X$

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in A\}$$

Bildmenge von A unter f. Speziell heißt

$$W(f) := f(X)$$

Wertebereich von f. Ist $W(f)$ einpunktig, so heißt f **konstant**.

Beispiel 1.6 In der Situation von Beispiel 1.4 ist etwa

$$f^{-1}\big(\{2,4,6\}\big) = f^{-1}\big(\{1,2,3,4,5,6\}\big) = \{1,2,3,4,6\}$$

und

$$f\big(\{1,2,3\}\big) = \{2,6\}.$$

Außerdem ist $W(f) = \{y \in \mathbb{N}_0 : y \text{ gerade}\}$.

Definition 1.7 Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$.

1. f heißt **surjektiv** (oder Abbildung von X **auf** Y), falls $W(f) = Y$ ist.[3]
2. f heißt **injektiv**, falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt.
3. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.8 Es sei f wie im Beispiel 1.4. Dann ist f weder surjektiv noch injektiv (es gilt etwa $1 \notin W(f)$ und $f(2) = f(1)$), dagegen ist $f|_M$ injektiv.

[3]An dieser Stelle eine kleine Anmerkung zur Frage, ob *Abbildung* und *Funktion* unterschiedliche Begriffe sind: Gemäß obiger (informeller) Definition ist dies nicht der Fall. Man verwendet den Begriff Abbildung allerdings oft dann, wenn auch der Zielbereich eine wesentliche Rolle spielt, wie etwa im Fall der Surjektivität. Man spricht selten von einer surjektiven Funktion und so gut wie gar nicht von einer Funktion von X *auf* Y. Wir werden uns gelegentlich – so wie üblich und sehr praktisch – die Freiheit nehmen, zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ schon dann zu identifizieren, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt und der Zielbereich keine Rolle spielt.

Definition 1.9 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : X \to Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (x \in X) ,$$

Komposition von f mit g (oder **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung** von f und g).

Beispiel 1.10 Sind $X = Y = Z = \mathbb{N}$ und $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für $x \in \mathbb{N}$ und $g(y) := y + 1$ für $y \in \mathbb{N}$, so ist $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{N}) .$$

Man beachte: Hier ist auch $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert und es gilt

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Dabei ist $g \circ f \neq f \circ g$ (da etwa $(g \circ f)(1) = 2 \neq 4 = (f \circ g)(1)$).

Satz 1.11 *Es seien X, Y, Z, U Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ und $h : Z \to U$ Abbildungen. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Beweis. Es gilt $h \circ (g \circ f) : X \to U$ sowie $(h \circ g) \circ f : X \to U$ und für alle $x \in X$ ist

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) .$$

Damit sind die beiden Funktionen gleich. $\square$

Bemerkung und Definition 1.12 Es seien X, Y Mengen und es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ *genau* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir definieren

$$f^{-1}(y) := x \qquad (y \in Y) ,$$

wobei $y = f(x)$. Die Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ heißt **Umkehrabbildung** von f. Es gilt dabei $f^{-1} \circ f : X \to X$ und

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad (x \in X) ,$$

das heißt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, wobei $\mathrm{id}_X : X \to X$, definiert durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ für $x \in X$, die **identische Abbildung** auf X bezeichnet. Genauso gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, und außerdem ist auch $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

Bemerkung und Definition 1.13 Es sei X eine Menge. Dann heißt

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\}$$

die **Potenzmenge** von X. Im Folgenden verstehen wir unter einer Familie von Mengen in X stets eine Familie in $\mathscr{P}(X)$.

Definition 1.14 Es seien $I \neq \varnothing$ eine Menge, X eine Menge und $(A_\alpha) := (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in X. Dann heißen

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

Vereinigung von (A_α) und

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

Durchschnitt von (A_α). Ist I in aufzählender Form gegeben, so setzt man $\bigcup$ beziehungsweise $\bigcap$ meistens zwischen die einzelnen Mengen, also etwa im Falle $I = \{1, 2, 3\}$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \qquad A_1 \cap A_2 \cap A_3 := \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Insbesondere sind damit für eine Menge von Mengen (einem sogenannten Mengensystem) $\mathcal{F}$ auch

$$\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M$$

definiert (hier ist speziell $I = \mathcal{F}$ und $A_M = M$). Man schreibt dann auch kurz $\bigcup \mathcal{F}$ beziehungsweise $\bigcap \mathcal{F}$. Auch im Fall eines Mengensystems schreibt man alternativ $\bigcup$ und $\bigcap$ zwischen die einzelnen Mengen, falls $\mathcal{F}$ aufzählend gegeben ist, also etwa im Falle $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$

$$A \cup B \cup C \qquad \text{und} \qquad A \cap B \cap C\,.$$

Beispiel 1.15 Sind $A := \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt

$$A \cap B = \{6k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nach Definition sind zwei Mengen gleich, wenn die erste Teilmenge der zweiten und die zweite Teilmenge der ersten ist. Daher beweist man üblicherweise die Gleichheit, indem man die beiden Inklusionen getrennt nachweist. Wir deuten dies im Weiteren durch die Schreibweise $\subset$: und $\supset$: in den entsprechenden Beweisen an.

Satz 1.16 *Es seien X eine Menge, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in X und $B \subset X$. Dann gilt*

1.
$$B \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha) \quad \textit{und} \quad B \cup \Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

2. (**De Morgansche Regeln**)*:*
$$B \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha) \quad \textit{und} \quad B \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

Beweis. Wir werden exemplarisch die Beweise der ersten Aussage in 1. und 2. führen. Die zweiten ergeben sich in ähnlicher Weise. Wir schreiben dabei kurz $\bigcup$ statt $\bigcup\limits_{\alpha \in I}$.
1. $\subset$: Es sei $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \in A_\beta$ für ein $\beta \in I$. Damit ist $x \in B \cap A_\beta$, also auch $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$.
$\supset$: Es sei $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$. Dann existiert ein $\beta \in I$ mit $x \in B \cap A_\beta$. Damit ist $x \in B$ und $x \in A_\beta$, also auch $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$.
2. $\subset$: Es sei $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$.
$\supset$: Es sei $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$. Dann ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. $\square$

Satz 1.17 *Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$.*

1. *Ist* $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ *eine Familie von Mengen in* Y*, so gilt*

$$f^{-1}\big(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\big) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\big(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\big) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

2. *Ist* $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ *eine Familie von Mengen in* X*, so gilt*

$$f\big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\big) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \quad \textit{und} \quad f\big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\big) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha).$$

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf die jeweils ersten Aussagen.
1. $\subset$: Es sei $x \in f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$. Dann ist $f(x) \in \bigcup B_\alpha$, das heißt, es existiert ein $\beta \in I$ mit $f(x) \in B_\beta$. Also ist $x \in f^{-1}(B_\beta)$ und damit auch $x \in \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$.
$\supset$: Ist $\beta \in I$, so ist $B_\beta \subset \bigcup B_\alpha$, also auch $f^{-1}(B_\beta) \subset f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\bigcup f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$.
2. $\subset$: Es sei $y \in f\big(\bigcup A_\alpha\big)$. Dann existiert ein $x \in \bigcup A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Ist $\beta \in I$ mit $x \in A_\beta$, so ist also $y = f(x) \in f(A_\beta)$. Damit ist $y \in \bigcup f(A_\alpha)$.
$\supset$: Ist $\beta \in I$, so ist $A_\beta \subset \bigcup A_\alpha$, also auch $f(A_\beta) \subset f\big(\bigcup A_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\supset$. $\square$

Bemerkung 1.18 Man beachte, dass in der letzten Aussage des zweiten Teils von Satz 1.17 kein Gleichheitszeichen steht. Tatsächlich liegt Gleichheit für alle Familien (A_α) genau dann vor, wenn f injektiv ist ([Ü]).

2 Monoide, Gruppen und Ringe

Ziel dieses Abschnittes ist es, algebraische Strukturen zu formalisieren. Dazu betrachten wir Mengen, die mit gewissen Verknüpfungen versehen sind.

Definition 2.1 Es seien M eine nichtleere Menge und $\cdot$ eine Verknüpfung auf M.

1. Die Verknüpfung heißt **assoziativ**, falls $x\,(yz) = (xy)\,z$ für $x, y, z \in M$ gilt, und **kommutativ**, falls $xy = yx$ für $x, y \in M$ gilt. Ist $\cdot$ assoziativ, so heißt $(M, \cdot)$ eine **Halbgruppe**. Ist $\cdot$ zudem kommutativ, so heißt die Halbgruppe **abelsch** (oder auch **kommutativ**). Bei assoziativen Verknüpfungen lässt man die Klammern meist weg, setzt also zum Beispiel $xyz := (xy)z = x(yz)$. Das Pluszeichen $+$ wird üblicherweise nur für kommutative Verknüpfungen benutzt.

2. Ein $e \in M$ heißt **neutral** (bezüglich $\cdot$), falls $ex = xe = x$ für alle $x \in M$ gilt. Existiert in einer Halbgruppe $(M, \cdot)$ ein neutrales Element e, so heißt $(M, \cdot, e)$ ein **Monoid**. Neutrale Elemente sind stets eindeutig, denn sind e und e' neutral, so ist $e' = ee' = e$. Man schreibt oft auch kurz M statt $(M, \cdot)$ im Falle einer Halbgruppe und M statt $(M, \cdot, e)$ im Falle eines Monoids.

Beispiel 2.2 1. Das Paar $(\mathbb{N}, +)$ ist eine abelsche Halbgruppe, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind abelsche Monoide.
2. Ist X eine Halbguppe, so definiert das **Komplexprodukt**

$$A \cdot B := \{xy : x \in A,\, y \in B\} \qquad (A, B \subset X)$$

eine assoziative Verknüpfung $\cdot$ auf $\mathscr{P}(X)$, also ist $(\mathscr{P}(X), \cdot)$ eine Halbgruppe. Ist X ein Monoid, so ist auch $(\mathscr{P}(X), \cdot, \{e\})$ ein Monoid. Im Falle einer einpunktigen Menge $A = \{x\}$ schreibt man meist kurz xB statt $\{x\} \cdot B$ und im Falle des Pluszeichens als Verknüpfung auf X natürlich auch $A + B$ statt $A \cdot B$ und $x + B$ statt xB. Die Menge $A + B$ heißt dann auch **Minkowski-Summe** von A und B.

Definition 2.3 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid. Ist $x \in M$, so heißt ein $y \in M$ **linksinvers** zu x, falls $yx = e$ gilt, und **rechtsinvers** zu x, falls $xy = e$ gilt. Außerdem heißt y kurz **invers** zu x, falls $yx = xy = e$ gilt. Entsprechend heißt dann x **linksinvertierbar** beziehungsweise **rechtsinvertierbar** beziehungsweise **invertierbar**. Ist jedes $x \in M$ invertierbar, so heißt M eine **Gruppe**.

Beispiel 2.4 1. Die Tripel $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ sind abelsche Gruppen. Im Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind nur ± 1 invertierbar.
2. Es sei $X \neq \varnothing$ ein Menge. Dann ist $\mathrm{Abb}(X) := \mathrm{Abb}(X, X)$ mit der Komposition $\circ$ von Funktionen als Verknüpfung ein Monoid mit neutralem Element id_X. Dabei ist $f : X \to X$ genau dann invertierbar, wenn f bijektiv ist ([Ü]).

Bemerkung 2.5 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid.
1. Inverse Elemente sind im Falle der Existenz eindeutig. Genauer gilt: Sind $x, y_1, y_2 \in M$ mit y_1 links- und y_2 rechtsinvers zu x, so ist

$$y_1 \;=\; y_1 e \;=\; y_1(xy_2) \;=\; (y_1 x)y_2 \;=\; ey_2 \;=\; y_2.$$

Man bezeichnet das inverse Element zu x mit x^{-1}. Bei Verwendung des Verknüpfungszeichens $+$ schreibt man meist $-x$ (und dann auch kurz $x - y$ statt $x + (-y)$).
2. Es seien $x, y \in M$ invertierbar. Wegen $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ ist auch x^{-1} invertierbar mit $(x^{-1})^{-1} = x$ und wegen

$$xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = e = y^{-1}y = y^{-1}x^{-1}xy$$

ist auch xy invertierbar mit

$$(xy)^{-1} \;=\; y^{-1}x^{-1}\ .$$

Ist U die Menge der invertierbaren Elemente in M, so ist damit $(U, \cdot, e)$ eine Gruppe (mit $\cdot$ eingeschränkt auf $U \times U$ und Zielbereich U).
3. Ist jedes $x \in M$ linksinvertierbar, so ist auch jedes x rechtsinvertierbar, also M eine Gruppe ([Ü]). Entsprechendes gilt, falls jedes x rechtsinvertierbar ist.
4. Sind $a, b \in M$ und ist a invertierbar, so sind die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutig lösbar, nämlich durch $x = a^{-1}b$ beziehungsweise $y = ba^{-1}$ ([Ü]). Ist M eine Gruppe, so sind die Gleichungen damit für alle a, b eindeutig lösbar.

Beispiel 2.6 Es sei X eine nichtleere Menge. Nach Bemerkung 2.5.2 ist

$$S(X) \;:=\; \{f \in \mathrm{Abb}(X) : f \text{ bijektiv}\}$$

eine Gruppe. Das zu $f \in S(X)$ inverse Element ist die Umkehrfunktion, die passenderweise ohnehin mit f^{-1} bezeichnet wird. $S(X)$ heißt **symmetrische Gruppe** von X, und ein Element $f \in S(X)$ heißt **Permutation** von X. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt speziell $S_n := S(\{1, \ldots, n\})$ die n-te symmetrische Gruppe. Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch ([Ü]).

Wir wollen nun Produkte und Summen von mehr als zwei Faktoren beziehungsweise Summanden definieren.

Bemerkung und Definition 2.7 Es seien $(M, \cdot, e)$ ein Monoid, $m, N \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq N$ und $x_m, \ldots, x_N \in M$. Dann setzt man $\prod_{k=m}^{m-1} x_k := e$ und definiert **rekursiv**

$$\prod_{k=m}^{n} x_k := \Big(\prod_{k=m}^{n-1} x_k\Big) \cdot x_n$$

für $n = m, \ldots, N$ (man schreibt dann manchmal auch suggestiver $x_m \cdot \ldots \cdot x_n$). Außerdem schreibt man im Falle $x_1 = \ldots = x_n = x$ kurz $x^n := x^{\cdot n} := \prod_{k=1}^{n} x$. Insbesondere ist damit $x^0 = e$. Ist x invertierbar, so setzt man auch $x^{-n} := (x^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Im Falle des Pluszeichens als Verknüpfung schreibt man statt $\prod$ jeweils $\sum$. Außerdem schreibt man dann nx statt x^n und $-x := (-1)x$. [4]

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven Definition ist ein wichtiges Beweisverfahren: die **vollständige Induktion**.
Für ein $m \in \mathbb{Z}$ und alle $\mathbb{Z} \ni n \geq m$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq m$ gilt $A(n)$

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(m)$ richtig ist (Induktionsanfang).

2. Man nimmt an, dass $A(n)$ oder auch $A(m), \ldots, A(n)$ für ein beliebiges $n \geq m$ richtig ist (Induktionsannahme) und zeigt, dass aus der Induktionsannahme die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt (Induktionsschritt).

Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \geq m$ richtig ist. [5]

Bemerkung 2.8 Wir illustrieren die Beweistechnik anhand zweier Beispiele:

[4] Man beachte, dass die Abbildung $(n, x) \mapsto nx$ im Allgemeinen keine Verknüpfung auf M ist.
[5] Denn es gilt ja dann $A(m) \Rightarrow A(m+1) \Rightarrow A(m+2) \ldots$.

1. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n} \,.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind rechte und linke Seite 0.
Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n} \,.$$

Induktionsschritt: Nach Induktionsannahme gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und damit die Behauptung für $n+1$.
2. (**geometrische Summenformel**) Wir zeigen: Für $q \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} - 1 \,.$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ sind rechte und linke Seite $q - 1$.
Induktionsschritt: Aus der Induktionsannahme folgt

$$(q-1)\sum_{k=0}^{n+1} q^k = (q-1)q^{n+1} + (q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = (q-1)q^{n+1} + q^{n+1} - 1 = q^{n+2} - 1.$$

Bemerkung und Definition 2.9 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein *abelsches* Monoid. Dann kann man induktiv zeigen, dass für $x_1, x_2, x \in M$ und $m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ folgende Potenzgesetze gelten:

$$\begin{aligned} x^{m_1} x^{m_2} &= x^{m_1+m_2} \,, \\ x_1^m x_2^m &= (x_1 x_2)^m \,, \\ (x^{m_1})^{m_2} &= x^{m_1 m_2} \,. \end{aligned}$$

Ist M eine abelsche Gruppe, so gelten diese Potenzgesetze auch für $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Weiterhin kann man (induktiv und nicht ganz leicht) zeigen, dass für $\varphi \in S_n$ und $x_1, \dots, x_n \in M$

$$\prod_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

gilt. Damit wird folgende Schreibweise sinnvoll: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist I eine beliebige n-elementige Menge, so setzen wir für Familien $(x_j)_{j\in I}$ in M

$$\prod_{j\in I} x_j := \prod_{k=1}^{n} x_{\psi(k)} \, ,$$

wobei $\psi : \{1, \dots, n\} \to I$ eine beliebige bijektive Abbildung ist. Ist $(y_j)_{j\in I}$ eine weitere Familie in M, so gilt damit

$$\prod_{j\in I}(x_j y_j) = \prod_{j\in I} x_j \prod_{j\in I} y_j \, .$$

Wir kommen jetzt zu algebraischen Strukturen mit zwei Verknüpfungen.

Bemerkung und Definition 2.10 Es sei R eine Menge und es seien $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf R mit:

(R1) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.

(R2) $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid.

(R3) Die Verknüpfung $\cdot$ ist **distributiv** bezüglich $+$, das heißt für $x, y, z \in R$ gilt

$$x(y+z) \;=\; (xy)+(xz) \qquad \text{und} \qquad (x+y)z \;=\; (xz)+(yz).$$

Dann heißen $(R, +, \cdot)$ **Ring**, das neutrale Element 0 zu $+$ **Nullelement** oder kurz **Null** und das neutrale Element 1 zu $\cdot$ **Einselement** oder **Eins**. Ist $(R, \cdot, 1)$ abelsch, so heißt der Ring **kommutativ**. Manchmal schreibt man deutlicher 0_R und 1_R für die neutralen Elemente eines Ringes. Andererseits schreibt man oft kurz R statt $(R, +, \cdot)$. Standardbeispiele kommutativer Ringe sind $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Bemerkung 2.11 Man verwendet wie in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ auch in allgemeinen Ringen R Punkt-vor-Strich-Schreibweisen, also zum Beispiel $x + yz := x + (yz)$. Induktiv ergeben sich für $x \in R$ und endliche Familien $(x_j)_{j\in I}$ in R die allgemeinen Distributivgesetze

$$x \sum_{j\in I} x_j = \sum_{j\in I} x x_j \quad \text{und} \quad \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) x = \sum_{j\in I} x_j x.$$

Bemerkung und Definition 2.12 Es sei R ein Ring. Dann gilt ([Ü])

1. 0 ist **absorbierend** für R, das heißt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ für $x \in R$.

2. $(-x)y = x(-y) = -xy$ und $(-x)(-y) = xy$ für $x, y \in R$.

3. $x(y - z) = xy - xz$ und $(x - y)z = xz - yz$ für $x, y, z \in R$.

Bemerkung 2.13 Es seien R ein Ring und X eine nichtleere Menge. Wir definieren für $f, g \in R^X$ die Funktionen $f \pm g \in R^X$ und $f \cdot g \in R^X$ argumentweise durch

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X).$$

Damit ist $R^X = (R^X, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0_{R^X} und Einselement 1_{R^X}, definiert durch $0_{R^X}(x) := 0_R$ und $1_{R^X}(x) := 1_R$ für $x \in X$. Ist R kommutativ, so ist auch R^X kommutativ.

Definition 2.14 Ist $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0 und Einselement 1, so setzen wir

$$R^* := R \setminus \{0\}.$$

Damit heißt R ein **Körper**, falls $(R^*, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe ist. Für $y \neq 0$ schreibt man in Körpern auch x/y statt $xy^{-1} (= y^{-1}x)$.

Bemerkung 2.15 Eine wichtige Eigenschaft von Körpern ist die **Nullteilerfreiheit**: Sind $x, y \in R$ mit $xy = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$ (da $\cdot$ eine Verknüpfung auf R^* ist!).

Beispiel 2.16 1. Der Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nicht.
2. Es sei $\mathbb{F}_2 := \{\heartsuit, \clubsuit\}$, wobei die Addition und die Multiplikation durch die folgenden Verknüpfungstafeln (kommutativ) definiert sind:

$+$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$

$\cdot$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$

Man kann leicht nachrechnen, daß $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist, genannt der **Binärkörper**. Dabei gilt $\heartsuit = 0 = 0_{\mathbb{F}_2}$ und $\clubsuit = 1 = 1_{\mathbb{F}_2}$, also ist in der Binärarithmetik $1 + 1 = 0$.

Wir kommen nun zu zwei grundlegenden Formeln, die in kommutativen Ringen gelten. Die erste ist eine Verallgemeinerung der geometrischen Summenformel.

Satz 2.17 *Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}$*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} \,. \tag{2.1}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (a-b) \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-1-\nu} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} a a^\nu b^{n-1-\nu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} b a^\nu b^{n-1-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} a^{\nu+1} b^{n-(\nu+1)} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} a^\mu b^{n-\mu} - \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu} = a^n - b^n \,. \end{aligned}$$

□

Wir steuern nun auf eine Darstellung für Ausdrücke der Form $(a+b)^n$, wobei $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Um die allgemeine Formel angeben zu können, brauchen wir

Definition 2.18 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man n-**Fakultät** durch

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdots n\,, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ den **Binomialkoeffizient** n über ν durch

$$\binom{n}{\nu} := \frac{1}{\nu!} \prod_{k=1}^{\nu} (n-k+1) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \nu = 0 \\ n \cdots (n-\nu+1)/\nu!\,, & \text{falls } 0 < \nu \leq n \\ 0\,, & \text{falls } \nu > n \end{cases} .$$

Damit ist etwa $6! = 1 \cdot 2 \cdots 7 = 720$ und $\binom{7}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 5/3! = 210/6 = 35$.

Wir stellen einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten zusammen.

Satz 2.19 *Für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu \le n$ gilt*

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu} .$$

Beweis. Es gilt für $\nu \le n$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{1}{\nu!} \prod_{k=1}^{\nu} (n-k+1) \cdot \frac{(n-\nu)!}{(n-\nu)!} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} .$$

Damit ist auch

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{n!}{(n-(n-\nu))!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu} .$$

□

Besonders wichtig ist folgende Rekursionsformel:

Satz 2.20 *Für $n, \nu \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu} .$$

Beweis. Nach Satz 2.19 gilt für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-\nu+1)!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \\ &= \frac{n!}{\nu!(n+1-\nu)!}\big(\nu + (n+1-\nu)\big) = \frac{(n+1)!}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}. \end{aligned}$$

Für $\nu = n+1$ ist nach Satz 2.19

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n} + 0 = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

und für $\nu > n+1$ haben beide Seiten den Wert 0. □

Insbesondere zeigt Satz 2.20, dass alle Binomialkoeffizienten nichtnegative ganze Zahlen sind. Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n-ten Zeile (mit Zeile 0 beginnend) die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das **Pascalsche Dreieck**. Die ersten Zeilen berechnen sich etwa unter Ausnutzung von Satz 2.20 zu

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Satz 2.21 (**binomische Formel**)
Es sei $(R,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} .$$

Beweis.
1. Für $n = 0$ gilt $(a+b)^0 = 1 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} a^\nu b^{0-\nu}$.

2. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(a+b)^n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$. Dann folgt mit Satz 2.20

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{\nu+1} b^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu+1} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n+1} \binom{n}{\mu-1} a^\mu b^{n+1-\mu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} \right) a^\nu b^{n+1-\nu} \; + b^{n+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} a^\nu b^{n+1-\nu} .
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel 2.22 Für $n = 6$ gilt (siehe Pascalesches Dreieck)

$$(a+b)^6 = 1 \cdot b^6 + 6 \cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1 \cdot a^6 \ .$$

Bemerkung 2.23 Als Spezialfälle aus Satz 2.21 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascalsche Dreieck: Für $R = \mathbb{Z}$ und $a = 1, b = 1$ ergibt sich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} 1^\nu 1^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \ ,$$

das heißt, die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ergibt stets 2^n. Für $a = -1, b = 1$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$0 = 0^n = \big((-1)+1\big)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \ ,$$

das heißt, versieht man die Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe den Wert 0. Für $n = 6$ gilt etwa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

und

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0 \ .$$

Zum Abschluss beschäftigen wir uns kurz mit der Bedeutung der Fakultäten und Binomialkoeffizienten im Bereich der Kombinatorik.

Definition 2.24 Es seien A, B beliebige Mengen.
1. A und B heißen **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$ existiert.
2. Ist A gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. existiert ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$ und $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, so sagt man, dass A die **Mächtigkeit** n hat (man kann zeigen, dass n eindeutig ist). Der leeren Menge wird die Mächtigkeit 0 zugeordnet. Damit heißt A **endlich**, falls A eine Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}_0$ hat. Wir schreiben dann $\#A := n$. Ist A **unendlich** (d. h. nicht endlich) so schreiben wir auch $\#A = \infty$.

Bemerkung und Definition 2.25 Es sei X eine Menge. Eine Familie $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ von Mengen in X heißt **disjunkt**, falls $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ für $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$ gilt. Ist A eine Menge und ist $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine disjunkte Familie nichtleerer Mengen mit $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, so nennt man $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine **Zerlegung** von A. Ist A endlich und $(A_j)_{j\in J}$ eine Zerlegung von A, so gilt $\#A = \sum_{j\in J} \#A_j$.

Satz 2.26 *Ist X eine n-elementige Menge, so gilt $\#S(X) = n!$ für die symmetrische Gruppe $S(X)$.*

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion nach n.
1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.
2. Induktionsschritt: Es sei X eine $(n+1)$-elementige Menge. Ohne Einschränkung können wir $X = \{1, \ldots, n+1\}$ (also $S(X) = S_{n+1}$) annehmen. Wir definieren

$$T_j := \big\{\sigma \in S_{n+1} : \sigma(j) = n+1\big\} \qquad (j = 1, \ldots, n+1)\ .$$

Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} T_j = S_{n+1} \quad \text{und} \quad T_j \cap T_k = \varnothing \quad (j \neq k).$$

Also ist $\#S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \#T_j$. Definiert man für $\sigma \in T_j$ die Funktion $\tau_\sigma \in S_n$ durch

$$\tau_\sigma(k) := \begin{cases} \sigma(k), & \text{falls } k = 1, \ldots, j-1 \\ \sigma(k+1), & \text{falls } k = j, \ldots, n \end{cases},$$

so ist $T_j \ni \sigma \mapsto \tau_\sigma \in S_n$ eine bijektive Abbildung. Nach Induktionsannahme gilt $\#S_n = n!\,$, also auch $\#T_j = n!$ und damit $\#S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!\ .$ □

Bemerkung 2.27 Ist X eine n-elementige Menge und ist $\mathscr{A}_k(X) \subset \mathscr{P}(X)$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von X, so ist $\#\mathscr{A}_k(X) = \binom{n}{k}$ ([Ü]). Nach Bemerkung 2.23 ist damit auch $\#\mathscr{P}(X) = \sum_{\nu=0}^{n} \#\mathscr{A}_\nu(X) = 2^n$.

3 Geordnete Körper, reelle und komplexe Zahlen

Definition 3.1 Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Eine Relation $<$ auf X heißt (strenge) **Ordnung** (auf X), falls gilt

(O1) Für alle $x, y \in X$ gilt entweder $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$ (Trichotomie).

(O2) Für $x, y, z \in X$ gilt: aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).

Das Paar $(X, <)$ heißt dann eine **geordnete Menge**. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt.[6] Schließlich schreiben wir auch $y > x$ statt $x < y$ und $y \geq x$ statt $x \leq y$.

Definition 3.2 Es seien $(X, <)$ geordnet und $M \subset X$.
1. M heißt **nach oben beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit

$$x \leq s \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$

Ein solches s heißt dann eine **obere Schranke** von M. Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Maximum** von M (Schreibweise: $\max M := s$).
2. M heißt **nach unten beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit

$$x \geq s \quad \text{für alle} \quad x \in M \ .$$

Ein solches s heißt dann **untere Schranke** von M. Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Minimum** von M (Schreibweise: $\min M := s$).
3. M heißt **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 3.3 Es sei $(X, <) = (\mathbb{Q}, <)$. Dann ist die Menge $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt mit $\max M = 1$, aber M hat kein Minimum!

Bemerkung 3.4 Per Induktion kann man zeigen: Ist $(X, <)$ geordnet, so hat jede nichtleere, endliche Menge $M \subset X$ ein Maximum und ein Minimum. Außerdem kann man zeigen, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{Z}$ ein Maximum und jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{Z}$ ein Minimum hat.

[6] Die Relation $\leq$ ist dann eine sogenannte schwache Ordnung auf X.

Definition 3.5 Es sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Ist $<$ eine Ordnung auf K, so heißt $K = (K, +, \cdot, <)$ ein **geordneter Körper**, wenn für $x, y \in K$ folgende Eigenschaften in Bezug auf die Addition und die Multiplikation erfüllt sind:

(O3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in K$ (1. Monotoniegesetz).

(O4) Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

Ein Beispiel eines geordneten Körpers ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$.[7]
Wir nennen $x \in K$ **positiv**, falls $x > 0$ gilt und **negativ**, falls $x < 0$ gilt. Außerdem setzen wir $K_+ := \{x \in K : x > 0\}$ und $K_- := \{x \in K : x < 0\}$.

Satz 3.6 *Es seien $K = (K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

1. *Es ist $x > 0$ genau dann, wenn $-x < 0$ ist.*
2. *Aus $x, y > 0$ oder $x, y < 0$ folgt $xy > 0$, also ist insbesondere $x^2 > 0$ für $x \neq 0$ und damit $1 = 1^2 > 0$.*
3. *Aus $0 < x < y$ folgt $0 < 1/y < 1/x$.*

Beweis. 1. Aus $0 < x$ folgt $-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0$, mit (O3), das heißt $-x < 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.
2. Sind $x, y > 0$, so folgt mit (O4) sofort $0 = 0y < xy$. Sind andererseits $x, y < 0$, so sind $-y, -x > 0$ nach 1. und damit $xy = (-x)(-y) > 0$. Ist $x \neq 0$ so ist $x > 0$ oder $x < 0$ nach (O1), also $x^2 > 0$.
3. Zunächst ist $1/x > 0$; denn angenommen, es gilt $1/x \leq 0$ und damit $1/x < 0$. Dann folgt $1 = x/x < x \cdot 0 = 0$ mit (O4), im Widerspruch zu 2. Genauso ist $1/y > 0$. Aus $x < y$ ergibt sich also $x/y < y/y = 1$ mit (O4) und wieder mit (O4)

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x} < 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} .$$

□

Bemerkung 3.7 Es sei K ein geordneter Körper.
1. Per Induktion sieht man leicht:

[7] Man kann zeigen, dass dies der kleinste geordnete Körper ist, der die natürlichen Zahlen enthält.

a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $x < y$, so gilt $nx < ny$ und im Falle $x > 0$ auch $0 < x^n < y^n$.

b) Sind $x > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$, so ist $nx > mx > 0$.

Aus b) folgt, dass jeder geordnete Körper K unendlich ist! Genauer ergibt sich sogar: Sind $x, y \in K$ mit $x < y$, so ist die Menge $\{z \in K : x < z < y\}$ unendlich.

> Denn: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ ist $n1 > m1 > 0$, also $1/(m1) > 1/(n1) > 0$ und folglich $x < x + (y-x)/(n1) < x + (y-x)/(m1) \leq y$.

Insbesondere existiert damit im Binärkrper $\mathbb{F}_2$ keine Ordnungsrelation mit den Eigenschaften aus Definition 3.5.
2. Für alle $x > -1$ gilt die wichtige **Bernoulli-Ungleichung**

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

([Ü]). Außerdem ist für $0 \leq b \leq a$ nach Satz 2.17

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^{n-\nu-1} \leq n(a-b)a^{n-1}\,.$$

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$x^n = c,$$

wobei $c \in K_+$ und $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben sind. Im Allgemeinen sind in geordneten Körpern solche Gleichungen *nicht* lösbar, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.8 *Für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist $x^2 \neq 2$.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein $x = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $(p/q)^2 = 2$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und damit insbesondere nicht beide gerade sind. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt, dass p^2 gerade ist. Damit ist auch p gerade, das heißt $p \in 2\mathbb{Z}$. Dann ist $2q^2 = p^2 \in 4\mathbb{Z}$, also $q^2 \in 2\mathbb{Z}$. Mit q^2 ist auch q gerade. Dies steht im Widerspruch dazu, dass p und q nicht beide gerade sind. Also ist die Annahme falsch. $\square$

Bemerkung und Definition 3.9 Ist K ein geordneter Körper, so hat für jedes $c \in K_+$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$x^n = c$$

höchstens eine Lösung $s \in K_+$, denn aus $s, t \in K$ mit $0 \leq s < t$ folgt $s^n < t^n$. Im Falle der Existenz einer Lösung $s \in K_+$ schreibt man

$$\sqrt[n]{c} := s$$

und spricht dann von der **n-te Wurzel** aus c. Für $n = 2$ schreibt man auch kurz $\sqrt{c}$. Schließlich setzt man noch $\sqrt[n]{0} = \sqrt{0} := 0$.

Unsere Ziele im Weiteren sind:

- Erweitern von $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}_+$ lösbar ist.
- Erweitern von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so, dass $x^n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}$ lösbar ist.

Bemerkung und Definition 3.10 Es sei $(X, <)$ geordnet und es sei $M \subset X$. Mit einer oberen Schranke s von M ist natürlich jedes $t \in X$ mit $t > s$ ebenfalls eine obere Schranke für M. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach kleinsten oberen (und größten unteren) Schranken.
Eine obere Schranke $s^* \in X$ von M heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von M, falls $s \geq s^*$ für jede obere Schranke s von M gilt. Eine untere Schranke $s_* \in X$ von M heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von M, falls $s \leq s_*$ für jede untere Schranke s von M gilt.
Aus der Definition ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum und ein Infimum existieren. Wir schreiben im Falle der Existenz

$$\sup M := s^*$$

beziehungsweise

$$\inf M := s_* .$$

Existiert $\max M$, so gilt $\sup M = \max M$. Im Falle der Existenz von $\min M$ ist $\inf M = \min M$.

Beispiel 3.11 Es sei $(X,<) = (\mathbb{Q},<)$.
1. Ist $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, so gilt $1 = \max M = \sup M$. Obwohl M kein Minimum hat, existiert $\inf M$ und es gilt $\inf M = 0$.

> Denn: Zunächst ist 0 eine untere Schranke von M. Ist $s > 0$, also $s = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, so ist $1/(q+1) < s$ und $1/(q+1) \in M$. Also ist s keine untere Schranke von M. Damit ist jede untere Schranke $s \leq 0$.

2. Ist $M := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$, so ist $\inf M = \min M = 0$ und M auch nach oben beschränkt.

> Denn: Ist $x > 3/2$, so folgt $x^2 > (3/2)^2 = 9/4 > 2$, also $x \notin M$. Damit ist $3/2$ eine obere Schranke von M.

Hier existiert aber *kein Supremum* von M, wie sich durch Kombination von Satz 3.8 mit dem nun folgenden Satz ergibt.

Satz 3.12 *Es seien K ein geordneter Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $c \in K_+$. Weiterhin sei $M := \{x \in K : x \geq 0,\ x^n \leq c\}$. Dann gilt*

1. *M ist nichtleer und nach oben beschränkt.*
2. *Existiert $s := \sup M$, so ist $s = \sqrt[n]{c}$.*

Beweis. 1. Es gilt $0 \in M$, also $M \neq \varnothing$. Außerdem ist $1 + c$ obere Schranke vom M, denn ist $x \in K$ mit $x > 1 + c$, so gilt nach der Bernoullischen Ungleichung

$$x^n > (1+c)^n \geq 1 + nc > nc \geq c$$

und damit ist $x \notin M$.
2. Wir zeigen, dass weder $s^n > c$ noch $s^n < c$ gelten kann (damit ist $s^n = c$ nach (O1)). Angenommen, es ist $s^n > c$. Dann ist $\delta := \frac{s^n - c}{ns^{n-1}} > 0$ und für $b := s - \delta < s$ gilt nach Bemerkung 3.7

$$s^n - b^n \leq n\delta s^{n-1} \leq s^n - c\,,$$

also $b^n \geq c$. Ist $x \in M$, so folgt $x^n \leq c \leq b^n$ und damit auch $x \leq b$. Also ist b obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass s kleinste obere Schranke ist.

Angenommen, es ist $s^n < c$. Dann ist

$$\delta := \min\left\{1, \frac{c - s^n}{n(s+1)^{n-1}}\right\} > 0$$

und für $a := s + \delta$ gilt, wieder nach Bemerkung 3.7, wegen $s + \delta \leq s + 1$

$$a^n - s^n \leq n\delta(s+\delta)^{n-1} \leq c - s^n\ ,$$

also $a^n \leq c$. Damit ist $a \in M$ und folglich s keine obere Schranke von M. Also ergibt sich auch hier ein Widerspruch. □

Bemerkung und Definition 3.13 Eine geordnete Menge $(X, <)$ heißt **ordnungsvollständig** oder kurz **vollständig**, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von X ein Supremum hat. Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ heißt **vollständig (geordnet)**, falls $(K, <)$ ordnungsvollständig ist. Nach Beispiel 3.11.2 ist der geordnete Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ nicht vollständig.
Ist K vollständig, so existiert $\sqrt[n]{c}$ nach Satz 3.12 für alle $c \in K_+$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Aus den entsprechenden Potenzgesetzen ergibt sich für $c, d \in K_+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ leicht

$$\sqrt[n]{cd} = \sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[nm]{c}$$

und im Falle $c < d$ auch $\sqrt[n]{c} < \sqrt[n]{d}$.

Von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist das folgende Ergebnis:

> *Es existiert ein vollständig geordneter Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *so, dass* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ *eingebettet ist.*

Man kann zeigen, dass in gewissem Sinne nur ein vollständig geordneter Körper existiert. Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen **reelle Zahlen**. Wir werden (vorerst) nicht genauer auf die Konstruktion der reellen Zahlen und einen Beweis zur obigen Aussage eingehen. Näheres dazu (inklusive einer Präzisierung, was man dabei unter „eingebettet“ versteht) findet sich im Anhang A.

Bemerkung 3.14 (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$) Als wichtige Folgerung aus der Vollständigkeit ergibt sich, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $n > x$.

Denn: Angenommen, $\mathbb{N}$ sei nach oben beschränkt in $\mathbb{R}$. Dann existiert $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Da s kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, ist $s - 1/2$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1/2$. Dann ist aber $s + 1/2 < n + 1 \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu s obere Schranke von $\mathbb{N}$.

Satz 3.15 *Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.*[8]

Beweis. Ist $\delta := y - x$, so existiert nach dem archimedischen Prinzip ein $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1/\delta$, also $1/q < \delta$. Ist nun $p := \max\{k \in \mathbb{N} : k < qy\}$, so ist $p/q < y$ und $(p+1)/q \geq y$, also auch $p/q \geq y - 1/q > y - \delta = x$. □

Bemerkung und Definition 3.16 Manchmal ist es praktisch und sinnvoll, die geordnete Menge $(\mathbb{R}, <)$ um zwei Punkte $+\infty$ (oder kurz ∞) und $-\infty$ so zu erweitern, dass definitionsgemäß $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $M \subset \mathbb{R}$ ist damit $\sup M = \infty$, falls M nach oben unbeschränkt ist, und $\inf M = -\infty$, falls M nach unten unbeschänkt ist.
Eine nichtleere Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, falls $x \in I$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\inf I < x < \sup I$ gilt. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ setzen wir

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \text{ falls } -\infty < a \leq b < \infty,\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b \leq \infty,\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \text{ falls } -\infty < a < b \leq \infty,\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b < \infty.
\end{aligned}$$

Jedes Intervall hat eine solche Form, wobei stets $a = \inf I$ und $b = \sup I$ gilt.

Wie wir gesehen haben, hat in $\mathbb{R}$ jede Gleichung $x^n = c$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c \geq 0$ eine Lösung. Leider gilt dies nicht mehr im Falle $c < 0$ und n gerade (da $x^n \geq 0$ für gerades n und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ nach Satz 3.6.2). Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = c$ auch für $c < 0$ (also etwa $x^2 = -1$) lösbar ist. Wir werden später sehen, dass tatsächlich dann auch $x^n = c$ für beliebiges c lösbar ist.

[8] Man sieht damit leicht, dass auch eine irrationale Zahl u existiert mit $x < u < y$ [Ü]). Man spricht davon, dass sowohl die rationalen Zahlen als auch die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ sind.

Bemerkung und Definition 3.17 Wir betrachten die abelsche Gruppe

$$(\mathbb{R}^2, +, (0,0)) = (\mathbb{R}^{\{1,2\}}, +, 0)$$

aus Bemerkung 2.13. Mit der dort allgemein definierten argumentweisen Multiplikation ist $\mathbb{R}^2$ zwar ein kommutativer Ring, aber nicht nullteilerfrei und damit insbesondere kein Körper. Wir definieren alternativ für $x = (s,t)$ und $y = (u,v)$ in $\mathbb{R}^2$

$$x \cdot y = (s,t) \cdot (u,v) := (su - tv, sv + tu).$$

Man rechnet nach, dass damit $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist mit $1 = (1_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R})$. Legt man diese Multiplikation zugrunde, so schreibt man $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}^2$ und nennt die Elemente von $\mathbb{C}$ **komplexe Zahlen**. Traditionell verwendet man meist z oder w als Bezeichung für eine komplexe Zahl. Sind etwa $z = (3,-1)$ und $w = (1,2)$, so ist

$$z \cdot w = (3,-1) \cdot (1,2) = (3 - (-2), 6 - 1) = (5,5)\ .$$

Für $z = (s,t) \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{s}{s^2 + t^2}, \frac{-t}{s^2 + t^2} \right).$$

Bemerkung und Definition 3.18 Aus der Definition der Addition und der Multiplikation ergibt sich $(s,0) + (u,0) = (s+u, 0)$ und $(s,0)(u,0) = (su, 0)$, das heißt, Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen $(s,0)$ und $(u,0)$ entsprechen der Addition und der Multiplikation von s und u in $\mathbb{R}$. Indem wir die komplexe Zahl $(s,0)$ mit der reellen s identifizieren, können wir den Körper $\mathbb{C}$ damit als Erweiterung des Körpers $\mathbb{R}$ auffassen.[9] Wir schreiben dann auch kurz s statt $(s,0)$. Man nennt weiterhin

$$i := (0,1) \in \mathbb{C}$$

die **imaginäre Einheit** in $\mathbb{C}$. Für i gilt

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir jedes $z = (s,t) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (s,t) = (s,0) + (0,1)(t,0) = s + it$$

[9] Damit ist $\mathbb{C}$ auch nichts anderes als der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Bonus der Multiplikation $\cdot$, die bei erstem Faktor in $\mathbb{R}$ nichts anderes als die Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ ist.

schreiben. Diese Darstellung heißt **Normalform** (oder **kartesische Form**) von z. So gilt etwa

$$z = (3, -1) = 3 + i(-1) = 3 - i.$$

Weiter nennen wir $\mathrm{Re}\, z := s$ **Realteil** von z und $\mathrm{Im}\, z := t$ **Imaginärteil** von z.

Bemerkung 3.19 In $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation $<$ (mit den Eigenschaften aus Definition 3.5) zu definieren.

> Denn: Angenommen, doch. Dann wäre $1 > 0$ nach Satz 3.6.2, also $-1 < 0$ nach Satz 3.6.1. Für $z = i$ wäre mit Satz 3.6.2 aber auch $0 < i^2 = -1$, also Widerspruch zu (O1).

Der Beweis zeigt, dass kein Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ eine Lösung hat, zu einem geordneten Körper gemacht werden kann.

Bemerkung und Definition 3.20 Es sei $z = s + it$ eine komplexe Zahl in Normalform.

1. Die komplexe Zahl $\overline{z} := s - it$ heißt zu z **konjugiert komplex**.
2. Die Zahl $|z| := \sqrt{s^2 + t^2} \in [0, \infty)$ heißt **Betrag** von z. Insbesondere ist $|s| = \sqrt{s^2}$.

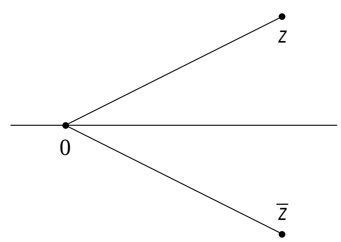


Abbildung 1: z und $\overline{z}$

Geometrisch entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Der Betrag $|z|$ beschreibt – nach dem Satz des Pythagoras – anschaulich die Länge der Strecke von 0 nach z in der euklidschen Ebene.
Für $z, w \in \mathbb{C}$ ergibt sich leicht

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{(\overline{z})} = z$$

sowie

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Satz 3.21 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. $|z| > 0$ *für* $z \neq 0$.
2. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$, $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.
3. $|z|^2 = z\overline{z}$ *und* $1/z = \overline{z}/|z|^2$, *falls* $z \neq 0$.
4. $|zw| = |z|\,|w|$.
5. $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.
6. (**Dreiecksungleichung**) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. 1. und 2. ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Betrages und 3. als [Ü].
4. Es gilt nach 3.

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2 \ .$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.
5. Wieder mit 3. gilt

$$|z \pm w|^2 = (z \pm w)(\overline{z} \pm \overline{w}) = z\overline{z} \pm z\overline{w} \pm w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \,.$$

6. Nach 5. sowie 2. und 4. ist

$$|z \pm w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \,.$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.22 Für $z = 3 - i$ gilt $|z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $\overline{z} = 3 - i(-1) = 3 + i$ und

$$z\overline{z} = (3 - i)(3 + i) = 9 + 1 = |z|^2.$$

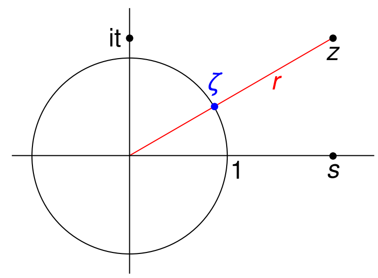


Abbildung 2: Polarform $z = r\zeta$.

Bemerkung und Definition 3.23 Wir schreiben

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

für den **Einheitskreis** in $\mathbb{C}$. Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so gilt $z = r\zeta$ mit $r = |z| > 0$ und $\zeta = z/|z| \in \mathbb{S}$. Sind $r' > 0$ und $\zeta' \in \mathbb{S}$ mit $z = r'\zeta'$, so ist $r' = r$ und $\zeta' = \zeta$. Also hat jedes $z \in \mathbb{C}^*$ genau eine multiplikative Zerlegung $z = r\zeta$ mit $r > 0$ und $\zeta \in \mathbb{S}$. Diese Darstellung von z nennt man die **Polarform** von z.

Definition 3.24 In Verallgemeinerung von Definition 2.18 setzen wir noch für $z \in \mathbb{C}$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{z}{\nu} := \frac{1}{\nu!}\prod_{k=1}^{\nu}(z-k+1) = \begin{cases} z(z-1)\cdots(z-\nu+1)/\nu!, & \text{falls } \nu \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{falls } \nu = 0 \end{cases}.$$

Die komplexe Zahl $\binom{z}{\nu}$ heißt **Binomialkoeffizient** z über ν.

4 Stetigkeit und Grenzwerte

Analysis kann man als die Mathematik von Grenzwerten ansehen. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle.
Im Weiteren sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, also $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Wir betrachten zunächst meist Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, wobei $X \subset \mathbb{K}$ ist.[10]

Definition 4.1 1. $X \subset \mathbb{K}$ und ist $f : X \to \mathbb{C}$ und $a \in X$, so heißt f **stetig an der Stelle** a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ mit $|x - a| < \delta$. Weiter heißt f **stetig auf der Menge** $M \subset X$, falls f stetig an jeder Stelle $a \in M$ ist. Ist $M = X$, so heißt f kurz **stetig**. Mit $C(X)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$.
2. Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls ein $R > 0$ existiert mit $|w| \leq R$ für alle $w \in B$. Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $M \subset X$, so heißt f **beschränkt auf** M, falls $f(M) \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist. Im Falle $M = X$ sagen wir kurz, f sei **beschränkt**.

Beispiel 4.2 Aus der Definition folgt sofort:
1. Die identische Abbildung $f = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ ist stetig.
2. Konstante Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig.
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ ist nicht stetig an der Stelle 0, aber stetig an allen $a \neq 0$.

Wir wollen eine Charakterisierung der Stetigkeit herleiten, die auf dem zentralen Begriff des Grenzwertes beruht.

Definition 4.3 Ist $X \subset \mathbb{K}$, so heißt ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ ein **Häufungspunkt** von X, falls für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < |x - a| < \delta$.[11] Wir schreiben X' für die Menge aller Häufungspunkte von X. Ist $a \in X$ und kein Häufungspunkt von X, so heißt a ein **isolierter Punkt** von X. Im Fall unbeschränkter X schreiben wir auch $\omega \in X'$.[12]

[10] Wie bereits früher angedeutet, werden wir uns gegebenenfalls die Freiheit nehmen, auch eine Funktion $f : X \to Y$ mit $Y \subset \mathbb{C}$, wie etwa $f : X \to \mathbb{R}$, als Funktion mit Zielbereich $\mathbb{C}$ aufzufassen.
[11] Man beachte, dass a nicht in X liegen muss.
[12] Dabei denken wir uns $\mathbb{K}$ um einen Punkt ω erweitert, für den wir $|\omega| = +\infty$ setzen.

Beispiel 4.4 Für $X = \mathbb{N}$ ist $\infty \in X'$ (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$). Zudem ist jedes $a \in \mathbb{N}$ ein isolierter Punkt von $\mathbb{N}$. Für $X = \{1/k,\, k \in \mathbb{N}\}$ ist $0 \in X'$ und $0 \notin X$.

Definition 4.5 Für $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $\rho > 0$ schreiben wir

$$U_\rho(a) := U_{\rho,X}(a) := \{x \in X : |x - a| < \rho\}.$$

falls $a \in \mathbb{K}$ und

$$U_\rho(\omega) := U_{\rho,X}(\omega) := \{x \in X : |x| > 1/\rho\}.$$

Die Menge $U_\rho(a)$ heißt ρ-**Umgebung** von a (bezüglich X). Im Falle $X = \mathbb{R}$ ist $U_\rho(a)$ das Intervall $(a-\rho, a+\rho)$, und im Falle $X = \mathbb{C}$ ist $U_\rho(a)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ρ. Weiter setzen wir für $a \in X'$

$$\dot{U}_\rho(a) := \dot{U}_{\rho,X}(a) := U_\rho(a) \setminus \{a\}.$$

Bemerkung 4.6 Damit ist $f : X \to \mathbb{C}$ stetig an $a \in X$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$. Außerdem ist f genau dann stetig an der Stelle a, wenn $f|_{U_\rho(a)}$ für ein $\rho > 0$ stetig an a ist.[13]

Bemerkung und Definition 4.7 1. Ist $X \subset \mathbb{K}$ und ist $a \in X'$, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **abklingend** an a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Sind f und g abklingend an a, so sind auch $f \pm g$ abklingend an a.

> Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit $|f(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$ und $|g(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\eta(a)$. Also gilt für $\rho = \min\{\delta, \eta\}$ und $x \in \dot{U}_\rho(a)$ nach der Dreiecksungleichung
>
> $$|f(x) \pm g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Existiert ein $\rho > 0$ so, dass f auf $\dot{U}_\rho(a)$ beschränkt ist, und ist g abklingend an a, so ist auch $f \cdot g$ abklingend an a.

> Denn: Es seien $R, \rho > 0$ so, dass $|f(x)| \le R$ für alle $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $0 < \delta \le \rho$ mit $|g(x)| < \varepsilon/R$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Dann ist
>
> $$|f(x)g(x)| \le R|g(x)| < \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_\delta(a)).$$

[13] Man spricht davon, dass Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, da die Eigenschaft allein vom Verhalten der Funktion f auf einer (beliebig kleinen) Umgebung von a abhängt.

2. Existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ so, dass $f - c$ abklingend an a ist, so heißt f **konvergent** an der Stelle a und c dann **Grenzwert** von f an der Stelle a. Man schreibt in diesem Fall kurz

$$f(x) \to c \qquad (x \to a).$$

Aus der Definition folgt: Es gilt $f(x) \to c$ für $x \to a$ genau dann, wenn $f(a+1/u) \to c$ für $u \to \omega$. Man beachte, dass auch im Falle $a \in X$, also auch dann, wenn $f(a)$ existiert, der Funktionswert $f(a)$ hier keine Rolle spielt! So hat etwa die Funktion f aus Beispiel 4.2.3 den Grenzwert 0 an der Stelle $a = 0$.
3. Aus $a \in X'$ folgt, dass höchstens ein Grenzwert c von f an a existiert (ist c' ein weiterer, so ist $c' - c = (f(x) - c) - (f(x) - c')$ abklingend an a und damit $c = c'$). Wir schreiben im Falle der Existenz des Grenzwertes auch

$$\lim_{x \to a} f(x) := c\,.$$

Definition 4.8 Ist X eine Menge und ist $M \subset X$, so definieren wir die **Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_{M,X} : X \to \mathbb{R}$ von M (bezüglich X) durch

$$\mathbf{1}_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M \\ 0, & \text{falls } x \in X \setminus M \end{cases}.$$

Beispiel 4.9 1. Ist $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so ist f abklingend an ω.

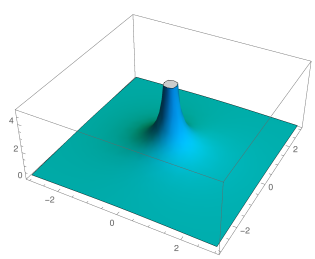


Abbildung 3: $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/|z|$.

2. Es sei $X = \mathbb{R}$. Dann hat die Funktion $f = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ an der Stelle 0 keinen Grenzwert (Hätte f einen Grenzwert c an 0, so müsste $c = 1$ wegen $f(x) = 1$ für $x > 0$ gelten, aber auch $c = 0$ wegen $f(x) = 0$ für $x < 0$. Widerspruch zur Eindeutigkeit des Grenzwertes.). Ähnlich sieht man, dass die Funktion $f = 1_{\mathbb{N}}$ hat an ∞ keinen Grenzwert hat.

Bemerkung 4.10 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K} \cap X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$. Aus den obigen Definitionen ergibt sich unmittelbar: Es gilt $f(x) \to c$ $(x \to a)$ genau dann, wenn die Funktion $f_{a,c} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_{a,c}(x) := \begin{cases} c, & \text{falls } x = a \\ f(x), & \text{falls } x \neq a \end{cases},$$

stetig an a ist. Ist $a \in X$, so gilt damit auch:[14]

f ist genau dann stetig an a, wenn $f(x) \to f(a)$ $(x \to a)$ gilt.

Der folgende Satz zeigt, dass die Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in $\mathbb{C}$ verträglich ist. Wir definieren dazu in Ergänzung zu Bemerkung 2.13 für eine beliebige Menge X und eine nullstellenfreie Funktion $g : X \to \mathbb{C}$ (also $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$) die Funktion $1/g : X \to \mathbb{C}$ punktweise durch $(1/g)(x) := 1/g(x)$ für $x \in X$ und damit auch $f/g := f \cdot (1/g)$ für $f : X \to \mathbb{C}$.

Satz 4.11 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in X'$ mit*

$$f(x) \to b \quad \textit{und} \quad g(x) \to c \quad (x \to a).$$

Dann gilt

1. *$(f \pm g)(x) \to b \pm c$ $(x \to a)$.*
2. *$(f \cdot g)(x) \to b \cdot c$ $(x \to a)$.*
3. *Ist g nullstellenfrei und ist $c \neq 0$, so folgt $(f/g)(x) \to b/c$ $(x \to a)$.*

Beweis. 1. Die erste Aussage ergibt sich sofort aus Bemerkung und Definition 4.7.
2. Zunächst existiert ein $\rho > 0$ mit $|f(x) - b| < 1$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$ und somit auch

$$|f(x)| = |f(x) - b + b| \leq 1 + |b|.$$

[14] Aus der Definition der Stetigkeit ergibt sich sofort: Ist a ein isolierter Punkt von X, so ist f stets stetig an a, was aber dann keine wirkliche Qualität der Funktion ist.

Damit ist f beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Weiter ist

$$f(x)g(x) - bc = f(x)g(x) - cf(x) + cf(x) - bc = f(x)(g(x) - c) + c(f(x) - b).$$

Nach Bemerkung und Defintion 4.7 ist die rechte Seite abklingend an a, also gilt $(fg)(x) \to bc$ für $x \to a$.
3. Nach 2. reicht es, zu zeigen:

$$(1/g)(x) \to 1/c \qquad (x \to a).$$

Da $c \neq 0$ ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(x) - c| < |c|/2$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Also gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung ([Ü])

$$|g(x)| = |c + g(x) - c| \geq |c| - |g(x) - c| > |c| - |c|/2 = |c|/2 > 0$$

und damit $|1/g(x)| \leq 2/|c|$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Folglich ist $1/g$ beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Nach Bemerkung und Definition 4.7 ist

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} = \frac{1}{cg(x)}(c - g(x))$$

abklingend an a, also gilt $1/g(x) \to 1/c$ für $x \to a$. $\square$

Bemerkung 4.12 Aus Satz 4.11 erhält man in Verbindung mit Bemerkung 4.10: Ist $X \subset \mathbb{K}$ und sind f, g stetig an $a \in X$, so sind $f \pm g$, $f \cdot g$ und für nullstellenfreies g auch f/g stetig an der Stelle a.

Bemerkung 4.13 Sind $X \neq \varnothing$ eine Menge und $f, g : X \to \mathbb{R}$, so schreiben wir kurz $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Entsprechend schreiben wir $f < g$, falls $f(x) < g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Sind unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes f, g reellwertig und $f \leq g$, so gilt $b \leq c$ ([Ü]). Im Allgemeinen folgt aus $f < g$ jedoch *nicht* $b < c$ (sondern eben nur $b \leq c$).

Definition 4.14 Es seien X eine Menge und $f : X \to \mathbb{C}$. Ist $f(x) = 0$, so heißt x eine **Nullstelle** von f. Mit $Z(f)$ bezeichnen wir die Menge der Nullstellen, also

$$Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Bemerkung und Definition 4.15 Eine **Polynomfunktion** oder kurz **Polynom** ist eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{d} c_\nu z^\nu$$

mit den **Koeffizienten** $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{C}$. Im Falle $c_d \neq 0$ nennt man $\deg(p) := d$ den **Grad** von p. Sind p, q Polynome, so ist auch $p \cdot q$ ein Polynom, und zwar vom Grad $\deg(p) + \deg(q)$. Polynome vom Grad $d \in \mathbb{N}$ haben höchstens d Nullstellen ([Ü]). Aus Bemerkung 4.2.1 ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Bemerkung 4.12, dass jedes Polynom stetig ist. Sind $p, q \neq 0$ Polynome, so ist außerdem $p/q : \mathbb{C} \setminus Z(q) \to \mathbb{C}$ stetig, wieder nach Bemerkung 4.12. Funktionen der Form p/q heißen **rational**.

Bemerkung 4.16 (asymptotisches Verhalten rationaler Funktionen) Ist q ein Polynom vom Grad d mit Koeffizienten $b_0, \dots, b_d$, so nennt man das Polynom q^*, definiert durch $q^*(u) := \sum\limits_{\nu=0}^{d} b_{d-\nu} u^\nu = b_d + b_{d-1}u + \cdots + b_0 u^d$ für $u \in \mathbb{C}$, wegen $q(1/u)u^d = q^*(u)$ für $u \in \mathbb{C}^*$ das zu q **reziproke Polynom**. Ist $p(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{d} a_\nu z^\nu$ ein Polynom mit Grad $m \leq d$, so gilt $(p/q)(1/u) = p^*(u)u^{d-m}/q^*(u)$ für $1/u \in \mathbb{C} \setminus Z(q)$ und daher $(p/q)(1/u) \to a_d/b_d$ für $u \to 0$ mit Satz 4.11 und Beispiel 4.15. Also ergibt sich $(p/q)(z) \to a_d/b_d$ für $z \to \omega$. Insbesondere ist p/q abklingend an ∞ im Falle $m < d$.

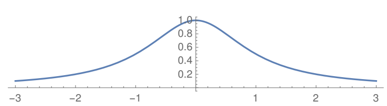


Abbildung 4: $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/(1+x^2)$.

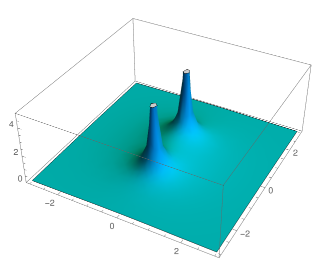


Abbildung 5: $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \ni z \mapsto 1/|1+z^2|$.

Wir wollen verschiedene Kriterien für die Existenz von Grenzwerten herleiten.

Definition 4.17 Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

- **(monoton) wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **streng (monoton) wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **(monoton) fallend** beziehungsweise **streng (monoton) fallend**, falls $-f$ wachsend beziehungsweise streng wachsend ist.

Ist f wachsend oder fallend, so sagen wir kurz, f sei **monoton**.

Definition 4.18 1. Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{C}$. Ist $M \subset X$ und ist $a \in M'$, so schreiben wir

$$f(x) \to c \quad (M \ni x \to a) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{M \ni x \to a} f(x) := c,$$

falls $f|_M(x) \to c$ $(x \to a)$ gilt.
2. Wir schreiben

$$f(x) \to c \quad (x \to +\infty) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) := c,$$

(oder kurz $x \to \infty$) falls $f|_{[0,\infty)}(x) \to c$ $(x \to \omega)$ gilt. Entsprechend schreiben wir

$$f(x) \to c \quad (x \to -\infty) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) := c,$$

falls $f|_{(-\infty,0]}(x) \to c$ $(x \to \omega)$ gilt.

Der folgende Satz zeigt, dass beschränkte *monotone* Funktionen stets Grenzwerte an $\sup X$ und $\inf X$ besitzen. Der Beweis beruht wesentlich auf der Existenz des Supremums und des Infimums beschränkter Mengen, also der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Wir schreiben für $f : X \to \mathbb{R}$ und $M \subset X$

$$\sup_M f := \sup_{x \in M} f(x) := \sup f(M) \qquad \text{und} \qquad \inf_M f := \inf_{x \in M} f(x) := \inf f(M).$$

Satz 4.19 (Hauptsatz über monotone Funktionen)[15]
Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $a := \inf X$, $b := \sup X$.[16] *Weiterhin sei $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist f wachsend, so gilt*

$$f(x) \to \sup_{X \setminus \{b\}} f \qquad (x \to b)$$

falls $b \in X'$ und

$$f(x) \to \inf_{X \setminus \{a\}} f \qquad (x \to a)$$

falls $a \in X'$. Ist f fallend, so gelten die entsprechenden Aussagen mit sup *statt* inf *und* inf *statt* sup.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Die weiteren ergeben sich in analoger Weise. Da f beschränkt ist, ist $c := \sup_{X \setminus \{b\}} f < +\infty$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $x_\varepsilon < b$ mit $f(x_\varepsilon) > c - \varepsilon$. Da f wachsend ist, gilt auch $c \geq f(x) \geq f(x_\varepsilon) > c - \varepsilon$ für alle x mit $x_\varepsilon < x < b$. □

Definition 4.20 Für $M \subset \mathbb{R}$ setzen wir $U_\rho(\pm\infty) := \{x \in M : \pm x > 1/\rho\}$. Sind $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$f(x) \to +\infty \qquad (x \to a),$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass $f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Entsprechend schreiben wir

$$f(x) \to -\infty \qquad (x \to a),$$

falls $f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$.[17]

Beispiel 4.21 Für $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = 1/|z|^d$ gilt $f(z) \to +\infty$ für $z \to 0$. Außerdem gilt $|z|^d \to +\infty$ für $z \to \omega$ in $\mathbb{C}$ und $x^d \to +\infty$ für $x \to +\infty$ sowie $f(x) \to +\infty$ bzw. $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$, je nach dem ob d gerade oder ungerade ist.

[15] In der Literatur – beziehungsweise im Internet – wird man einen Satz unter diesem Namen nicht finden, wohl aber den Spezialfall des Satzes für Folgen (die wir im nächsten Abschnitt betrachten) unter dem Namen Hauptsatz über monotone Folgen.

[16] $a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen.

[17] Mit diesen Bezeichnungen gilt die Aussage des Hauptsatzes über monotone Funktionen auch für unbeschränkte (monotone) Funktionen.

Der folgende Satz gibt Auskunft über „komponierte“ Grenzwerte.

Satz 4.22 *Es seien $X, Y \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \to Y$ mit $f(x) \to b$ für $x \to a$.*

1. *Ist $b \notin f(X)$ und gilt $g(y) \to c$ für $y \to b$, so folgt $(g \circ f)(x) \to c$ für $x \to a$.*
2. *Ist g stetig an b, so gilt $(g \circ f)(x) \to g(b)$ für $x \to a$. Ist zudem f stetig an a, so ist $g \circ f$ stetig an a.*

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\eta > 0$ mit

$$|g(y) - c| < \varepsilon \qquad (y \in \dot{U}_\eta(b)). \tag{4.1}$$

Weiter existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$f(x) \in U_\eta(b) \qquad (x \in \dot{U}_\delta(a)).$$

Ist $b \notin f(X)$, so ergibt sich $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Ist g stetig an b, so gilt (4.1) mit $c = g(b)$ und zusätzlich für $y = b$. Damit ist $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Ist dabei f stetig an a, so ist $b = f(a)$, also $g(b) = (g \circ f)(a)$. $\square$

Bemerkung und Definition 4.23 2. Es seien $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$. Falls $f(a + 1/u) \to c$ für $u \to +\infty$ gilt, so schreibt man $f(x) \to c$ $(x \to a^+)$. Ist $c \in \mathbb{C}$, so heißt

$$f(a^+) := \lim_{x \to a^+} f(x) := c$$

rechtsseitiger Grenzwert von f an a. Entsprechend schreibt man in dem Fall, dass $f(a - 1/u) \to c$ für $u \to +\infty$ gilt, $f(x) \to c$ $(x \to a^-)$. Ist $c \in \mathbb{C}$, so heißt

$$f(a^-) := \lim_{x \to a^-} f(x) := c$$

linksseitiger Grenzwert von f an a.

Man sieht damit leicht: Ist $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $X \cap (a, \infty)$ und von $X \cap (-\infty, a)$, so gilt $f(x) \to c$ $(x \to a)$ genau dann, wenn $f(x) \to c$ für $x \to a^+$ und für $x \to a^-$ gilt. Existieren $f(a^+)$ und $f(a^-)$ mit

$$f(a^+) \neq f(a^-),$$

so heißt a eine **Sprungstelle** von f. An Sprungstellen hat f keinen (beidseitigen) Grenzwert.

Beispiel 4.24 1. Für $d \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1/x^d$ gilt $f(x) \to +\infty$ für $x \to 0^+$ sowie $f(x) \to +\infty$ bzw. $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0^-$, je nach dem ob d gerade oder ungerade ist.

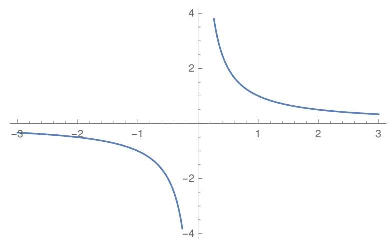


Abbildung 6: $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto 1/x$.

2. Für die Funktion $f = \mathbf{1}_{[1,\infty)}$ aus Beispiel 4.9.1 gilt

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1, \qquad f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$$

Damit ist $a = 1$ eine Sprungstelle. Weiter gilt hier $f(x) \to 1$ für $x \to +\infty$.
3. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ (bezüglich $\mathbb{R}$) heißt **Dirichlet-Funktion**. Die Dirichlet-Funktion hat für *kein* a in $\mathbb{R}$ einen rechts- oder linksseitigen Grenzwert!

> Denn: Ist $a \in \mathbb{R}$ und ist $\delta > 0$, so existieren nach Satz 3.15 $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (also $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$) mit $a < x, y < a + \delta$. Hieraus folgt, dass kein rechtsseitiger Grenzwert an a existiert. Entsprechend sieht man, dass kein linksseitiger Grenzwert existiert.

Insbesondere ist damit f unstetig an allen Stellen $a \in \mathbb{R}$.

Wie etwa die Funktion f aus Beispiel 4.24.1 zeigt, sind Bildmengen von Intervallen unter Funktionen mit Sprungstellen im Allgemeinen keine Intervalle. Anders ist die Situation bei stetigen Funktionen wie der folgende, für die Analysis zentrale Satz zeigt. Der Beweis beruht wieder ganz wesentlich auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz 4.25 (**Zwischenwertsatz**)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $\inf_I f < c < \sup_I f$ ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = c$. [18]

[18] Kurz gesagt gilt also $(\inf_I f, \sup_I f) \subset f(I)$. Insbesondere ist $f(I)$ damit ein Intervall.

Beweis. Zunächst existieren nach Definition des Supremums und des Infimums $u, v \in f(I)$ mit $u < c < v$. Wir wählen $a, b \in I$ mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$, wobei wir ohne Einschränkung $a < b$ annehmen. Da I ein Intervall ist, ist $[a, b] \subset I$. Wir setzen

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\} .$$

Dann ist $M \neq \varnothing$ (da $a \in M$) und beschränkt, also existiert $\xi := \sup M$. Dabei ist $\xi \in [a, b]$, also auch $\xi \in I$. Ist $\xi \in M$, so gilt $f(\xi) \leq c$ nach Definition von M. Ist $\xi \notin M$, so ist $\xi \in M'$. Da f stetig an $\xi \in I$ ist gilt $f(x) \to f(\xi)$ $(M \ni x \to \xi)$. Aus $f(x) \leq c$ für alle $x \in M$ ergibt sich wieder $f(\xi) \leq c$, jetzt mit Bemerkung 4.13. Also ist stets $f(\xi) \leq c$. Insbesondere ist $\xi < b$ und mit $c < f(x) \to f(\xi)$ $(x \to \xi^+)$ damit auch $c \leq f(\xi)$, wieder nach Bemerkung 4.13. Also ist insgesamt $f(\xi) = c$. □

Bemerkung 4.26 Für $n \in \mathbb{N}$ und $I = [0, \infty)$ betrachten wir $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$. Dann gilt $0 = f(0) \in f(I)$ und aus $f(x) = x^n \geq x$ für $x \geq 1$ folgt zudem $\sup_I f = \infty$. Da f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $c \geq 0$ ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = c$. Wir erhalten also aus dem Zwischenwertsatz noch einmal – und jetzt viel leichter – die Existenz n-ter Wurzeln.

5 Folgen und Reihen

Viele Verfahren in der Mathematik beruhen auf der iterativen Anwendung einer Abbildung $\varphi : X \to X$, wobei X eine nichtleere Menge bezeichnet. Ist $x_0 \in X$ (der **Startpunkt** der Iteration), so setzt man

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{5.1}$$

Damit ist eine Abbildung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in X rekursiv definiert. Wir geben Abbildungen, die auf unbeschänkten Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ definiert einen Namen:

Definition 5.1 Sind $N \subset \mathbb{N}_0$ unendlich (und damit nach oben unbeschränkt in $\mathbb{R}$) und X eine nichtleere Menge, so nennen wir eine Funktion $(x_n)_{n\in N} : N \to X$ eine **Folge** (in X). Die x_n heißen dann **Folgenglieder**. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für (bezüglich N) **genügend große** oder auch kurz große n gilt, falls die Eigenschaft mit Ausnahme endlicher vieler Indizes $n \in N$ gilt. Im Falle $N = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq m\}$ schreiben wir dabei auch $(x_n)_{n=m}^\infty$ oder $(x_n)_{n\geq m}$ oder kurz (x_n), wenn m klar oder irrelevant ist. Ist $J \subset N$ unendlich, so nennen wir $(x_n)_{n\in J}$ eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in N}$.

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen $(x_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, also Folgen reeller oder komplexer Zahlen. Da Folgen in $\mathbb{C}$ spezielle $\mathbb{C}$-wertige Funktionen mit Definitionsbereich $N \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ sind, stehen sämtliche Begriffe und Ergebnisse des vorherigen Abschnitts zur Verfügung (wobei wir wieder bei Bedarf reelle Folgen als komplexe auffassen).[19]

Bemerkung und Definition 5.2 Eine Folge $(x_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{K}$ heißt **konvergent**, falls ein $c \in \mathbb{K}$ existiert mit

$$x_n \to c \quad (n \to \infty).$$

Wir schreiben dann auch $\lim x_n := \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Ist dabei $c = 0$, so spricht man auch von einer **Nullfolge**. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**. Nach Bemerkung und Definition 4.23 ist $(x_n)_{n\in N}$ genau dann konvergent gegen c, wenn gilt:

[19] Meist wird der Begriff Folge nur für $N = \mathbb{N}_0$ (oder $\mathbb{N}$) eingeführt. Wenn man möchte, kann man sich bei Folgen auf die Indexmenge $\mathbb{N}_0$ zurückziehen: Ist nämlich $N \subset \mathbb{N}_0$ unendlich, so existiert genau eine streng wachsende Folge $(n_k)_{k=0}^\infty$ mit $N = \{n_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, induktiv definiert durch $n_0 := \min N$ und $n_{k+1} := \min(N \setminus \{n_0, \ldots, n_k\})$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \circ (n_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $R = R_\varepsilon > 0$ mit $|x_n - c| < \varepsilon$ für alle $n > R$, also kurz für alle genügend großen n. Außerdem folgt aus

$$|x_n| \leq |x_n - c| + |c| < 1 + |c|$$

für n genügend groß, dass konvergente Folgen notwendig beschränkt sind. Aus der Definition ergibt sich auch sofort: Ist eine Folge konvergent, so ist auch jede Teilfolge konvergent, und zwar mit gleichem Grenzwert.

Beispiel 5.3 Für $q \in \mathbb{K}$ nennt man eine Folge der Form (q^n) **geometrische Folge**. Die Folge (q^n) ergibt sich rekursiv durch (5.1) mit $\varphi(x) = qx$ für $x \in \mathbb{K}$ und $x_0 = 1$. Für $|q| > 1$ gilt mit $\delta := |q| - 1 > 0$ nach der Bernoullischen Ungleichung

$$|q^n| = |q|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta \to +\infty \qquad (n \to \infty).$$

also $|q^n| \to +\infty$ für $n \to \infty$. Anderseits ist (q^n) für $|q| < 1$ eine Nullfolge, also (q^n) abklingend an ∞.

> Denn: Für $q = 0$ ist die Behauptung klar. Ist $0 < |q| < 1$, so gilt $1/|q| = 1+\delta$ mit einem $\delta > 0$. Wie in 1. ist $|q^n| < 1/(n\delta)$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus $1/n \to 0$ folgt $q^n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Bemerkung 5.4 (**Hauptsatz über monotone Folgen**) Als Spezialfall des Hauptsatzes über monotone Funktionen (Satz 4.19) erhält man die folgende einfache und wichtige hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen: Ist $(x_n)_{n\in N}$ monoton und beschränkt, so konvergiert $(x_n)_{n\in N}$, und zwar gegen $\sup_{n\in N} x_n$ oder $\inf_{n\in N} x_n$ je nach dem ob die Folge wachsend oder fallend ist.

Bemerkung 5.5 (**Fixpunktiteration**) Sind $X \subset \mathbb{K}$ und (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to b$ $(n \to \infty)$, so gilt auch $x_{n+1} \to b$ $(n \to \infty)$. Ist $\varphi : X \to X$ stetig an der Stelle $b \in X$ und ist (x_n) rekursiv definiert durch (5.1), so ergibt sich

$$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = b$$

mit Satz 4.22. Also ist b ein Fixpunkt von φ.[20]

[20] Ist $f : X \to Y$ und $f(x) = x$, so nennt man x einen Fixpunkt von f.

Ein klassisches Beispiel ist das **Heron-Verfahren** (oder auch **Babylonisches Wurzelziehen**): Es sei $c > 0$ und $\varphi = \varphi_c : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \quad (x > 0)\ .$$

Dann ist φ stetig mit $\varphi(\sqrt{c}) = \sqrt{c}$, also $\sqrt{c}$ Fixpunkt von φ. Wir betrachten mit einem

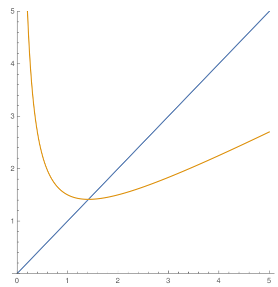


Abbildung 7: $x \mapsto (x + 2/x)/2$ und $x \mapsto x$

beliebigen Startwert $x_0 > 0$ die durch durch (5.1) definierte Folge (x_n). Aus $\sqrt{c} = \sqrt{x \cdot c/x} < \varphi(x)$ für $x \neq \sqrt{c}$ (Ungleichung geometrisches vs. arithmetisches Mittel; [Ü]) ergibt sieht leicht, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ fallend ist (wieder [Ü]). Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist (x_n) konvergent. Ist $b(\geq \sqrt{c})$ der Grenzwert, so gilt $b = \sqrt{c}$, das heißt, die x_n sind Näherungen für $\sqrt{c}$. Dabei sind im Falle $c \in \mathbb{Q}$ und $x_0 \in \mathbb{Q}$ die x_n stets rationale Zahlen.
Wie sieht es dabei mit dem (relativen) Fehler aus, wenn man $\sqrt{c}$ durch x_n ersetzt? Wir schätzen den relativen Fehler $\varepsilon_n = (x_n - \sqrt{c})/\sqrt{c} = x_n/\sqrt{c} - 1 \geq 0$ nach oben ab: Es gilt

$$1 + \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{c}} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon_n + \frac{1}{1 + \varepsilon_n}\right)\ ,$$

also $2\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2/(1 + \varepsilon_n) \leq \varepsilon_n^2$. Hat man nach n Schritten für x_n einen relativen Fehler $\varepsilon_n \leq 10^{-m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist der relative Fehler ε_{n+1} im nächsten Schritt $\leq (10^{-m})^2 = 10^{-2m}$. [21]

Wir betrachten nun beschränkte Folgen, die nicht notwendig monoton sind.

[21] Bei jedem Iterationsschritt ergibt sich also zumindest eine Verdopplung der exakten Dezimalstellen! Man spricht von quadratischer Konvergenz.

Beispiel 5.6 Für $|q| = 1$ ist die geometrische Folge (q^n) beschränkt. Ist speziell $q = -1$, also $q^n = (-1)^n$, so ist die Teilfolge $((-1)^n)_{n\in 2\mathbb{N}_0}$ konstant mit Wert 1 (und damit konvergent gegen 1) und die Teilfolge $((-1)^n)_{n\in 2\mathbb{N}_0+1}$ konstant mit Wert -1 (und damit konvergent gegen -1). Es existieren also zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten. Insbesondere ist die Folge $((-1)^n)$ divergent.

Der folgende Satz stellt einen weiteren zentralen Baustein der Analysis dar:

Satz 5.7 (**Bolzano-Weierstraß**)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei $(x_n)_{n\in N}$ ein Folge in $\mathbb{R}$. Ist

$$b_n := \sup\{x_j : j \in N,\, j \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

so ist (b_n) fallend mit $b_n \geq \inf_{n\in N} x_n$, also konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen gegen $c := \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.[22] Wir zeigen, dass eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in N}$ gegen c konvergiert. Dazu setzen wir $n_0 := \min N$ und definieren eine Folge $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ in N induktiv: Sind $n_0, \ldots, n_k$ definiert, so existiert ein $m > n_k$ mit $b_m < c + 1/k$. Aufgrund der Definition von b_m existiert weiter ein $N \ni j \geq m$ mit $b_m - 1/k < x_j \leq b_m$. Wegen $c \leq b_m$ gilt mit $n_{k+1} := j$ dann

$$c - 1/k < x_{n_{k+1}} < c + 1/k\,.$$

Ist $J := \{n_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, so folgt $x_n \to b$ $(J \ni n \to \infty)$.
2. Es sei $(z_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_n = s_n + it_n$ die Normalform von z_n. Dann sind die Folgen $(s_n)_{n\in N}$ und $(t_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt (es gilt $|s_n| \leq |z_n|$ und $|t_n| \leq |z_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge $(s_n)_{n\in I}$ von $(s_n)_{n\in N}$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $s_n \to b$ $(I \ni n \to \infty)$. Wieder nach 1. existieren auch eine Teilfolge $(t_n)_{n\in J}$ von $(t_n)_{n\in I}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $t_n \to c$ $(J \ni n \to \infty)$. Mit Satz 4.11 folgt $z_n = s_n + it_n \to b + ic$ $(J \ni n \to \infty)$. □

[22] Den Grenzwert c bezeichnet man auch mit $\limsup x_n$. Entsprechend bezeichnet man den Grenzwert der (wachsenden und beschränkten) Folge $c_n := \inf\{x_j : j \geq n\}$ als $\liminf x_n$. Wir werden die Begriffe im Weiteren nicht verwenden.

Bemerkung und Definition 5.8 Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ der **Partialsummen** oder **Teilsummen**

$$s_n := \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu =: a_m + \cdots + a_n \qquad (n \geq m)$$

heißt (die mit der Folge (a_n) gebildete) **Reihe**. Die a_ν heißen dann **Reihenglieder**. Ist die Folge (s_n) konvergent, so heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert** und man schreibt

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Traditionell wird neben dem Reihenwert auch die Teilsummenfolge (s_n) mit $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ bezeichnet. Das ist ganz praktisch, weil man dann kurz von Konvergenz oder Divergenz von $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ sprechen kann. Man beachte aber, dass das Symbol $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ damit zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für ihren Grenzwert.[23] Ist $k > m$, so ist $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, und in diesem Fall ist $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu = \sum\limits_{\nu=m}^{k-1} a_\nu + \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$. Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht.

Beispiel 5.9 1. Es sei $q \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ eine **geometrische Reihe**. Für $|q| < 1$ gilt nach der geometrischen Summenformel $\sum\limits_{\nu=0}^{n} q^\nu = (1 - q^{n+1})/(1-q) \to 1/(1-q)$ $(n \to \infty)$. Also ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ für $|q| < 1$ konvergent mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1-q}\,.$$

Für $q = 1/2$ ergibt sich $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/2^\nu = 2$ und damit auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/2^\nu = 1$. Abbildung 8 veranschaulicht die letzte Reihe als Grenzwert der Teilsummenfolge in Form von Rechteckflächen. Die grau unterlegte Fläche entspricht der Teilsumme s_5.

[23] Allgemeiner betrachtet man auch Reihen in normierten Räumen. Sind $(X, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum (siehe Lineare Algebra), $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in X und (s_n) die Folge der Partialsummen, so heißt die Reihe konvergent, falls ein $c \in X$ existiert mit $|s_n - c|_E \to 0$ $(n \to \infty)$. Man verwendet dann die entsprechenden Schreibweisen.

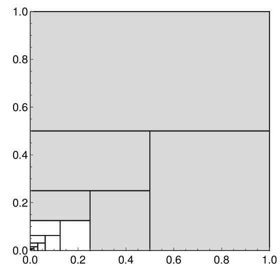


Abbildung 8: Veranschaulichung von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 1/2^\nu = 1$.

2. Nach Beispiel 2.8 gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} 1/(\nu(\nu+1)) = 1 - 1/n \to 1$ $(n \to \infty)$, also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1.$$

Bemerkung 5.10 Durch Anwendung von Satz 4.11 ergibt sich leicht: Sind $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind auch $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} (a_\nu + b_\nu)$ und $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} \lambda a_\nu$ konvergent mit $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) = \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu + \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} b_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} \lambda a_\nu = \lambda \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$.

Beispiel 5.11 Mit Beispiel 5.9 und Bemerkung 5.10 ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^\nu + 4}{5^\nu} = 2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{3^\nu}{5^\nu} + 4 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{5^\nu} = 2 \cdot \frac{1}{1 - 3/5} + 4 \cdot \frac{1}{1 - 1/5} = 10\ .$$

Bemerkung 5.12 Eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, das heißt, ist $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent, so gilt

$$a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Denn: Mit $s_n := \sum\limits_{\nu=m}^{n} a_\nu$ und $s := \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ gilt $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ $(n \to \infty)$.

Beispiel 5.13 1. Ist $a_n = q^n$ mit $|q| \geq 1$, so ist $|a_n| \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ sicher divergent. Damit ergibt sich für geometrische Reihen insgesamt: $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ ist *genau dann* konvergent, wenn $|q| < 1$ ist.
2. Wir betrachten die **harmonische Reihe** $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$. Hier ist $(a_n) = (1/n)$ eine Nullfolge. Wegen $t_m := \sum_{\nu=2^{m-1}+1}^{2^m} 1/\nu \geq 2^{m-1}/2^m = 1/2$ gilt

$$s_{2^k} = \sum_{\nu=1}^{2^k} \frac{1}{\nu} = 1 + \sum_{m=1}^{k} t_m \geq 1 + k/2 \to \infty \quad (k \to \infty).$$

Also ist (s_n) unbeschränkt, und damit ist die harmonische Reihe divergent. Das Beispiel zeigt, dass die notwendige Bedingung $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ aus Bemerkung 5.12 im Allgemeinen *nicht hinreichend* für die Konvergenz der mit a_n gebildeten Reihe ist.

Im Falle von Reihen mit nichtnegativen Gliedern, wie etwa der harmonischen Reihe, können nur zwei wesentlich unterschiedliche Situationen auftreten.

Bemerkung 5.14 Ist (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, also $a_n \geq 0$ für alle n, so ist die Teilsummenfolge (s_n) wachsend. Damit ist entweder (s_n) beschränkt und dann konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mit $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n < \infty$ oder (s_n) unbeschränkt mit $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Man schreibt im zweiten Fall auch $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu = \infty$.

Bemerkung und Definition 5.15 (**Majorantenkriterium**) Es seien $(a_n)_{n\geq m}$ und $(b_n)_{n\geq k}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle genügend großen n. Man nennt dann $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu$ eine **Majorante** von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$. Ist $\sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu$ konvergent, so ist auch $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

Denn: Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$. Aus

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu \leq \sum_{\nu=n_0}^{n} b_\nu \leq \sum_{\nu=n_0}^{\infty} b_\nu \qquad (n \geq n_0)$$

folgt die Beschränktheit der Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=n_0}^{n} a_\nu$. Nach Bemerkung 5.14 ist $\sum_{\nu=n_0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und damit auch $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$.

Beispiel 5.16 (Allgemeine harmonische Reihen) Nach Beispiel 5.13 ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu = \infty$. Ist andererseits $1 < d \in \mathbb{N}$, so gilt $1/\nu^d \leq 1/\nu^2 \leq 1/((\nu-1)\nu)$ für $\nu \geq 2$. Nach Beispiel 5.9 ist $\sum_{\nu=2}^{\infty} 1/((\nu-1)\nu)$ konvergent, also konvergente Majorante von $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^d$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^d$.

Wählt man als spezielle Majorante eine geometrische Reihe, so erhält man weitere Konvergenzkriterien:

Satz 5.17 (**Wurzelkriterium** und **Quotientenkriterium**)
Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $[0,\infty)$. Dann ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

1. *Es existiert ein $q < 1$ mit $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ für alle genügend großen n.*
2. *Es existiert ein $q < 1$ mit $a_n > 0$ und $a_{n+1}/a_n \leq q$ für alle genügend großen n.*

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $0 \leq a_n \leq q^n$ für alle genügend großen n. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ folgt die Konvergenz von $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ mit Bemerkung 5.15.
2. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n > 0$ und $a_{n+1}/a_n \leq q$ für $n \geq n_0$. Induktiv ergibt sich mit $\lambda := a_{n_0} q^{-n_0}$

$$a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0} = \lambda q^n \qquad (n \geq n_0).$$

Wie in 1. folgt damit die Behauptung aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$. □

Bemerkung 5.18 Sind $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $[0,\infty)$ mit $\sqrt[n]{a_n} \to r < +\infty$ $(n \to \infty)$, so ist die Bedingung 1. aus Satz 5.17 für jedes $q > r$ erfüllt. Also ist die Reihe $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ im Falle $r < 1$ konvergent. Aus $a_{n+1}/a_n \to r$ $(n \to \infty)$ folgt zudem $\sqrt[n]{a_n} \to r$ $(n \to \infty)$.

> Denn: Ist $\varepsilon > 0$, so sieht man wie im Beweis zum Quotientenkriterium, dass ein $\lambda > 0$ existiert mit $\lambda(r-\varepsilon)^n \leq a_n \leq \lambda(r+\varepsilon)^n$ für n genügend groß. Wegen $\sqrt[n]{\lambda} \to 1$ $(n \to \infty)$ gilt $r - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq r + \varepsilon$ für n genügend groß.

Beispiel 5.19 (exponentielles versus polynomiales Wachstum) Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $0 < r < 1$. Aus $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ ([Ü]) folgt $\sqrt[n]{n^d r^n} = r(\sqrt[n]{n})^d \to r$ $(n \to \infty)$. Nach Bemerkung 5.18 ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^d r^\nu$ konvergent. Insbesondere folgt aus der Konvergenz der Reihe mit Bemerkung 5.12, dass $(n^d r^n)$ eine Nullfolge ist. Genauer zeigt die obige Überlegung sogar, dass die Folge $(n^d r^n)$ für jedes q mit $r < q < 1$ so schnell wie die geometrische Folge (q^n) abklingt. Die Botschaft: polynomiales Wachstum ist im Vergleich zu exponentiellem Wachstum vernachlässigbar!

Wir betrachten **alternierende Reihen**, d. h. Reihen der Form $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ mit $a_n \geq 0$.

Satz 5.20 *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine fallende Folge in $[0, \infty)$.*

1. *Für $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$ gilt $s_n \geq 0$ mit fallender Teilfolge $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0}$ und wachsender Teilfolge $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0+1}$.*

2. (**Leibniz-Kriterium**) *Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ konvergent.*

Beweis. 1. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \geq 0$$

und damit auch $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq 0$. Weiter gilt für $n \geq 2$

$$s_n - s_{n-2} = (-1)^{n-1}(a_{n-1} - a_n) \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \geq 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Damit ist $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0}$ fallend und $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0+1}$ wachsend.
2. Nach 1. und dem Hauptsatz über monotone Folgen existiert ein $s \in [0, \infty)$ mit $s_n \to s$ $(2\mathbb{N} \ni n \to \infty)$. Dann gilt auch $s_{n+1} = s_n - a_{n+1} \to s$ $(2\mathbb{N} \ni n \to \infty)$. Zusammen ergibt sich $s_n \to s$ für $n \to \infty$. □

Beispiel 5.21 Während die harmonische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu$ nach Beispiel 5.13 divergiert, konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu$ nach Satz 5.20.

Wir zielen zum Abschluß des Abschnitts auf ein weiteres Konvergenzkriterium, jetzt für allgemeine Reihen in $\mathbb{K}$.

Bemerkung und Definition 5.22 Eine Folge $(x_n)_{n\in N}$ in $X \subset \mathbb{C}$ heißt **Cauchyfolge** (in X), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R = R_\varepsilon > 0$ so existiert, dass

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

für alle $n, n' \in N$ mit $n, n' > R$ gilt, also kurz, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ für genügend große $n, n' \in N$ gilt. Ist $(x_n)_{n\in N}$ konvergent, so ist $(x_n)_{n\in N}$ eine Cauchyfolge in X, denn ist $c \in \mathbb{C}$ mit $x_n \to c$ $(n \to \infty)$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ mit $|x_n - c| < \varepsilon/2$ für $n > R$, also $|x_n - x_{n'}| \le |x_n - c| + |c - x_{n'}| < \varepsilon$ für $n, n' > R$.

Satz 5.23 *Es sei $(x_n)_{n\in N}$ eine Cauchyfolge. Dann gilt*

1. *$(x_n)_{n\in N}$ ist beschränkt.*
2. *Konvergiert eine Teilfolge $(x_n)_{n\in J}$, so konvergiert $(x_n)_{n\in N}$.*

Beweis. 1. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n_0 \in N$ so, dass $|x_n - x_{n'}| < 1$ für alle $n, n' \in N$ mit $n, n' \ge n_0$, also auch

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \le |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$$

für alle $n \in N$ mit $n \ge n_0$. Damit ist $(x_n)_{n\in N}$ beschränkt.
2. Es sei $(x_n)_{n\in J}$ eine Teilfolge mit $x_n \to c$ $(J \ni n \to \infty)$ und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $R > 0$ mit $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon/2$ für $n, n' > R$. Weiter existiert ein $j \in J$ so, dass $j > R$ und $|x_j - c| < \varepsilon/2$. Damit ist $|x_n - c| \le |x_n - x_j| + |x_j - c| < \varepsilon$ für $n > R$. Also gilt $x_n \to c$ $(n \to \infty)$. $\square$

Satz 5.24 (Cauchykriterium für Folgen)
Es sei $X \subset \mathbb{C}$ mit $X' \subset X$. Dann ist jede Cauchyfolge in X konvergent mit Grenzwert in X.[24]

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in N}$ eine Cauchyfolge in X. Dann ist $(x_n)_{n\in N}$ beschränkt nach Satz 5.23.1. Also hat $(x_n)_{n\in N}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge und ist damit wegen Satz 5.23.2 schon konvergent. Aus $X' \subset X$ folgt, dass der Grenzwert in X liegt ([Ü]). □

Bemerkung 5.25 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $a \in X'$. Ist $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \to c \in \mathbb{C}$ $(x \to a)$, so gilt nach Satz 4.22 auch $f(x_n) \to c$ $(n \to \infty)$ für alle Folgen (x_n) in $X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$. Umgekehrt ergibt sich aus dem Cauchykriterium: Ist für alle Folgen (x_n) in $X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ die Bildfolge $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(x) \to c$ $(x \to a)$.

> Denn: Es sei (x_n) eine Folge in $X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Nach dem Cauchykriterium existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(x_n) \to c$ $(n \to \infty)$. Angenommen, es gilt nicht $f(x) \to c$ $(x \to a)$. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ sowie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in X$ mit $0 < |y_n - a| < 1/n$ und $|f(y_n) - c| \geq \varepsilon$ für alle n. Für die Folge (z_n) in $X \setminus \{a\}$ mit
>
> $$z_n := \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$
>
> gilt $z_n \to a$ $(n \to \infty)$. Für n genügend groß ist $|f(x_n) - c| < \varepsilon/2$ und damit $|f(z_{n+1}) - f(z_n)| \geq |f(y_{n+1}) - c| - |f(x_n) - c| \geq \varepsilon/2$ für genügend große gerade n. Also ist die Bildfolge $(f(z_n))$ keine Cauchyfolge, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Satz 5.26 (**Cauchykriterium für Reihen**)
Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ genau dann konvergent, wenn für alle

[24] Da jede Cauchfolge konvergent ist, ist damit eine Folge in $\mathbb{K}$ genau dann konvergent (mit Grenzwert in $\mathbb{K}$), wenn sie eine Cauchyfolge ist.

$\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ so existiert, dass

$$\Big| \sum_{\nu=n'+1}^{n} a_\nu \Big| < \varepsilon \qquad (n > n' > R).$$

Beweis. Ist $s_n = \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu$, so ist $|s_{n'} - s_n| = |s_n - s_{n'}| = \Big| \sum_{\nu=n'+1}^{n} a_\nu \Big|$ für $n > n' \geq m$. Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Cauchykriterium für Folgen. □

Satz 5.27 *Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent, so ist auch $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent.*

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert nach Satz 5.26 ein $R > 0$ mit $\sum_{\nu=n'+1}^{n} |a_\nu| < \varepsilon$ für $n > n' > R$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\Big| \sum_{\nu=n'+1}^{n} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=n'+1}^{n} |a_\nu| < \varepsilon \qquad (n > n' > R).$$

Wieder nach Satz 5.26 ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent. □

Bemerkung und Definition 5.28 Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Reihe $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{\nu=m}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert. Nach Satz 5.27 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent. Außerdem gilt dann ([Ü])

$$\Big| \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |a_\nu|. \tag{5.2}$$

Ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ konvergent und ist $\sum_{\nu=m}^{\infty} |a_\nu|$ divergent, so heißt $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu$ **bedingt konvergent**. Ist $d \in \mathbb{N}$, so ist die alternierende Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu/\nu^d$ für $d = 1$ bedingt konvergent und für $d \geq 2$ absolut konvergent (Beispiel 5.21 und Beispiel 5.16).

6 Elementare Funktionen

Wir wollen in diesem Abschnitt sogenannte elementare Funktionen einführen. Ausgangspunkt und Kern der Untersuchungen bildet die Exponentialfunktion.

Bemerkung und Definition 6.1 Es sei $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann nennt man eine Reihe der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine **Potenzreihe** in der Variablen $z \in \mathbb{C}$. Ist[25]

$$r := \inf\{q \geq 0 : \sqrt[n]{|c_n|} \leq q \text{ für } n \text{ genügend groß}\} < \infty\,,$$

so ist die Reihe absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/r$ (wobei $1/0 =: +\infty$) und divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1/r$.

> Denn: Ist $|z| < 1/r$ und ist $q > r$ so, dass $|z| < 1/q$, so gilt $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| \leq q|z| < 1$ für n genügend groß. Damit folgt die absolute Konvergenz aus dem Wurzelkriterium. Umgekehrt sei die Reihe konvergent für ein $z \in \mathbb{C}^*$. Dann ist $(c_n z^n)$ eine Nullfolge, also insbesondere $\sqrt[n]{|c_n|}|z| = \sqrt[n]{|c_n z^n|} \leq 1$ für n genügend groß. Folglich ist $r \leq 1/|z|$.

Man nennt $R = 1/r$ den **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Gilt dabei $\sqrt[n]{|c_n|} \to s$ oder $|c_{n+1}/c_n| \to s$ $(n \to \infty)$, so ist $r = s$ ([Ü]), also $R = 1/s$.

Bemerkung und Definition 6.2 Es sei $c_n := 1/n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $c_{n+1}/c_n = 1/(n+1) \to 0$ $(n \to \infty)$ ist die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu/\nu!$ nach Bemerkung 6.1 für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \qquad (z \in \mathbb{C})\,,$$

heißt **(komplexe) Exponentialfunktion**. Nach Definition ist $\exp(0) = 1$ und zudem $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Allgemeiner gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ([Ü]).

Wir wollen Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten, die von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik sind.

[25] mit $\inf \varnothing := \infty$

Satz 6.3 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)\,.$$

Beweis. Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $J_n := \{(\mu,\nu) \in \{0,\dots,n\}^2 : \mu+\nu \geq n+1\}$ sowie $r_n := \sum_{(\nu,\mu)\in J_n} z^\nu w^\mu/(\nu!\mu!)$. Dann gilt mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{w^\mu}{\mu!}\right) &= \sum_{\nu,\mu\leq n} \frac{z^\nu w^\mu}{\nu!\mu!} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\nu,\mu\leq n,\, \nu+\mu=k} \frac{z^\nu w^\mu}{\nu!\mu!} \\ &= r_n + \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{z^\nu w^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} = r_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(z+w)^k =: r_n + s_n.\end{aligned}$$

Die Folge auf der linken Seite konvergiert gegen $\exp(z)\exp(w)$ für $n \to \infty$ und (s_n) gegen $\exp(z+w)$. Daher reicht es zu zeigen, dass (r_n) eine Nullfolge ist. Wieder mit binomischer Formel gilt

$$|r_n| \leq \sum_{(\mu,\nu)\in J_n} \frac{|z|^\nu |w|^\mu}{\nu!\mu!} \leq \sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{\nu=0}^{k} \frac{|z|^\nu |w|^{k-\nu}}{\nu!(k-\nu)!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k!}(|z|+|w|)^k\,.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty}(|z|+|w|)^k/k!$ konvergiert die Folge auf der rechten Seite nach dem Cauchykriterium gegen 0 für $n \to \infty$. Also gilt auch $r_n \to 0$. □

Bemerkung und Definition 6.4 Wegen $1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$ gilt

$$\exp(-z) = 1/\exp(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$. Induktiv ergibt sich aus Satz 6.3 damit auch

$$\exp(mz) = (\exp(z))^m \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt **Eulersche Zahl**. Es gilt $\exp(m) = e^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, und deshalb ist die Schreibweise e^z statt $\exp(z)$ für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ konsistent mit der Definition ganzzahliger Potenzen. Wir werden diese im Weiteren meist verwenden. Mit $|e^z|^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} = (e^{\mathrm{Re}(z)})^2$ ergibt sich durch Wurzelziehen

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Bemerkung 6.5 1. Ist $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|c_n| \leq 1$, so ist die Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und mit (5.2) gilt

$$|f(z) - f(0)| = \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |z|^\nu = \frac{|z|}{1-|z|}.$$

Insbesondere ist f stetig an 0.
2. Nach 1. ist die Funktion exp stetig an 0. Für allgemeines $a \in \mathbb{C}$ gilt damit auch $e^z = e^a \cdot e^{z-a} \to e^a$ $(z \to a)$. Damit ist exp stetig an a.

Satz 6.6 *Die Funktion* $\exp|_{\mathbb{R}}$ *ist streng wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. *Außerdem gilt* $e^t/t^n \to +\infty$ $(t \to +\infty)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.[26]

Beweis. Aus

$$e^x = 1 + x + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \geq 1 + x$$

für $x \geq 0$ und $e^{-x} = 1/e^x$ folgt $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$ und zudem $e^t \to \infty$ $(t \to +\infty)$ sowie $e^t = 1/e^{-t} \to 0$ $(t \to -\infty)$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. Für $s < t$ ergibt sich $e^t/e^s = e^{t-s} \geq 1 + (t-s) > 1$ und damit $e^t > e^s$. Also ist $\exp|_{\mathbb{R}}$ streng wachsend. Schließlich ist für $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ auch $e^t \geq t^{n+1}/(n+1)!$ und damit folgt $e^t/t^n \geq t/(n+1)! \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. □

Bemerkung und Definition 6.7 Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos z := \cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **(komplexe) Kosinusfunktion**. Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin z := \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **(komplexe) Sinusfunktion**. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die **Eulersche Formel**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{6.1}$$

[26] Wieder eine Variante von exponentiell vs. polynomial.

Außerdem ergibt sich für $t \in \mathbb{R}$ mit $e^{-it} = e^{\overline{it}} = \overline{e^{it}}$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + \overline{e^{it}}) = \mathrm{Re}(e^{it}), \qquad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - \overline{e^{it}}) = \mathrm{Im}(e^{it})$$

und damit auch $1 = e^{it}e^{-it} = |e^{it}|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

Bemerkung 6.8 Mit Bemerkung 4.10 und der Stetigkeit von exp ergibt sich leicht die Stetigkeit von cos und sin. Weiter folgt aus der jeweiligen Definition sofort $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(-z) = \cos z$ sowie $\sin(-z) = -\sin z$. Schließlich gilt

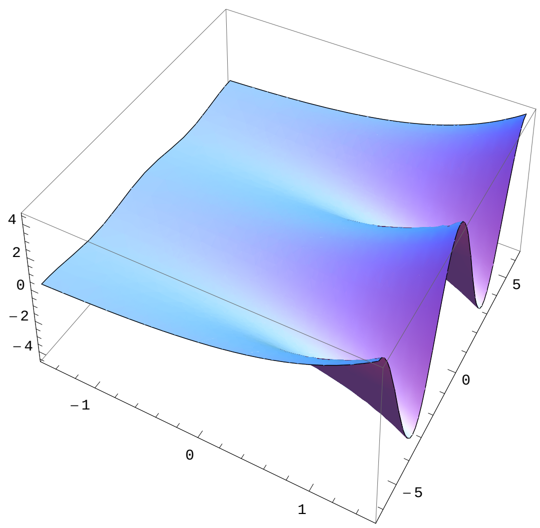


Abbildung 9: $s + it \mapsto \mathrm{Re}(e^{s+it}) = e^s \cos(t)$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

mit absoluter Konvergenz der Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ ([Ü]). Abbildung 9 zeigt den Realteil der komplexen Exponentialfunktion. Das Schwingungsverhalten der reellen Kosinusfunktion spiegelt sich wider im Verhalten des Realteils der Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse.

Satz 6.9 (**Additionstheoreme**)
Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Beweis. Wegen $(u+1)(v+1) + (u-1)(v-1) = 2(uv+1)$ für $u, v \in \mathbb{C}$ ergibt sich mit $u = e^{2iz}$ und $v = e^{2iw}$

$$\begin{aligned}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw}) &= 2e^{-iz}e^{-iw}(e^{2iz}e^{2iw}+1) \\ &= 2(e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}).\end{aligned}$$

Nach Division durch 4 ergibt ich die erste Aussage. Die zweite erhält man entsprechend mit $(u-1)(v+1) + (u+1)(v-1) = 2(uv-1)$. □

Bemerkung 6.10 Speziell ergibt sich mit $w = -z$ aus dem ersten Additionstheorem mit Bemerkung 6.8 die Indentiät $\cos^2 + \sin^2 = 1$ auch auf $\mathbb{C}$.

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz und damit einmal mehr die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, um die Kreiszahl π zu definieren. Dazu beweisen wir vorbereitend

Satz 6.11 *Für* $t \in (0, \sqrt{6})$ *und* $m \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$0 < \sum_{\nu=0}^{2m+1} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \le \sin t \le \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \le t.$$

Außerdem existiert ein $\xi \in (0,2)$ *mit* $\cos(\xi) = 0$.

Beweis. 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in (0, \sqrt{6})$ setzen wir $a_n(t) := t^{2n+1}/(2n+1)!$ und $s_n(t) := \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$. Wegen $a_n(t)/a_{n-1}(t) = t^2/(2n(2n+1)) \le t^2/6 < 1$ für $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n(t))$ fallend. Also folgt aus Satz 5.20

$$0 < t(1-t^2/6) = s_1(t) \le s_{2m+1}(t) \le \sin t \le s_{2m}(t) \le s_0(t) = t \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

2. Nach 1. ist $\sin 1 \geq s_1(1) = 5/6 > 1/\sqrt{2}$. Also ist $\cos^2 1 = 1 - \sin^2 1 < 1/2$. Da cos stetig ist mit $\cos(0) = 1$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in (0,1)$ mit $\cos\tau = 1/\sqrt{2}$. Damit ist wegen $\sin\tau \geq 0$ auch $\sin\tau = 1/\sqrt{2}$, also

$$e^{2i\tau} = (e^{i\tau})^2 = (\cos\tau + i\sin\tau)^2 = (1+i)^2/2 = i.$$

Für $\xi = 2\tau$ ist $\cos(\xi) = \mathrm{Re}(e^{i\xi}) = 0$. □

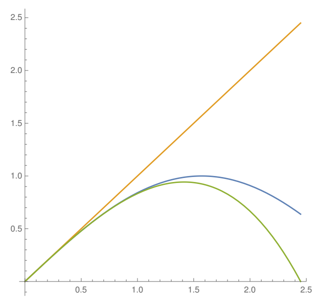


Abbildung 10: $t \mapsto \sin t$ (blau), $t \mapsto t$ und $t \mapsto t(1 - t^2/6)$.

Bemerkung und Definition 6.12 Nach Satz 6.11 ist $M := \{t > 0 : \cos t = 0\} \subset (0, \infty)$ nichtleer. Wir definieren die **Kreiszahl** π als

$$\pi := 2 \cdot \inf M \in [0, 4).$$

Aus der Stetigkeit von cos folgt $\inf M = \min M$, also

$$\cos(\pi/2) = 0$$

und insbesondere $\pi/2 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz sowie $\cos t = \cos(-t)$ ist $\cos t > 0$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aus $1 = \cos^2(\pi/2) + \sin^2(\pi/2) = \sin^2(\pi/2)$ und $\sin(\pi/2) > 0$ ergibt sich

$$\sin(\pi/2) = 1$$

und damit $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$, also auch $e^{i\pi} = -1$ [27] und $e^{2i\pi} = 1$.

[27] Die Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ kombiniert über die imaginäre Einheit i in eleganter Weise die reellen Zahlen $0, 1, e$ und π.

Bemerkung und Definition 6.13 1. Sind $(X, +)$ eine Halbgruppe, $a \in X$ und $f : X \to Y$, so definieren wir $\sigma_a f : X \to Y$ durch

$$(\sigma_a f)(x) := f(x + a) \qquad (x \in X).$$

Man nennt f **periodisch** mit **Periode** a (oder kurz a-periodisch), falls $\sigma_a f = f$ gilt, d. h. falls $f(x + a) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.
2. Für die Exponentialfunktion gilt $\sigma_a \exp = e^a \exp$ für alle $a \in \mathbb{C}$. Mit Bemerkung und Definition 6.12 erhält man damit $\sigma_{\pm i\pi/2} \exp = \pm i \exp$ sowie $\sigma_{i\pi} \exp = -\exp$ und $\sigma_{2i\pi} \exp = \exp$. Insbesondere ist exp periodisch mit Periode $2i\pi$

Satz 6.14 *Es gilt*

1. $\sigma_{\pi/2} \cos = -\sin$, $\sigma_\pi \cos = -\cos$ *und* $\sigma_{2\pi} \cos = \cos$
2. $\sigma_{\pi/2} \sin = \cos$, $\sigma_\pi \sin = -\sin$ *und* $\sigma_{2\pi} \sin = \sin$.

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 6.13 ist

$$2\cos(z + \pi/2) = e^{iz+i\pi/2} + e^{-iz-i\pi/2} = ie^{iz} - ie^{-iz} = -2\sin z.$$

Entsprechend ergeben sich die weiteren Aussagen. □

Aus folgendem Satz ergibt sich in Kombination mit dem vorhergehenden die Monotonie von cos auf Intervallen der Form $[0, \pi] + k\pi$ und von sin auf $[-\pi/2, \pi/2] + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 6.15 *Es gilt*

1. $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ *ist streng wachsend mit* $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
2. $\cos|_{[0,\pi]}$ *ist streng fallend mit* $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Beweis. 1. Wegen $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$ ergibt sich mit dem Zwischenwertsatz $\sin([-\pi/2, \pi/2]) \supset [-1, 1]$. Aus dem 2. Additionstheorem folgt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sin(z + w) - \sin(z - w) = 2\cos(z)\sin(w)\ .$$

Also ergibt sich für $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sin(2t) - \sin(2s) = \sin(t+s+t-s) - \sin(t+s-(t-s)) = 2\cos(t+s)\sin(t-s)\,.$$

Ist $-\pi/4 \leq s < t \leq \pi/4$, so gilt $t+s \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $t-s \in (0, \pi/2]$. Nach Bemerkung 6.12 ist $\cos(t+s)$ positiv und mit Satz 6.14 auch $\sin(t-s)$. Also ist $\sin(2s) < \sin(2t)$. Damit ist $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ streng wachsend und $\sin([-\pi/2, \pi/2]) \subset [-1, 1]$.
2. Die zweite Aussage folgt aus 1. mit Satz 6.14. □

Hinsichtlich der Nullstellen der trigonometrischen Funktionen gilt

Satz 6.16 *Es gilt*

1. $Z(\exp -1) = 2\pi i\mathbb{Z}$.
2. $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ *und* $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

Beweis. 1. Aus der $2\pi i$-Periodizität von exp und $e^0 = 1$ folgt $Z(\exp -1) \supset 2\pi i\mathbb{Z}$.
$\subset$: Da cos streng fallend auf $[0, \pi]$ ist und $\cos(2\pi - t) = \cos(-t) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cos(t) < 1$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, also $e^{it} \neq 1$ für $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ist nun $z = s + it$ mit $e^z = 1$, so gilt $1 = |e^z| = e^s|e^{it}| = e^s$ und folglich $s = 0$. Damit ist $e^{it} = 1$, also $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, das heißt $z = it \in 2\pi i\mathbb{Z}$.
2. Es gilt $0 = 2i\sin z = e^{iz} - e^{-iz}$ genau dann, wenn $e^{2iz} - 1 = 0$ ist. Aus 1. ergibt sich damit $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und mit Satz 6.14 dann auch $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$. □

Bemerkung und Definition 6.17 Die **Tangensfunktion** $\tan : \mathbb{C}\setminus(\pi\mathbb{Z}+\pi/2) \to \mathbb{C}$ und die **Kotangensfunktion** $\cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Nach Bemerkung 4.10 und Bemerkung 6.8 sind tan und cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

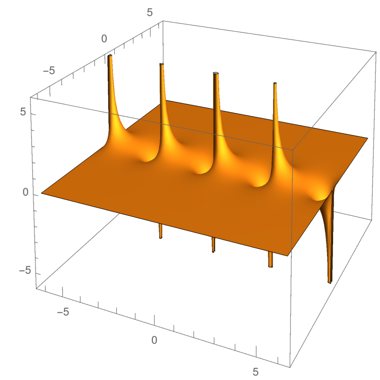


Abbildung 11: $z \mapsto \mathrm{Re}(\cot z)$

Beispiel 6.18 Es seien $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \cos(\pi/z) \quad \text{und} \quad g(z) := zf(z) = z\cos(\pi/z).$$

Dann gilt $Z(f) = Z(g) = \{(n + 1/2)^{-1} : n \in \mathbb{Z}\}$. Insbesondere haben f und g in jeder Umgebung von 0 unendlich viele Nullstellen. Da $\cos|_{\mathbb{R}}$ beschränkt ist, ist $g|_{\mathbb{R}}$ nach Bemerkung 4.7 abklingend an der Stelle 0, also gilt $g(t) \to 0$ $(t \to 0^{\pm})$. Die Funktion $f|_{\mathbb{R}}$ hat weder einen rechtsseitigen noch einen linksseitigen Grenzwert an 0.

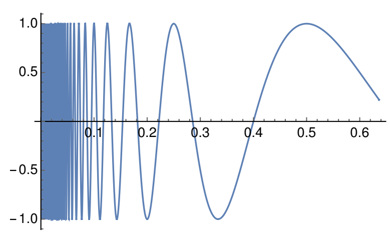


Abbildung 12: $t \mapsto \cos(\pi/t)$

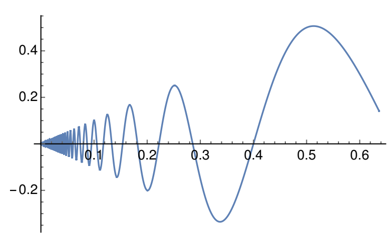


Abbildung 13: $t \mapsto t\cos(\pi/t)$

Wir haben bereits gesehen, dass die komplexe Exponentialfunktion nullstellenfrei ist. Wir zeigen nun, dass jede komplexe Zahl $w \neq 0$ als Funktionswert angenommen wird.

Satz 6.19 *Es gilt* $\exp(i\mathbb{R}) = \mathbb{S}$ *und* $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Beweis. 1. Nach Bemerkung 6.7 ist $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Wir zeigen $\supset$. Dazu sei $w \in \mathbb{S}$ mit Normalform $u + iv$. Ohne Einschränkung können wir $v \geq 0$ annehmen (ist $e^{it} = u + iv$, so ist $e^{-it} = u - iv$). Nach Satz 6.15 existiert ein $t \in [0, \pi]$ mit $u = \cos t$. Dann ist $\sin t \geq 0$ und

$$v^2 = 1 - u^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t\,.$$

Also gilt $v = \sin t$ und damit $e^{it} = \cos t + i \sin t = w$.
2. Es sei $w \in \mathbb{C}$. Nach Bemerkung 3.23 existieren $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{S}$ mit $w = r\zeta$. Nach Satz 6.6 ist $r = e^s$ für ein $s \in \mathbb{R}$ und nach 1. ist $\zeta = e^{it}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $w = e^s e^{it} = e^{s+it}$. □

Bemerkung und Definition 6.20 Wie bereits angedeutet, sind im Körper $\mathbb{C}$ Gleichungen der Form $z^n = c$ stets, also für alle $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, lösbar. Einen Beweis haben wir bisher noch nicht erbracht. Mithilfe von Satz 6.19 ergibt sich die Behauptung sehr einfach: Ohne Einschränkung sei $c \neq 0$. Dann ist $c = e^w$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Für $z := e^{w/n}$ ergibt sich

$$z^n = (e^{w/n})^n = c.$$

Aufgrund der $2\pi i$-Periodizität von exp ist dann auch $(ze^{2k\pi i/n})^n = c$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei die n Zahlen

$$z_k := ze^{2k\pi i/n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

paarweise verschieden sind und damit alle Lösungen der Gleichung darstellen. Man nennt $z_0, \ldots, z_{n-1}$ die n-ten **Wurzeln** aus c. Im Fall $c = 1$ spricht man auch von den n-ten **Einheitswurzeln**. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$ die vierten Einheitswurzeln. Allgemein sind die n-ten Einheitswurzeln gegeben durch $z_k = e^{2\pi ik/n}$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Abbildung 14 zeigt die zehnten Einheitswurzeln. [28]

[28] Geometrisch interpretiert sind die n-ten Einheitswurzeln die Ecken des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären n-Ecks.

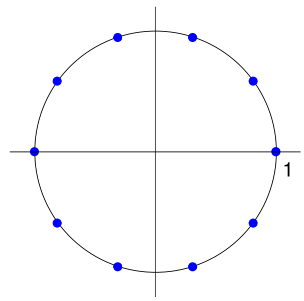


Abbildung 14: Zehnte Einheitswurzeln.

Bemerkung und Definition 6.21 (Polarkoordinaten) Aus Satz 6.19 ergibt sich eine weitere Möglichkeit der Darstellung komplexer Zahlen, die sich für viele Zwecke als angemessen erweist. Ist $z \in \mathbb{C}^*$ mit der Polarform $z = r\zeta$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\zeta = e^{i\theta}$, also

$$z = re^{i\theta}.$$

Fixiert man $\alpha \in \mathbb{R}$ und beschränkt man θ auf das Intervall $(\alpha - \pi, \alpha + \pi]$, so ist die Darstellung nach Satz 6.16 eindeutig. Ist $z = (s, t) \in \mathbb{R}^2$, so ist damit auch

$$(s, t) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Man nennt dann $r > 0$ und $\theta \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]$ die **Polarkoordinaten** von (s, t) bezüglich α. Meist wählt man $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten wird die Multiplikation komplexer Zahlen sehr natürlich: Sind $z = re^{i\theta}$ und $w = \rho e^{i\varphi}$, so ist $zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$. Außerdem sind die n-ten Wurzeln aus z gegeben durch $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ für $k = 0, \ldots, n-1$

Wir befassen uns nun mit der Umkehrbarkeit der elementaren Funktionen. Dazu beweisen wir zunächst folgendes allgemeine Ergebnis.

Satz 6.22 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \to W(f) \subset \mathbb{R}$ streng wachsend (beziehungsweise fallend). Dann ist f bijektiv und es gilt*

1. *f^{-1} ist streng wachsend (beziehungsweise fallend).*

2. *f^{-1} ist stetig.*

Beweis. Wir setzen $J := W(f)$. Aus der strengen Monotonie folgt, dass $f : I \to J$ injektiv (also auch bijektiv) ist, das heißt $f^{-1} : J \to I$ existiert.
1. Ohne Einschränkung sei f streng wachsend. Angenommen, es existieren $u, v \in J$ mit $u < v$ und $s := f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v) =: t$. Dann gilt $u = f(s) \geq f(t) = v$, da f (streng) wachsend ist. Widerspruch! Also ist $f^{-1} : J \to I$ streng wachsend.
2. Es seien $u \in J$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $t := f^{-1}(u)$. Ist $t \neq \sup I$, so existiert ein $h = h_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ mit $t + h \in I$. Mit $\delta^+ := \delta^+_\varepsilon := f(t+h) - u > 0$ gilt für alle $v \in J$ mit $u \leq v < u + \delta^+ = f(t+h)$

$$0 \leq f^{-1}(v) - f^{-1}(u) < f^{-1}(u + \delta^+) - f^{-1}(u) = t + h - t = h < \varepsilon\ .$$

Ist $t \neq \inf I$, so sieht man entsprechend: Es existiert ein $\delta^- > 0$ so, dass

$$0 \leq f^{-1}(u) - f^{-1}(v) < \varepsilon$$

für alle $v \in J$ mit $u - \delta^- < v \leq u$. Damit ergibt sich $|f^{-1}(v) - f^{-1}(u)| < \varepsilon$ für alle $v \in J$ mit $|v - u| < \delta := \min\{\delta^+, \delta^-\}$. □

Bemerkung und Definition 6.23 Nach Satz 6.6 und Satz 6.22 existiert die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ und ist dort stetig und streng wachsend. Diese Funktion nennt man die (natürliche) **Logarithmusfunktion** und schreibt dafür ln oder auch log. Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht ([Ü]):

1. Für alle $s, t > 0$ ist $\ln(st) = \ln(s) + \ln(t)$.
2. Für alle $t > 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(t^m) = m \ln(t)$.

Definition 6.24 Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist $a^m = e^{\ln(a^m)} = e^{m \ln a}$ nach Bemerkung 6.23. Wir setzen für allgemeines $z \in \mathbb{C}$

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) = e^{z \cdot \ln a}\ .$$

Aus den Rechenregeln für ln und exp erhält man $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ für $a > 0$ und die folgenden Potenzgesetze.

Satz 6.25 *Es seien $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$a^z a^w = a^{z+w}, \quad a^z b^z = (ab)^z \quad \textit{und} \quad (a^c)^z = a^{cz}.$$

Beweis. Es gilt

$$a^z a^w = e^{z \ln a} e^{w \ln a} = e^{z \ln a + w \ln a} = e^{(z+w) \ln a} = a^{z+w}$$

und

$$a^z b^z = e^{z \ln a} e^{z \ln b} = e^{z(\ln a + \ln b)} = e^{z \ln(ab)} = (ab)^z.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ ist $a^c = e^{c \ln a} > 0$ und damit $(a^c)^z = e^{z \ln(e^{c \ln a})} = e^{cz \ln a} = a^{cz}$. □

Bemerkung und Definition 6.26 Die nach Satz 6.22 und Satz 6.15 auf $[-1, 1]$ existierende, streng wachsende und stetige Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ heißt **Arkussinus** (kurz arcsin). Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1, 1]$ existierende und dort streng fallende und stetige Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ mit **Arkuskosinus** (kurz arccos). Weiterhin kann man zeigen, dass tan streng wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und cot streng fallend in $(0, \pi)$ sind mit $W(\tan|_{(-\pi/2,\pi/2)}) = W(\cot|_{(0,\pi)}) = \mathbb{R}$ ([Ü]). Also existieren auf $\mathbb{R}$ die – dort stetigen – Umkehrfunktionen, genannt **Arkustangens** (kurz arctan) beziehungsweise **Arkuskotangens** (kurz arccot), mit entsprechenden Monotonieeigenschaften.

Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnitts den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Dazu beweisen wir zunächst eine Aussage über die Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen, die ganz allgemein von großer Bedeutung für die Analysis ist.

Definition 6.27 Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Man sagt, f wird **maximal** (oder f hat ein **Maximum**), falls

   $$\max_X f := \max_{x \in X} f(x) := \max f(X)$$

   existiert. Ist $x_0 \in X$ so, dass $f(x_0) = \max_X f$ gilt, das heißt, ist $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in X$, so sagt man, dass f an x_0 maximal wird (oder dass f an x_0 das Maximum annimmt).

2. Man sagt, f wird **minimal** (oder f hat ein **Minimum**), falls

$$\min_X f := \min_{x \in X} f(x) := \min f(X)$$

existiert. Ist $x_0 \in X$ so, dass $f(x_0) = \min\limits_X f$ gilt, das heißt, ist $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in X$, so sagt man, dass f an x_0 minimal wird (oder dass f an x_0 das Minimum annimmt).

Ist $M \subset X$, so sagt man, dass f **maximal auf** M wird, falls $f|_M$ ein Maximum hat. Entsprechend sagt man auch, f wird **minimal auf** M, falls $f|_M$ ein Minimum hat.

Beispiel 6.28 1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ wird wegen $f(x) \geq 0 = f(0)$ minimal. Da $f(X) = [0, \infty)$ nach oben unbeschränkt ist, wird f nicht maximal.
2. Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und stetig, wird aber weder maximal noch minimal (hier ist $\arctan(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$).
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ wird wegen $f(x) \leq 1 = f(0)$ maximal, aber nicht minimal.

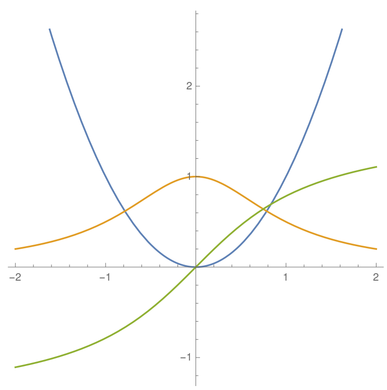


Abbildung 15: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \arctan x$, $x \mapsto 1/(1 + x^2)$.

Bemerkung und Definition 6.29 Es sei $X \subset \mathbb{C}$. Dann heißt X **kompakt**[29], falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X besitzt. Mithilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß kann man zeigen, dass X genau dann kompakt ist,

[29] genauer eigentlich folgenkompakt

wenn X beschränkt ist und $X' \subset X$ gilt ([Ü]). Insbesondere sind etwa Intervalle der Form $[a, b]$ und Mengen

$$B_\rho(a) := \{z \in \mathbb{K} : |x - a| \leq \rho\},$$

wobei $\rho \geq 0$ und $a \in \mathbb{K}$, kompakt. Ist $X \subset \mathbb{R}$, so ist wegen $\sup X \subset X \cup X'$ und $\inf X \subset X \cup X'$ für kompakte X stets $\sup X = \max X$ und $\inf X = \min X$.

Satz 6.30 *Es seien $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ebenfalls kompakt. Ist f reellwertig, so wird f sowohl maximal als auch minimal.*

Beweis. 1. Es sei (y_n) eine Folge in $f(X)$. Wir wählen $x_n \in X$ mit $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, existieren ein $a \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von (x_n) mit $x_n \to a$ $(I \ni n \to \infty)$. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to f(a) \in f(X)$ für $I \ni n \to \infty$.
2. Nach 1. und Bemerkung 6.29 existieren $\max_X f$ und $\min_X f$. □

In speziellen Fällen kann man die Existenz von Maxima oder Minima in nichtkompakten Situationen auf Satz 6.30 zurückführen:

Bemerkung 6.31 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $X = (a, b)$ ein offenes Intervall und existiert ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \to c$ für $x \to a^+$ und $x \to b^-$, so wird f maximal *oder* minimal. Dies gilt auch, falls $X = \mathbb{C}$ ist und $f(z) \to c$ für $|z| \to \infty$ erfüllt ist.[30]

> Denn: Ohne Einschränkung sei f nicht konstant. Dann existiert ein $u \in X$ mit $f(u) \neq c$. Ist $f(u) > c$, so existiert im ersten Fall ein kompaktes Intervall $K \subset (a, b)$ und im zweiten Fall eine Kreisscheibe $K = B_R(0)$ mit $f(u) > f(x)$ für $x \in X \setminus K$. Nach Satz 6.30 wird f maximal auf K. Ist $x_0 \in K$ so, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für $x \in K$, so ist wegen $u \in K$ auch $f(x_0) \geq f(u) \geq f(x)$ für $x \in X \setminus K$. Damit wird f maximal auf X. Ist $f(u) < c$, so wird entsprechend f minimal auf X.

In Bemerkung 6.20 haben wir die Existenz komplexer Wurzeln nachgewiesen. Die Existenz von Wurzeln bedeutet, dass für $d \in \mathbb{N}$ Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $p(z) = z^d - c$ stets Nullstellen besitzen. Wir zeigen nun ganz allgemein:

[30] Für $f : X \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f(x) \to +\infty$ $(|x| \to \infty)$, falls $f(1/u) \to +\infty$ für $u \to 0$.

Satz 6.32 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nichtkonstante Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.

Beweis. Nach Beispiel 4.16 gilt $|p(z)| \to +\infty$ für $|z| \to \infty$ und nach der umgekehrten Dreiecksungleichung ist mit p auch $|p|$ stetig. Also existiert nach Bemerkung 6.31 ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|p(z_0)| \le |p|$. Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann ist insbesondere $p(z_0) \neq 0$. Wir können ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $p(z_0) = 1$ annehmen (sonst betrachte man $p(z + z_0)/p(z_0)$). Dann existieren ein $m \in \{1, \dots, \deg(p)\}$, ein $c_m \neq 0$ und ein Polynom q mit $q(0) = 0$ und

$$p(z) = 1 + c_m z^m + z^m q(z)\,.$$

Nach Bemerkung 6.20 existiert eine m-te Wurzel ζ aus $-|c_m|/c_m$. Damit ist

$$1 + c_m(r\zeta)^m = 1 - r^m|c_m|$$

für $r > 0$. Wählt man $r > 0$ so, dass $r^m \le |c_m|$ und $|\zeta^m q(r\zeta)| < |c_m|$, so folgt

$$|p(r\zeta)| < 1 - r^m|c_m| + r^m|c_m| = 1,$$

im Widerspruch zu $|p| \ge 1$. $\square$

Bemerkung 6.33 Eine äquivalente Formulierung des Fundamentalsatzes ist, dass für jedes nichtkonstante Poylnom p und jedes $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $p(z) = c$ in $\mathbb{C}$ lösbar ist[31]. Mithilfe von Polynomdivision ergibt sich zudem induktiv aus dem Fundamentalsatz ([Ü]): Jedes Polynom p von Grad $d \ge 1$ zerfällt in Linearfaktoren, d. h. es existieren $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = c_d \prod_{k=1}^{d} (z - z_k) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

[31] also $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ gilt

7 Differenzialrechnung

Wir betrachten wieder Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, wobei $X \subset \mathbb{K}$. Um die feinere Struktur des Veränderungsverhaltens solcher Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir einen über die Stetigkeit hinausgehenden Glattheitsbegriff.

Definition 7.1 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{C}$.

1. f heißt **differenzierbar an der Stelle** $a \in X$, falls $a \in X'$ gilt und ein $c \in \mathbb{C}$ so existiert, dass mit $X_a := (X - a) \setminus \{0\}$

   $$X_a \ni h \mapsto \frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a) - hc\big) \in \mathbb{C}$$

   abklingend an 0 ist.[32] In diesem Fall heißt

   $$f'(a) := c = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   Ableitung von f an der Stelle a.

2. f heißt **differenzierbar** (auf X), falls f in jedem Punkt $x \in X$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : X \to \mathbb{C}$ **Ableitung** von f.[33]

Bemerkung 7.2 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X \cap X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$. Ist f differenzierbar an a, so gilt insbesondere

$$f(x) - f(a) = (x - a)(f(x) - f(a))/(x - a) \to 0 \cdot f'(a) = 0 \quad (x \to a).$$

Also ist f stetig an a.

Beispiel 7.3 1. Sind $b, c \in \mathbb{C}$ und $f(z) = cz + b$ für $z \in \mathbb{C}$, so ist $f(z+h) - f(z) = ch$, also f differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = c$. Ist $f(z) := z^2$, so gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \to 2z \quad (h \to 0),$$

also $f'(z) = 2z$.

---

[32] Differenzierbarkeit von f an a bedeutet damit, dass f lokal an a mit einer gewissen Güte durch die affin-lineare Funktion $h \mapsto f(a) + hc$ angenähert werden kann, nämlich so gut, dass der Fehler für $h \to 0$ schneller gegen 0 geht als h.

[33] Weitere Schreibweisen sind etwa Df oder df oder auch (df/dx).

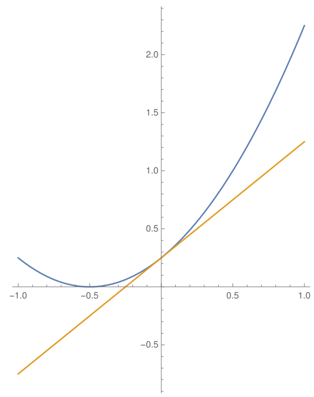


Abbildung 16: $f(1/2+h) = (1/2+h)^2$ und Linearisierung $h \mapsto 1/4+h$ für $f(x) = x^2$

Allgemeiner ergibt sich: Sind $k \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^k$ für $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\frac{(z+h)^k - z^k}{h} = \sum_{j=0}^{k-1} (z+h)^j z^{k-1-j} \to \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1} = kz^{k-1} \quad (h \to 0),$$

also $f'(z) = kz^{k-1}$.
2. Ist $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so gilt $f'(z) = -1/z^2$ ([Ü]).
3. Ist $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist f stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar an der Stelle $a = 0$, da $f(h)/h = 1$ für $h > 0$ und $f(h)/h = -h/h = -1$ für $h < 0$ gilt, und damit $h \mapsto f(h)/h$ keinen (beidseitigen) Grenzwert an 0 hat. Das Beispiel zeigt, dass Stetigkeit an einer Stelle im Allgemeinen *nicht* die Differenzierbarkeit an dieser Stelle impliziert.

Von zentraler Bedeutung für die Analysis ist

Satz 7.4 *Die Funktion* exp *ist differenzierbar auf* $\mathbb{C}$ *mit*

$$\exp' = \exp .$$

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $h \in \mathbb{C}^*$ nach Bemerkung 6.5

$$\frac{1}{h}(e^{a+h} - e^a - he^a) = \frac{e^a}{h}(e^h - 1 - h) = e^a \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{h^{\nu-1}}{\nu!} = e^a \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{h^\mu}{(\mu+1)!} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Also ist $\exp'(a) = \exp(a)$. □

Bemerkung und Definition 7.5 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X \cap X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$. Definiert man die Funktion $\tau_a f : (X - a) \to \mathbb{C}$ durch

$$\tau_a f(h) := (\tau_a f)(h) := f(a+h) - f(a) \qquad (h \in X - a).$$ [34]

so ist $(\tau_a f)(0) = 0$ und f genau dann differenzierbar an a, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\, \tau_a f(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert, also $\tau_a f$ differenzierbar an 0 ist. In diesem Fall ist $f'(a) = (\tau_a f)'(0)$. Man kann sich also bei Bedarf bei der Untersuchung von Ableitungen stets auf den Fall $a = f(a) = 0$ zurückziehen.

Satz 7.6 (Summenregel, Produktregel)
Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $a \in X$. Dann gilt

1. *$f + g$ ist differenzierbar an a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ .$$

2. *$f \cdot g$ ist differenzierbar an a mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)\ .$$

Beweis. Wie man leicht nachrechnet, gilt für $h \in X - a$

$$\tau_a(f+g)(h) = \tau_a f(h) + \tau_a g(h)$$

und

$$\tau_a(f \cdot g)(h) = g(a+h) \cdot \tau_a f(h) + f(a) \cdot \tau_a g(h).$$

Nach Bemerkung 7.2 ist g stetig an a. Damit ergeben sich die Summenregel und die Produktregel jeweils nach Division durch h und Grenzwertbildung für $h \to 0$. □

Beispiel 7.7 Für $f(z) = ze^z$ folgt aus der Produktregel $f'(z) = 1 \cdot e^z + z \cdot e^z = (z+1)e^z$.

[34] Man nennt $\tau_a f$ das Inkrement von f an a.

Satz 7.8 (Kettenregel)
Es seien $X, Y \subset \mathbb{K}$, $f : X \to Y$ und $g : Y \to \mathbb{C}$. Ist f differenzierbar an $a \in X$ und ist g differenzierbar an $f(a)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar an a mit

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a) \,.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $a = 0$ und $f(0) = g(0) = 0$. Ist $\delta(u) := g(u)/u$ für $u \in Y \setminus \{0\}$ und $\delta(0) := g'(0)$, so ist $\delta : Y \to \mathbb{C}$ stetig an 0, da g differenzierbar an 0 ist. Da f stetig an 0 ist, gilt $f(h) \to 0$ für $h \to 0$ und damit $(\delta \circ f)(h) \to g'(0)$ für $h \to 0$ mit Satz 4.22. Aus $f(h)/h \to f'(0)$ für $h \to 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{h}(g \circ f)(h) = \frac{f(h)}{h}(\delta \circ f)(h) \to f'(0)g'(0) \quad (h \to 0)$$

und damit $(g \circ f)'(0) = f'(0)g'(0)$. Sind nun a sowie $f(a)$ und $g(f(a))$ beliebig, so gilt $\tau_a(g \circ f) = \tau_{f(a)} g \circ \tau_a f$ und damit nach dem Spezialfall

$$(\tau_a(g \circ f))'(0) = (\tau_{f(a)} g)'(0)(\tau_a f)'(0) = g'(f(a))f'(a).$$

Also ist $g \circ f$ differenzierbar an a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

Beispiel 7.9 1. Ist $a > 0$ fest und $f(z) := a^z = \exp(z \ln a)$ für $z \in \mathbb{C}$, so folgt aus der Kettenregel

$$f'(z) = \exp'(z \ln a) \ln a = \exp(z \ln a) \ln a = a^z \ln a \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2. Für $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = (z^3 + 2z + 1)^5 \quad (z \in \mathbb{C})$$

gilt $p = g \circ f$ mit $f(z) = z^3 + 2z + 1$ und $g(w) = w^5$. Also ergibt sich aus der Kettenregel

$$p'(z) = g'(f(z))f'(z) = 5(z^3 + 2z + 1)^4(3z^2 + 2) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Bemerkung und Definition 7.10 Die Funktion $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (z \in \mathbb{C})$$

heißt **Kosinus hyperbolicus** und die Funktion $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (z \in \mathbb{C})$$

Sinus hyperbolicus. Aus der Definition der trigonometrischen Funktionen ergibt sich $\cosh(iz) = \cos z$ und $-i \sinh(iz) = \sin z$ für $z \in \mathbb{C}$.[35]

Satz 7.11 *Die hyperbolischen Funktionen* sinh *und* cosh *und die trigonometrischen Funktionen* sin *und* cos *sind differenzierbar auf* $\mathbb{C}$ *mit*

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \sin' = \cos \quad \textit{und} \quad \cos' = -\sin$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ ist mit der Kettenregel

$$\sinh'(z) = \frac{1}{2}(\exp'(z) - (-1)\exp'(-z)) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cosh z\ .$$

Entsprechend ergibt sich $\cosh' = \sinh$. Wieder nach der Kettenregel folgt damit

$$\cos'(z) = i \cosh'(iz) = i \sinh(iz) = -\sin z$$

und entsprechend $\sin'(z) = -i^2 \sinh'(iz) = \cosh(iz) = \cos z$. □

Bemerkung 7.12 (**Quotientenregel**) Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $a \in X$. Ist g nullstellenfrei, so ist f/g differenzierbar an a mit

$$(f/g)'(a) = f'(a)/g(a) - f(a)g'(a)/g^2(a).$$

Denn: Nach Beispiel 7.3 gilt mit $h(w) = 1/w$ für $w \in \mathbb{C}^*$ und der Kettenregel

$$(1/g)'(a) = (h \circ g)'(a) = h'(g(a))g'(a) = -g'(a)/g^2(a).$$

Aus der Produktregel folgt $(f/g)'(a) = f'(a)/g(a) - f(a)g'(a)/g^2(a)$.

[35] $z \mapsto iz$ bewirkt eine Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

Beispiel 7.13 Aus Satz 7.11 und der Quotientenregel folgt auf $\mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2)$

$$\tan' = \sin' / \cos - \sin\cos' / \cos^2 = 1 + \sin^2 / \cos^2 = 1 + \tan^2 .$$

und entsprechend auf $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\cot' = -(1 + \cot^2).$$

Satz 7.14 (Umkehrregel)
Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to Y \subset \mathbb{C}$ bijektiv. Ist f differenzierbar an der Stelle $a \in X$ mit $f'(a) \neq 0$ und ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig an $c := f(a)$, so ist f^{-1} differenzierbar an c mit

$$(f^{-1})'(c) = 1/f'(a) = 1/(f'(f^{-1}(c)) .$$

Beweis. Ist (x_n) eine Folge in X mit $a \neq x_n \to a$ $(n \to \infty)$, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f an a und der Injektivität auch $f(a) \neq f(x_n)$ $(n \to \infty)$. Also ist c ein Häufungspunkt von Y.
Es sei zunächst $a = c = 0$. Dann ist f^{-1} stetig an 0. Also gilt $f^{-1}(u) \to 0$ $(u \to 0)$ und folglich wegen $f^{-1}(u) \neq 0$ für $u \neq 0$

$$\frac{f^{-1}(u)}{u} = \frac{f^{-1}(u)}{f(f^{-1}(u))} \to \frac{1}{f'(0)} \qquad (u \to 0) .$$

Sind a, c beliebig, so gilt $\tau_c f^{-1} = (\tau_a f)^{-1}$ und damit

$$(f^{-1})'(c) = (\tau_c f^{-1})'(0) = 1/(\tau_a f)'(0) = 1/f'(c).$$

□

Bemerkung 7.15 1. Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to Y \subset \mathbb{C}$ so, dass $f' = g \circ f$ mit einer nullstellenfreien Funktion $g : Y \to \mathbb{C}$.[36] Ist f bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion, so gilt nach der Umkehrregel

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}) = 1/g.$$

[36] Gleichungen der Form $f' = g \circ f$ nennt man autonome Differenzialgleichungen.

2. Mit $f(s) := e^s$ für $s \in \mathbb{R}$ und $g(t) := t$ für $t > 0$ und folgt aus 1.

$$\ln'(t) = 1/t \qquad (t > 0)\,.$$

Damit ergibt sich für festes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit der Kettenregel auch die Differenzierbarkeit von $t \mapsto t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$ auf $(0, \infty)$ mit Ableitung

$$t \mapsto \alpha t^{\alpha - 1}.$$

3. Mit $f(s) = \tan(s)$ für $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $g(t) := 1 + t^2$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt nach Beispiel 7.13 und 1.

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Entsprechend erhält man $\operatorname{arccot}'(t) = -1/(1+t^2)$ für $t \in \mathbb{R}$.
4. Es gilt ([Ü])

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,, \qquad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (t \in (-1,1)).$$

Bemerkung 7.16 Sind $X = [0, 2\pi)$ und $f : X \to \mathbb{S}$ mit $f(x) = e^{ix}$, so ist f bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ für alle x. Die Umkehrfunktion ist allerdings an der Stelle 1 nicht stetig ([Ü]) und damit auch nicht differenzierbar. Man sieht also, dass man im Allgemeinen auf die Stetigkeitsvoraussetzung an f^{-1} in Satz 7.14 nicht verzichten kann.

Wir beschäftigen uns nun damit, wie man die Differenzialrechnung nutzen kann, um insbesondere das lokale Verhalten differenzierbarer Funktionen genauer zu untersuchen. Dazu definieren wir, was wir unter Extremstellen verstehen.

Definition 7.17 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Ein Punkt $a \in X$ heißt **Maximalstelle** (von f), falls ein $\delta > 0$ existiert mit

   $$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in U_\delta(a))\,,$$

   falls also $f|_{U_\delta(a)}$ an der Stelle a maximal wird. In diesem Fall nennt man den Funktionswert $f(a)$ ein **lokales Maximum**. Gilt $<$ statt $\leq$ für $x \neq a$, so spricht man von einem **strikten** lokalen Maximum und einer strikten Maximalstelle.

2. Ein Punkt $a \in X$ heißt **Minimalstelle** (von f), falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in U_\delta(a)) \ ,$$

falls also $f|_{U_\delta(a)}$ an der Stelle a minimal wird. Dann heißt $f(a)$ ein **lokales Minimum**. Gilt $>$ statt $\geq$ für $x \neq a$, so spricht man von einem **strikten** lokalen Minimum und einer strikten Minimalstelle.

Ist a eine Maximal- oder eine Minimalstelle von f, so nennt man a auch eine **Extremstelle** von f.

Wir werden sehen, dass die Differenzialrechnung ein effizientes Instrumentarium zur Bestimmung von Extremstellen zur Verfügung stellt. Ist $f : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so nennt man eine Nullstelle von f' auch **kritische Stelle** von f. Ist I ein Intervall, so bezeichnen wir im Weiteren mit I° das entsprechende Intervall ohne die Randpunkte, also $I^\circ = (\inf I, \sup I)$.

Satz 7.18 *Es seien I ein Intervall, $a \in I^\circ$ und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an a. Ist a Extremstelle von f, so ist a eine kritische Stelle, d. h. $f'(a) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei a eine Minimalstelle. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\tau_a f(h) \geq 0$ für $|h| < \delta$. Da f differenzierbar an a ist, gilt

$$0 \leq \lim_{h \to 0^+} (\tau_a f)(h)/h = f'(a) = \lim_{h \to 0^-} (\tau_a f)(h)/h \leq 0,$$

also $f'(a) = 0$. □

Bemerkung 7.19 Kritische Stellen a sind nach Satz 7.18 die einzig *möglichen* Extremstellen differenzierbarer Funktionen in I°. Das Verschwinden von f' an a ist allerdings lediglich eine *notwendige* Bedingung dafür, dass a eine Extremstelle ist. So ist etwa für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ der Nullpunkt eine kritische Stelle, aber keine Extremstelle. Daher nutzt man Satz 7.18 typischerweise dafür, die Extremalität von f an den Punkten a, die nicht kritisch sind, auszuschließen.

Ist a Extremstelle von f und Randpunkt von I (oder f nicht differenzierbar an a), so ist a nicht notwendig eine kritische Stelle. Ist etwa $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$, so wird f maximal an ± 1, aber ± 1 sind keine kritischen Stellen. Hier wird zudem f minimal an 0, aber 0 ist ebenfalls keine kritische Stelle, da f an 0 nicht differenzierbar ist.

Satz 7.20 (Rolle)
Es seien $I = (\alpha, \beta)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Existiert ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \to c$ für $x \to \alpha^+$ und für $x \to \beta^-$, so hat f eine kritische Stelle.

Beweis. Bemerkung 6.31 zeigt, dass f auf (α, β) maximal oder minimal wird. Insbesondere hat f eine Extremstelle und damit nach Satz 7.18 eine kritische Stelle. □

Satz 7.21 *Es seien $I = (\alpha, \beta)$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Existieren $f(\alpha^+)$ und $f(\beta^-)$ sowie $g(\alpha^+)$ und $g(\beta^-)$, so existiert ein $\tau \in (\alpha, \beta)$ mit*

$$(f(\beta^-) - f(\alpha^+))g'(\tau) = f'(\tau)(g(\beta^-) - g(\alpha^+))$$

(**erweiterter Mittelwertsatz**). *Für beschränktes (α, β) ergibt sich mit $g = \mathrm{id}_{(\alpha,\beta)}$ insbesondere*

$$f(\beta^-) - f(\alpha^+) = f'(\tau)(\beta - \alpha)$$

(**Mittelwertsatz**).

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) := \big(f(\beta^-) - f(\alpha^+)\big)g(t) - f(t)\big(g(\beta^-) - g(\alpha^+)\big) \qquad (t \in I).$$

Da $\varphi(\beta^-) = \varphi(\alpha^+) = f(\alpha^+)g(\beta^-) - f(\beta^-)g(\alpha^+)$ gilt, folgt die erste Aussage durch Anwendung des Satzes von Rolle mit φ statt f. □

Satz 7.22 *Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf I°. Ist* $f' \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right\} 0$ *auf I°, so ist* $f \begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \\ \text{konstant} \end{cases}$.
Ist dabei $f' > 0$ beziehungsweise $f' < 0$, so ist die Monotonie streng.

Beweis. Es sei $f' \geq 0$. Sind $s, t \in I$ mit $s < t$, so existiert nach dem Mittelwertsatz (Satz 7.21) ein $\tau \in (s, t)$ mit $f(t) - f(s) = f'(\tau)(t - s) \geq 0$. Also $f(s) \leq f(t)$. Ist dabei $f'(\tau) > 0$, so ist $f(s) < f(t)$.
Die weiteren Aussagen ergeben sich durch Anwendung der obigen auf $-f$ und der Tatsache, dass Funktionen, die wachsend und fallend sind, konstant sein müssen. □

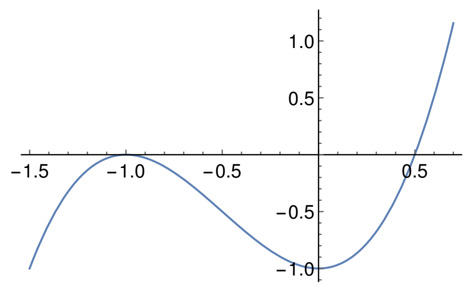


Abbildung 17: Polynom $x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 1$

Beispiel 7.23 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

Dann gilt

$$f'(x) = 6x(x+1) \begin{cases} > 0, & \text{für } x \in (-\infty, -1) \\ < 0, & \text{für } x \in (-1, 0) \\ > 0, & \text{für } x \in (0, \infty) \end{cases} .$$

Nach Satz 7.22 ist f streng wachsend auf $(-\infty, -1]$, streng fallend auf $[-1, 0]$ und streng wachsend auf $[0, \infty)$.

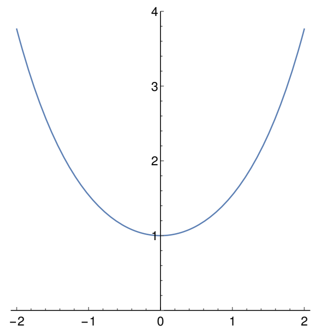


Abbildung 18: cosh auf dem Intervall $[-2, 2]$.

2. Wegen $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\sinh' = \cosh$ ist die Funktion $\sinh|_{\mathbb{R}}$ nach Satz 7.22 streng wachsend. Mit $\sinh(0) = 0$ ist insbesondere $\sinh > 0$ auf $(0, \infty)$ und $\sinh < 0$ auf $(-\infty, 0)$. Wegen $\cosh' = \sinh$ ist $\cosh|_{\mathbb{R}}$ nach Satz 7.22 streng wachsend auf $[0, \infty)$ und streng fallend auf $(-\infty, 0]$.[37]

Der folgende Satz gibt ein *hinreichendes* Kriterium für Extremstellen.

Satz 7.24 (Vorzeichenwechsel-Kriterium)
Es seien I ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf I°. Dann gilt

1. *Existiert ein $\delta > 0$ mit $f' \leq 0$ auf $I \cap (a - \delta, a)$ und $f' \geq 0$ auf $I \cap (a, a + \delta)$ so ist a eine Minimalstelle von f.*

2. *Existiert ein $\delta > 0$ mit $f' \geq 0$ auf $I \cap (a - \delta, a)$ und $f' \leq 0$ auf $I \cap (a, a + \delta)$, so ist a eine Maximalstelle von f.*

Gilt hierbei $f' < 0$ beziehungsweise $f' > 0$, so ist das Extremum strikt.

Beweis. 1. Nach Satz 7.22 ist f wachsend auf $I \cap [a, a+\delta)$ und fallend auf $I \cap (a-\delta, a]$. Damit ist a eine Minimalstelle. Gilt dabei jeweils die strikte Ungleichung, so ist das Minimum strikt.

[37]Sind $a < 0 < b$, so ist der Graph von $\cosh|_{[a,b]}$ eine sogenannte Kettenlinie. Sie beschreibt den Durchhang einer an ihren Enden $(a, \cosh(a))$ und $(b, \cosh(b))$ aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft.

2. Wieder durch Anwendung von 1. auf $-f$. □

Beispiel 7.25 (vgl. Beispiel 7.23) Nach Beispiel 7.23 und Satz 7.24 sind für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ der Nullpunkt eine strikte Minimalstelle und -1 eine strikte Maximalstelle. Für $\cosh|_{\mathbb{R}}$ ist 0 eine strikte Minimalstelle. Hier wird $\cosh|_{\mathbb{R}}$ sogar minimal an 0, d. h. die Funktion nimmt an 0 das Minimum an.

Bemerkung 7.26 Sind (α, β) beschränkt und $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist auch $\mathrm{Re}f$ differenzierbar mit $(\mathrm{Re}f)' = \mathrm{Re}(f')$. Anwendung des Mittelwertsatzes auf $\mathrm{Re}f$ ergibt: Existieren $\mathrm{Re}f(\alpha^+)$ und $\mathrm{Re}f(\beta^-)$, so gibt es ein $\tau \in (\alpha, \beta)$ mit

$$\mathrm{Re}\big(f(\beta^-) - f(\alpha^+)\big) = (\beta - \alpha) \cdot \mathrm{Re}(f')(\tau).$$

Es seien V ein Vektorraum[38] und $u, v \in V$. Wir definieren $s_u^v : [0,1] \to V$ durch $s_u^v(t) := u + t(v-u)$ für $t \in [0,1]$ und nennen s_u^v **orientierte Strecke** von u nach v. Außerdem setzen wir

$$[u,v] := s_u^v([0,1]) = \{u + t(v-u) : t \in [0,1]\}$$

und

$$(u,v) := s_u^v((0,1)) = \{u + t(v-u) : t \in (0,1)\}.$$

Eine Menge $X \subset V$ heißt **sternförmig bezüglich** $a \in X$, falls

$$X = \bigcup_{x \in X} [a,x]$$

gilt, und kurz **sternförmig**, falls sie sternförmig bezüglich eines Punktes a ist. Die Menge X heißt **konvex**, falls sie sternförmig bezüglich aller Punkte $a \in X$ ist, also falls $[a,x] \subset X$ für alle $a, x \in X$ gilt. Eine nichtleere Menge in $\mathbb{R}$ ist genau dann sternförmig, wenn sie konvex ist, und dies gilt genau dann, wenn sie ein Intervall ist.

Satz 7.27 (Schrankensatz)
Es seien $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)| \cdot |b-a|\ .$$

[38] Für den Begriff eines Vektorraumes verweisen wir auf die lineare Algebra.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $c := f(b) - f(a) > 0$ annehmen (ist $c = 0$, so ist die Behauptung kar; ist $c \neq 0$, so kann man statt f die Funktion $(\overline{c}/|c|)f$ betrachten).
Ist $s(t) := a + t(b-a) = s_a^b(t)$ für $t \in [0,1]$, so gilt $(f \circ s)' = (f' \circ s) \cdot (b-a)$ auf $(0,1)$ nach der Kettenregel. Mit Bemerkung 7.26, angewandt auf $f \circ s$ mit $I = (0,1)$, folgt die Existenz eines $\tau \in (0,1)$ so, dass

$$c = \mathrm{Re}\big((f \circ s)(1) - (f \circ s)(0)\big) = \mathrm{Re}(f'(s(\tau)) \cdot (b-a)) \leq |f'(s(\tau))| \cdot |b-a|.$$

Mit $\xi := s(\tau) = a + \tau(b-a) \in (a,b)$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

Bemerkung 7.28 Als wichtige Folgerung aus dem Schrankensatz ergibt sich: Ist $X \subset \mathbb{K}$ sternförmig und ist $f : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' = 0$, so ist f konstant.

Eine elegante Methode für die mögliche Berechnung von Grenzwerten erhält man durch Anwendung des erweiterten Mittelwertsatzes:

Satz 7.29 (Regeln von de l'Hospital)
Es seien $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f(\alpha^+) = g(\alpha^+) = 0 \quad \text{oder} \quad g(x) \to \pm\infty \quad (x \to \alpha).$$

Hat g keine kritischen Punkte und gilt

$$f'(t)/g'(t) \to c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad (t \to \alpha),$$

so folgt

$$f(x)/g(x) \to c \qquad (x \to \alpha)\ .$$

Eine entsprechende Aussage gilt für Grenzwerte $x \to \beta$.

Beweis. 1. Es gelte $f(\alpha^+) = g(\alpha^+) = 0$. Ist $x \in I$, so ist nach dem Satz von Rolle $g(x) - g(\alpha^+) \neq 0$, da g keine kritischen Punkte hat. Nach dem erweiterten Mittelwertsatz (Satz 7.21) existiert ein $\tau(x) \in (\alpha, x)$ mit

$$\frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))} = \frac{f(x) - f(\alpha^+)}{g(x) - g(\alpha^+)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dabei gilt $\alpha < \tau(x) \to \alpha$ $(x \to \alpha)$. Also folgt

$$\frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))} \to c \quad (x \to \alpha).$$

2. Es gelte $g(x) \to \infty$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(t) > 0$ und $f'(t)/g'(t) \in U_\varepsilon(c)$ für $t \in U_\delta(\alpha)$.[39] Wir wählen ein $a \in U_\delta(\alpha)$. Ist $\alpha < x < a$, so existiert, wieder nach dem erweitertem Mittelwerstz (7.21), ein $\tau(x) \in (x, a)$ mit

$$f'(\tau(x))(g(a) - g(x)) = (f(a) - f(x))g'(\tau(x)) ,$$

also

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))}(g(x) - g(a))$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(x)} + \frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))}\left(1 - \frac{g(a)}{g(x)}\right) .$$

Nach Voraussetzung gilt $f(a)/g(x) \to 0$ und $g(a)/g(x) \to 0$ $(x \to \alpha^+)$. Da

$$f'(\tau(x))/g'(\tau(x)) \in U_\varepsilon(c)$$

gilt, existiert ein $\eta > 0$ mit $f(x)/g(x) \in U_{2\varepsilon}(c)$ für $x \in U_\eta(\alpha)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

3. Gilt $g(x) \to -\infty$, so folgt $-g(x) \to \infty$ und damit die Behauptung aus 2. $\square$

Beispiel 7.30 Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0,$$

das heißt, die Logarithmusfunktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $x \mapsto x^\alpha$ mit positivem α. Dies ist eine Variante der Aussage, dass exponentielles Wachstum stärker ist als polynomiales.

> Denn: Mit $f(x) = \ln x$ und $g(x) = x^\alpha$ für $x > 0$ gilt $x^\alpha \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und
>
> $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$
>
> Also folgt die erste Behauptung mit Satz 7.29. Die zweite ergibt sich aus der ersten durch Ersetzen von x durch $1/x$.

[39] Dabei ist $U_\rho(\pm\infty) := \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 1/\rho\}$.

Bemerkung und Definition 7.31 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ mit $X \subset X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$.
1. Mit $f^{(0)} := f$ definiert man höhere Ableitungen rekursiv: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $f^{(n-1)}$ differenzierbar, so heißt f **n-mal differenzierbar** und die Funktion

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' : X \to \mathbb{C}$$

die **n-te Ableitung** von f. Dabei schreibt man meist $f'' := f^{(2)}$ und $f''' := f^{(3)}$. Ist $f^{(n)}$ stetig, so sagt man, f sei n-mal **stetig differenzierbar** und existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so sagt man, f sei beliebig oft differenzierbar.
2. Im Fall $X \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $C^n(X)$ für die Menge aller n-mal stetig diffenzierbaren Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$, und $C^\infty(X) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C^n(X)$. Damit haben wir die Inklusionskette $C^\infty(X) \subset C^{n+1}(X) \subset C^n(X) \subset C^0(X) = C(X)$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei sämtliche Inklusionen strikt sind ([Ü]).

Ein weiteres *hinreichendes* Kriterium für Extremstellen ist

Satz 7.32 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $a \in I$ eine kritische Stelle.*

1. *Gilt $f''(a) > 0$, so ist a eine strikte Minimalstelle.*
2. *Gilt $f''(a) < 0$, so ist a eine strikte Maximalstelle.*

Beweis. 1. Da f'' stetig an a ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap I$. Damit ist f' nach Satz 7.22 streng wachsend auf $U_\delta(a) \cap I$. Aus $f'(a) = 0$ folgt $f' > 0$ auf $I \cap (a, a+\delta)$ und $f' < 0$ auf $I \cap (a-\delta, a)$. Nach dem Vorzeichenwechsel-Kriterium (Satz 7.24) hat f an a ein striktes lokales Minimum.
2. Ergibt sich aus 1. durch Anwendung auf $-f$. □

Beispiel 7.33 Wir betrachten noch einmal die Funktionen aus Beispiel 7.23 und Beispiel 7.25. Für $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ gilt $f''(x) = 12x + 6$, also $f''(0) = 6 > 0$ an der kritischen Stelle 0 und $f''(-1) = -6 < 0$ an der kritischen Stelle -1. Nach Satz 7.32 ist 0 eine strikte Minimalstelle und -1 eine strikte Maximalstelle. Da $\cosh'' = \cosh > 0$ auf $\mathbb{R}$ gilt, ist die kritische Stelle 0 von $\cosh|_{\mathbb{R}}$ eine strikte Mimimalstelle.

8 Abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass in gewissem Sinne die Mehrheit der reellen Zahlen aus irrationalen Zahlen besteht. Dazu führen wir zunächst die Begriffe der Abzählbarkeit und der Überabzählbarkeit von Mengen ein.

Definition 8.1 Es sei A eine Menge.

1. A heißt **abzählbar unendlich**, falls A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, das heißt, falls eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$ und $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. A heißt **abzählbar**, falls A endlich oder abzählbar unendlich ist. Andernfalls heißt A **überabzählbar** .

Satz 8.2 *Eine nichtleere Menge A ist genau dann abzählbar, wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. $\Rightarrow$: Ist A abzählbar unendlich, so existiert eine solche Folge nach Definition. Ist A endlich, etwa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, so setze man $a_j := a_n$ für $j > n$.
$\Leftarrow$: Ist A endlich, so ist A abzählbar. Es sei also $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich. Wir setzen $n_1 := 1$. Sind $n_1, \ldots, n_k$ bereits definiert, so existiert

$$n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin \{a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}\}\}.$$

Setzt man $b_k := a_{n_k}$, so ist nach Konstruktion $b_j \neq b_k$ für $j \neq k$ und $\{b_k : k \in \mathbb{N}\} = A$. Also ist A abzählbar unendlich. □

Bemerkung 8.3 Aus Satz 8.2 folgt sofort, dass Bilder abzählbarer Mengen unter beliebigen Abbildungen wieder abzählbar sind und damit auch, dass Teilmengen abzählbarer Mengen abzählbar sind.

Satz 8.4 *Es sei $J \neq \varnothing$ abzählbar. Ist $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abzählbarer Mengen, so ist auch $\bigcup_{j\in J} A_j$ abzählbar.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $A_j \neq \varnothing$ für alle $j \in J$ annehmen. Nach Satz 8.2 existiert zu jedem $j \in J$ eine Folge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_j = \{a_{n,j} : n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem existiert eine Folge (j_k) mit $J = \{j_k : k \in \mathbb{N}\}$. Wir setzen

$$B_m := \{a_{n,j_k} : k, n = 1, \ldots, m\} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Da $\#(B_m) \leq m^2$ und $B_m \subset B_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich induktiv die Existenz einer Folge $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $B_m = \{b_1, \ldots, b_{m^2}\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m = \{b_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Mit Satz 8.2 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 8.5 Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $\mathbb{Z} \ni j \mapsto (j, n) \in \mathbb{Z} \times \{n\}$ bijektiv. Da $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}_0)$ abzählbar ist, ist damit $\mathbb{Z} \times \{n\}$ abzählbar. Also ist nach Satz 8.4 auch

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \big(\mathbb{Z} \times \{n\}\big)$$

abzählbar. Nach Bemerkung 8.3 ist schließlich auch $\mathbb{Q}$ abzählbar, denn es gilt $\mathbb{Q} = \varphi(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ für $\varphi(a, b) := a/b$.

Mithilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens ([Ü]) kann man zeigen, dass die Menge der 0-1-Folgen, also $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist. In Hinblick auf die Tatsache, dass jede reelle Zahl eine Binärentwicklung hat (siehe Anhang A) ergibt sich daraus auch die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. Wir zeigen allgemeiner die Überabzählbarkeit einer gewissen Klasse von Mengen in $\mathbb{K}$.

Bemerkung und Definition 8.6 1. Eine nichtleere Menge $X \subset \mathbb{K}$ heißt **perfekt**, falls $X' = X$ gilt. Insbesondere sind etwa Intervalle $[a, b]$ mit $a \neq b$ perfekt. Es gibt perfekte Mengen in $\mathbb{R}$, die kein Intervall (mit mehr als zwei Punkten) enthalten. Ein typisches Beispiel ist die Cantor-Menge[40].

2. $X \subset \mathbb{K}$ heißt lokal überabzählbar, falls $U_{\delta,X}(a)$ überabzählbar ist für alle $a \in X$ und $\delta > 0$.

[40] siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge

Satz 8.7 *Ist $X \subset \mathbb{K}$ perfekt, so ist X lokal überabzählbar.*

Beweis. Es seien $a \in X$ und $\delta > 0$ gegeben. Angenommen $U := U_{\delta,X}(a)$ ist abzählbar, also $U = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir setzen

$$U_N := U \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}.$$

Ist $x \in U$, so ist x Häufungspukt von U und damit auch Häufungspunkt von U_N für jedes $N \in \mathbb{N}$.
Wir definieren induktiv eine Cauchy-Folge in U. Dazu sei $x_1 \in U_1$ und $0 < \delta_1 < 1$ mit $B_{\delta_1}(x_1) \cap X \subset U_1$. Damit wählen wir $x_2 \in U_2$ und $0 < \delta_2 < 1/2$ mit $B_{\delta_2}(x_2) \cap X \subset U_{\delta_1}(x_1) \cap U_2$. Allgemein wählen wir $x_n \in U_n$ und $0 < \delta_n < 1/n$ mit $B_{\delta_n}(x_n) \cap X \subset U_{\delta_{n-1}}(x_{n-1}) \cap U_n$. Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $U \subset X$ (da $|x_n - x_N| < \delta_N < 1/N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $n > N$). Nach dem Cauchy-Kriterium existiert ein $c \in X$ mit $x_n \to c$ $(n \to \infty)$. Wegen $|x_n - x_N| < \delta_N$ für $n > N$ ist $|c - x_N| \leq \delta_N$, also $c \in U_N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Damit ist $c \neq a_n$ für alle n. Widerspruch. □

Bemerkung 8.8 Ist X überabzählbar und ist A abzählbar, so ist auch $X \setminus A$ überabzählbar, denn andernfalls wäre nach Bemerkung 8.3 und Satz 8.4 auch

$$X = (X \cap A) \cup (X \setminus A)$$

abzählbar. Insbesondere ist also nach Bemerkung 8.5 und Satz 8.7 für jedes nicht einpunktige Intervall I die Menge $I \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar; die irrationalen Zahlen bilden die überwältigende Mehrheit innerhalb der reellen Zahlen.

A Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

In diesem Anhang werden wir auf die axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen eingehen und einen darauf basierenden konstruktiven Zugang über die ganzen und die rationalen Zahlen zu den reellen *skizzieren.* Mit Ausnahme des Begriffes einer Äquivalenzrelation werden wir im Weiteren nicht explizit auf die hier eingeführten Konzepte zurückgreifen.
Die **natürlichen Zahlen** können axiomatisch beschrieben werden als Tripel $(\mathbb{N}, 1, \nu)$ mit den drei Eigenschaften (**Peano-Axiome**):

(N1) $\mathbb{N}$ ist eine Menge mit $1 \in \mathbb{N}$.

(N2) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine injektive Funktion mit $1 \notin \nu(\mathbb{N})$.

(N3) (Prinzip der vollständigen Induktion) Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in A$ und $\nu(A) \subset A$, so ist $A = \mathbb{N}$.

Die Zahl $\nu(n)$ nennt man Nachfolger von n. Damit kann man die arabischen Ziffern definieren durch $2 := \nu(1)$, $3 := \nu(2)$, $4 := \nu(3)$, $5 := \nu(4)$, $6 := \nu(5)$, $7 := \nu(6)$, $8 := \nu(7)$ und $9 := \nu(8)$. Weiter kann man (mit viel Aufwand) zeigen:
Auf $\mathbb{N}$ ist durch $n+1 := \nu(n)$ und $n+\nu(m) := \nu(n+m)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung $+$ rekursiv definiert. Unter Verwendung der Addition ist durch $n < m$ (definitionsgemäß) genau dann, wenn $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ zudem eine Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{N}$ gegeben. Weiter kann man damit zeigen: Auf $\mathbb{N}$ existiert eine assoziative und kommutative Verknüpfung $\cdot$, die rekursiv definiert ist durch $n \cdot 1 := 1$ und $n(m+1) := nm + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Erweitert man $\mathbb{N}$ um ein Element 0 zu $\mathbb{N}_0$ mit $0 < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so, dass $n + 0 := 0 + n := n$ und $n \cdot 0 := 0 \cdot n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so sind $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ und $(\mathbb{N}_0, \cdot, 1)$ abelsche Monoide mit den **Kürzungsregeln**

$$n + m = n + k \;\Rightarrow\; m = k \quad \text{und} \quad n \cdot m = n \cdot k,\, n \neq 0 \;\Rightarrow\; m = k\ .$$

Schließlich folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion die wichtige **Wohlordnungseigenschaft** von $\mathbb{N}$: *Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein Minimum.*
Hiermit kann man leicht zeigen: Zu jedem Paar $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert genau ein Paar $(a, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $r < p$ und $n = ap + r$ (Division mit Rest).
Ist $(M, +, 0)$ ein abelsches Monoid, so definieren wir für nicht notwendig endliche Indexmengen I und nichtleere Mengen $A \subset M$

$$A^{(I)} := \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in A^I : I_x := \{\alpha \in I : x_\alpha \neq 0\} \text{ endlich}\}$$

sowie

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha := \sum_{\alpha\in I_x} x_\alpha \quad (x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in M^{(I)}).$$

Damit gilt folgende wichtige Aussage über die *Darstellung* natürlicher Zahlen:

Satz A.1 *Es seien $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ und $A := \{a \in \mathbb{N}_0 : a < q\}$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein Tupel $a(n) = (a_j(n))_{j\in\mathbb{N}_0} \in A^{(\mathbb{N}_0)}$ mit*

$$n \;=\; \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j(n)q^j.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Bemerkung 2.8. Wir zeigen die Existenz per Induktion nach n.
1. Induktionsanfang $n = 0$: Man setze $a_j(0) := 0$ für $j \in \mathbb{N}_0$.
2. Induktionsschritt: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $q^k \leq n < q^{k+1}$. Division mit Rest ergibt

$$n = aq^k + n'$$

mit $0 < a < q$ und $0 \leq n' < q^k$, also insbesondere $n' < n$.
Nach Induktionsvoraussetzung (die Behauptung gilt für jedes $n' < n$) existiert eine Folge $\big(a_j(n')\big)$ mit

$$n' = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j(n')q^j.$$

Dabei ist $a_j(n') = 0$ für $j \geq k$, da $n' < q^k$. Setzt man

$$a_j(n) := \begin{cases} a_j(n') & \text{für } j \neq k \\ a & \text{für } j = k \end{cases},$$

so ist

$$n = aq^k + n' = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j(n)q^j.$$

□

Mit $d := d(n) := \max\{j \in \mathbb{N}_0 : a_j(n) \neq 0\}$ für $n \neq 0$ heißt $(a_d(n)a_{d-1}(n)\ldots a_0(n))_q$ die **q-adische Darstellung** von n. Die Zahlen $0, \ldots, q-1$ sind die Ziffern bezüglich q. Im

Falle $q = 2$ spricht man dann von der **Binärdarstellung**, im Falle $q = 2{\cdot}5$ von der **Dezimaldarstellung** und im Falle $q = 2^4$ von der **Hexadezimaldarstellung**.[41] Schließlich schreibt man im Dezimalfall auch kurz $a_d(n) \dots a_0(n)$ statt $(a_d(n) \dots a_0(n))_{2\cdot 5}$. So ist etwa für $n = 8 + 8 + 7$

$$n = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10111)_2$$

und

$$n = 2 \cdot (2 \cdot 5)^1 + 3 \cdot (2 \cdot 5)^0 = (23)_{2\cdot 5} = 23\ .$$

Definition A.2 Eine Relation $\sim$ in X heißt **Äquivalenzrelation** (auf X), falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(A1) $x \sim x$ (Reflexivität),

(A2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (Symmetrie),

(A3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (Transitivität).

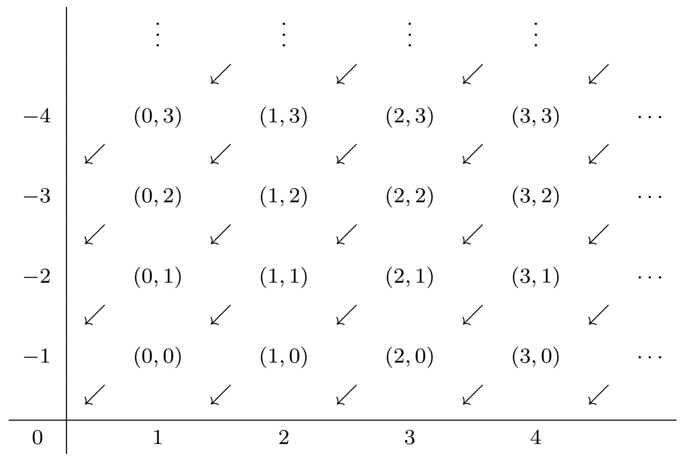
Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, so heißt $[x] := [x]_\sim := \{x' \in X : x \sim x'\}$ die von x erzeugte **Äquivalenzklasse** und jedes $x \in [x]$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $[x]$. Außerdem heißt $X/_\sim := \big\{[x] : x \in X\big\}$ **Quotientenmenge** von X (**modulo** $\sim$).

Bemerkung und Definition A.3 1. Es sei $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Definiert man

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a + d = b + c,$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.

[41] Die Schreibweise $q = 2 \cdot 5$ beziehungsweise $q = 2^4$ mag umständlich erscheinen, ist aber nicht durch $q = 10$ beziehungsweise $q = 16$ ersetzbar, da dies schon die zu definierende Dezimaldarstellung vorwegnehmen würde.



Sind $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a \geq b$, so existiert (genau) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a = b + n$ und es gilt damit

$$[(a, b)] = \{(n + k, k) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(n, 0)] \ .$$

Ist $a < b$, so ist $b = a + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und damit

$$[(a, b)] = \{(k, k + m) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(0, m)].$$

Definiert man die Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen** als

$$\mathbb{Z} := X/_\sim = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/_\sim \ ,$$

so sind durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ (unabhängig von der Wahl der jeweiligen Repräsentanten) definiert, mit denen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem kommutativen Ring wird. Dabei gilt $[(0, n)] = -[(n, 0)]$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Indem man n mit $[(n, 0)]$ identifiziert, ist $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{Z}$ eingebettet, und es ergibt sich

$$[(a, b)] = a - b \quad (a, b \in \mathbb{N}_0).$$

Außerdem ist damit durch

$$a - b < c - d :\Leftrightarrow a + d < b + c$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ eine Erweiterung der Ordnung $<$ von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Bemerkung und Definition A.4 Es sei $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Definiert man

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad ad = bc,$$

für $(a, b), (c, d) \in X$, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Man kann zeigen: Für $(a, b) \in X$ existieren teilerfremde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit

$$[(a, b)] = \{(mp, mq) : m \in \mathbb{Z}\} = [(p, q)].$$

Definiert man die Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen** als

$$\mathbb{Q} := X/_\sim = \big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\big)/_\sim$$

und Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + cb, bd)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

so wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zu einem Körper. Dabei gilt $1/[(a, b)] = [(b, a)]$ für $a \neq 0$. Durch Identifikation von a und $[(a, 1)]$ ist wieder $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ eingebettet und es gilt

$$[(a, b)] = a/b \quad ((a, b) \in X).$$

Schließlich erweitert die Definition

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad < bc$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}$ (also $b, d > 0$) die Ordnung $<$ von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$.

Bemerkung und Definition A.5 Es seien $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ und $A := \{0, 1, \ldots, q - 1\}$. Wir betrachten die Menge

$$A^{\mathbb{Z})} := \{(a_j) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} : \text{es existiert ein } d \in \mathbb{Z} \text{ mit } a_j = 0 \text{ für } j > d\}.$$

Ein Tupel $(a_j) \in A^{\mathbb{Z})}$ nennen wir eine **q-adische Entwicklung**. Im Falle $q = 2$ sprechen wir von **Binärentwicklung** und im Falle $q = 10$ von **Dezimalentwicklung**. Die q-adische Entwicklung (a_j) heißt **abbrechend**, falls $(a_j) \in A^{(\mathbb{Z})}$ gilt, also falls ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert mit $a_j = 0$ für $j < m$. Aus Satz A.1 folgt, dass die Abbildung

$$A^{(\mathbb{Z})} \ni (a_j) \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j q^j \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} q^m \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$$

bijektiv ist. Wir identifizieren im Weiteren die abbrechende Entwicklung (a_j) mit der entsprechenden rationalen Zahl. Da sowohl die Addition als auch die Multiplikation Verknüpfungen auf $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} q^m\mathbb{N}_0$ sind, können wir damit abbrechende Entwicklungen addieren und multiplizieren.
Weiter definieren wir auf $A^{\mathbb{Z})}$ eine Äquivalenzrelation durch $(a_j) \sim (b_j)$ genau dann, wenn $(a_j) = (b_j)$ oder wenn ein $m \in \mathbb{Z}$ so existiert, dass $a_j = b_j$ für $j > m$, $a_m = b_m + 1$ sowie $a_j = 0$ und $b_j = q - 1$ für $j < m$ (oder entsprechend mit vertauschten Rollen von a_j und b_j). Damit sind alle Äquivalenzklassen entweder ein- oder zweielementig, wobei im zweielementigen Fall eine der beiden Entwicklungen abbrechend ist.

Bemerkung A.6 Wir betrachten nun den Fall $q = 2$ und definieren

$$X := \{x = [(a_j)] : (a_j) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z})}\}.$$

Wählt man im Fall zweielementiger $[(a_j)]$ die abbrechende Entwicklung als Repräsentant, so entspricht jedem $x \in X$ genau eine Binärentwicklung (a_j). Wenn nichts anderes gesagt ist, legen wir uns auf diese Darstellung fest und schreiben dann auch $x = (a_j)$. Ist $x = (a_j)$ (in diesem Sinne), so nennen wir für $m \in \mathbb{Z}$

$$\lfloor x \rfloor_m := \sum_{j \geq m} a_j 2^j \in 2^m\mathbb{N}_0$$

die m-te Abschneidung von x. Unter Verwendung der Relation $<$ auf $\mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ definieren wir für $x, y \in X$ mit $x \neq y$

$$x < y :\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor_m < \lfloor y \rfloor_m \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}.$$

Aus Bemerkung 2.8 und $\lfloor x \rfloor_k \leq \lfloor y \rfloor_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ergibt sich auch $\lfloor x \rfloor_n < \lfloor y \rfloor_n$ für $n \leq m$. Man kann zeigen, dass damit $(X, <)$ geordnet und *vollständig* ist.
Wir wollen den Beweis der Vollständigkeit andeuten, indem wir eine Konstruktionsvorschrift für $\sup M$ angeben. Es sei also $M \subset X$ nichtleer und nach oben beschränkt. Wir definieren ein $s \in X$ rekursiv: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $M \neq \{0\}$ ist. Zunächst folgt aus der Beschränktheit nach oben von M die Beschränktheit nach oben von

$$\{m \in \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor_m \neq 0 \text{ für ein } x \in M\}$$

in $\mathbb{Z}$. Ist d das Maximum dieser Menge, so setzen wir $\xi_d := 1$ und $\xi_j := 0$ $(j > d)$. Weiter definieren wir

$$\xi_{d-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-1} > 2^d \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend für $n \in \mathbb{N}$

$$\xi_{d-n-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-n-1} > 2^d + \xi_{d-1}2^{d-1} + \ldots + \xi_{d-n}2^{d-n} \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Hierdurch ist induktiv eine Binärentwicklung $(\xi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ definiert. Ist $s := [(\xi_j)]$, so ergibt sich $s = \sup M$ aus der Konstruktion von s.

Damit wird es ermöglicht, die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von $A^{(\mathbb{Z})}$ auf X zu erweitern: Da $(X, <)$ vollständig ist, existieren nämlich für $x, y \in X$

$$x + y := \sup\left\{ \lfloor x \rfloor_m + \lfloor y \rfloor_m : m \in \mathbb{Z} \right\} \in X$$

und

$$x \cdot y := \sup\left\{ \lfloor x \rfloor_m \cdot \lfloor y \rfloor_m : m \in \mathbb{Z} \right\} \in X.$$

Das Hauptproblem besteht nun darin, zu zeigen, dass $(X, +, 0)$ ein Monoid und $(X \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist. Ist dies getan, so sieht man wie bei der Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{Z}$, dass durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a + d = b + c$$

für $(a, b), (c, d) \in X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf $X \times X$ definiert ist. Damit setzt man $\mathbb{R} := (X \times X)/_\sim$ und schreibt wieder $a - b$ statt $[(a, b)]$ und im Falle $b = 0$ kurz a sowie im Falle $a = 0$ kurz $-b$. Die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ sowie die Relation $<$ lassen sich auf $\mathbb{R}$ übertragen, und zwar so, dass damit $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ein vollständig geordneter Körper wird.[42] Dabei ist $\mathbb{Q}$ monoton eingebettet in $\mathbb{R}$, das heißt, es existiert eine injektive Abbildung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ so, dass $j(x + y) = j(x) + j(y)$ und $j(xy) = j(x)j(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt und dass $j(x) < j(y)$ genau dann gilt, wenn $x < y$ ist. Indem man $j(x)$ mit x identifiziert, kann man $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. Man kann zeigen, dass in diesem Sinne den rationalen Zahlen die sogenannten periodischen Binärentwicklungen entsprechen.

[42] In der Literatur findet man neben axiomatischen Zugängen oft den konstruktiven Zugang über *Dedekindsche Schnitte*. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in einer einfacheren Definition des Supremums und einem weniger aufwändigen Nachweis der Körperaxiome, allerdings sind die dabei betrachteten Objekte, die am Ende als reelle Zahlen bezeichnet werden, weniger instruktiv als die oben eingeführten Binärentwicklungen. Außerdem knüpft die Vorstellung einer reellen Zahl als Binärentwicklung meist an die Vorkenntnisse aus der Schule an und deutet zudem Problematiken der Gleitkommaarithmetik und der Struktur der Maschinenzahlen an.

Index