Jürgen Müller

Dynamische Systeme

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2023

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Contents

1 Grundbegriffe und grundlegende Ergebnisse

Oft sind Folgen rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = f(x_n)\,,$$

wobei X eine Menge, $f : X \to X$ und x_0 ein Startwert sind. So ist etwa im Falle des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ohne kritische Punkte $x_{n+1} = f(x_n)$ mit

$$f(x) = x - g(x)/g'(x) \qquad (x \in \mathbb{K})\,.$$

Also ist $x_n = f^{\circ n}(x_0)$, wobei $f^{\circ n}$ die n-fache Iterierte von f ist. Mit der Komposition $\circ$ ist $\mathrm{Abb}(X) := \mathrm{Abb}(X, X)$ ein Monoid. Wir schreiben im Weiteren kurz

$$f^n := f^{\circ n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

also insbesondere $f^0 = \mathrm{id}_X$ und $f^1 = f$. Mit $f_n := f^n$ ergibt sich für $k, m \in \mathbb{N}_0$

$$f^{k+m} = f^k \circ f^m = f_k \circ f_m\,.$$

Allgemein werden dynamische Systeme über eine entsprechende Eigenschaft definiert:

Definition 1.1 Es seien $T \subset \mathbb{R}$ ein Monoid bzgl. der Addition in $\mathbb{R}$[1] und (X, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $(f_t)_{t\in T}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_t : X \to X$. Dann heißt $F := (f_t)_{t\in T}$ ein **dynamisches System**[2], falls $f_0 = \mathrm{id}_X$ und

$$f_{t+s} = f_t \circ f_s \qquad (s, t \in T) \tag{1.1}$$

gilt. Für $T \subset \mathbb{Z}$ spricht man von einem **diskreten** System und im Fall von Intervallen T von einem **kontinuierlichen** System. Weiterhin setzen wir für $A \subset X$

$$O(A) := O^+(A) := O^+(F, A) := \bigcup_{t\geq 0} f_t(A).$$

Für $x \in X$ heißt damit

$$O(x) := O^+(x) := O^+(F, x) := O(F, \{x\}) = \{f_t(x) : t \geq 0\}$$

Vorwärtsorbit und im Fall $T \subset [0, \infty)$ kurz **Orbit** von x.

Beispiel 1.2 Es seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f_t : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definiert durch $f_t(x) := xe^{\lambda t}$ für $x \in \mathbb{K}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist die Familie $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ wegen $f_0(x) = x$ und

$$f_{t+s}(x) = xe^{\lambda(t+s)} = xe^{\lambda s}e^{\lambda t} = (f_t \circ f_s)(x) \qquad (s, t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{K})$$

ein kontinuierliches dynamisches System. Ist $x > 0$, so wächst $f_t(x)$ im Fall $\lambda > 0$ für $t \to \infty$ mit exponentieller Rate und klingt im Fall $\lambda < 0$ mit exponentieller Rate ab. Außerdem ist $O(x) = [x, \infty)$ für $\lambda > 0$ und $O(x) = (0, x]$ für $\lambda < 0$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\lambda = i$ ist $O(x)$ der Kreis mit Radius $|x|$ in $\mathbb{C}$.

[1] Man denke dabei an $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $[0, \infty)$ oder $(-\infty, \infty)$, bei uns ist meist $T = \mathbb{N}_0$.

[2] genauer ein stetiges dynamisches System

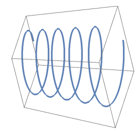

Figure 1: $f_t(1) = e^{it}$ für $t \in [0, 10\pi]$.

Bemerkung 1.3 Im Fall $T = \mathbb{N}_0$ ergibt sich mit $f := f_1$ aus (1.1) induktiv $f_n = f^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in diesem Falle vollständig durch $f = f_1$ beschrieben ist, spricht man auch kurz vom dynamischen System $f = (f, X)$. Jede stetige Selbstabbildung $f : X \to X$ definiert umgekehrt vermittels $f_n := f^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ein dynamisches System mit $T = \mathbb{N}_0$. Wir schreiben dann auch $O(f, A)$ statt $O(F, A)$.

Wir werden uns in der Vorlesung im Wesentlichen auf den Fall $T = \mathbb{N}_0$ beschränken und wollen uns insbesondere mit der Frage des Langzeitverhaltens eines dynamisches System befassen, d. h. mit der Frage, wie sich f^n für $n \to \infty$ verhält.

Bemerkung und Definition 1.4 Es sei (f, X) ein diskretes System. Einfach und wichtig ist folgende Tatsache: Ist $x \in X$ so, dass $(f^n(x))_n$ konvergiert, so gilt für den Grenzwert p wegen der Stetigkeit von f

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = p.$$

Also ist p ein Fixpunkt von f. Ein Fixpunkt p heißt **attraktiv**, falls der **Attraktionsbereich**

$$I(p) := \{x \in X : f^n(x) \to p\,(n \to \infty)\}$$

von p eine Umgebung von p ist, falls also ein $\delta > 0$ so existiert, dass $(f^n(x))_n$ für alle $x \in U_\delta(p)$[3] gegen p konvergiert.

Beispiel 1.5 (lineare Systeme) Es seien $(E, |\cdot|)$ ein normierter Raum und $f : E \to E$ linear und stetig. Dann ist $p = 0$ Fixpunkt von f. Im Fall $\|f\| < 1$[4] gilt wegen der Submultiplikativität der Operatornorm $I(0) = E$, d. h. der Fixpunkt 0 ist sogar global attraktiv mit

$$|f^n(x)| \le \|f^n\|\,|x| \le \|f\|^n |x| \qquad (x \in E,\, n \in \mathbb{N}_0).$$

Also konvergiert $(f^n(x))$ mit geometrischer Geschwindigkeit gegen 0. Ist hingegen $E = \mathbb{K}$ und $f(x) = ax$ mit $\lambda = |a| > 1$, so „explodiert“ $f^n(x)$ für alle $x \neq 0$ in dem Sinne, dass $|f^n(x)| = \lambda^n |x| \to \infty$ mit geometrischer Rate gilt.

[3] Sind (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$, so schreiben wir $U_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$ für die offene Kugel um x mit Radius r und $B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) \le r\}$ für die abgeschlossene.

[4] $\|\cdot\|$ ist hier die Operatornorm bzgl. der Norm $|\cdot|$; siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Operatornorm.

Bemerkung und Definition 1.6 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ offen und $f : X \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbar. Weiterhin sei $p \in X$ ein Fixpunkt von f mit $\lambda := |f'(p)| < 1$. Da $x \mapsto |f'(x)|$ stetig ist, existiert zu jedem μ mit $\lambda < \mu < 1$ ein $r > 0$ so, dass $B := B_r(p) \subset X$ und $|f'(x)| \leq \mu$ für $x \in B$. Wegen $f(p) = p$ gilt nach dem Schrankensatz [5]

$$|f(x) - p| \leq \mu|x - p| \qquad (x \in B).$$

Also folgt $f(B) \subset B$ und induktiv

$$|f^n(x) - p| \leq \mu^n|x - p| \qquad (x \in B,\, n \in \mathbb{N}). \tag{1.2}$$

Insbesondere ist p attraktiv. Im Fall $\lambda = 0$ gilt (1.2) für beliebiges $\mu > 0$. Man nennt in diesem Fall den Fixpunkt auch **superattraktiv**.

Beispiel 1.7 Es sei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f = f_\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \mu z(1 - z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann ist $f(p) = p$ genau dann, wenn $p = 0$ oder $p = 1 - 1/\mu$. Außerdem gilt $f'(z) = \mu(1 - 2z)$, also $f'(0) = \mu$ und $f'(1 - 1/\mu) = 2 - \mu$. Nach Bemerkung 1.6 ist $p = 0$ attraktiv für $|\mu| < 1$ und $p = 1 - 1/\mu$ attraktiv für $|\mu - 2| < 1$ und zudem superattraktiv für $\mu = 2$.

Bemerkung und Definition 1.8 Es seien X eine Menge und $f : X \to X$. Dann heißt eine Menge $A \subset X$

1. **vorwärts-invariant** oder kurz **invariant** (unter f), falls $f(A) \subset A$,
2. **rückwärts-invariant** (unter f), falls $f^{-1}(A) \subset A$,
3. **vollständig invariant** (unter f), falls $f(A) \subset A$ und $f^{-1}(A) \subset A$ gilt.

Man kann man sich überlegen ([Ü]), dass A genau dann vollständig invariant ist, wenn A und $A^c = X \setminus A$ invariant sind. Unter den Bedingungen von Bemerkung und Definition 1.6 ist $B_r(p)$ für jedes genügend kleine r invariant.
Ist (f, X) ein diskretes System, so ist A genau dann invariant, wenn $O(A) \subset A$ gilt. Ist A invariant, so kann man das System auf die Teilmenge A einschränken, das heißt (f_A, A) mit $f_A : A \to A$, definiert durch $f_A(x) := f(x)$ für $x \in A$, ist ebenfalls ein dynamisches System. Ist allgemeiner $(f_t)_{t \in T}$ ein dynamisches System und $f_s(A) \subset A$ für jedes $s \in T$, so heißt A **invariant** für das System.

Beispiel 1.9 (logistische Gleichung) Wir betrachten wieder die Abbildung $f = f_\mu$ aus Beispiel 1.7. Ist $0 < \mu \leq 4$, so gilt $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Also ist dann auch $(f, [0, 1])$ ein dynamisches System.[6] Man kann zeigen ([Ü]): Im Falle $0 < \mu \leq 1$ gilt

$$f^n(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

[5] eine passende Version findet man etwa in `https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf`, Satz 7.27

[6] Die Gleichung $x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$ bezeichnet man als logistische Gleichung. Sie dient als ein Standardmodell zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Populationen unter Berücksichtigung von Kapazitätsbeschränkungen; siehe etwa `https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung`.

für alle $x \in [0,1]$, also $I(0) = [0,1]$, und für $1 < \mu < 3$ ist

$$I(1 - 1/\mu) = (0,1)$$

und damit auch $I(0) = \{0,1\}$. Soweit erweist sich die Dynamik als sehr übersichtlich. Die Situation wird jedoch zunehmend komplizierter, wenn man mit dem Parameter μ über 3 hinausgeht.[7] Wir werden uns im weiteren Verlauf der Vorlesung mit den Fällen $\mu = 4$ und $\mu > 4$ noch genauer beschäftigen.

Bemerkung und Definition 1.10 Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $\mathscr{F} \subset C(X,Y)$. Dann heißt die Familie $\mathscr{F}$ **topologisch transitiv** oder kurz **transitiv**, falls für alle offenen, nichtleeren Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ ein $f \in \mathscr{F}$ existiert mit

$$f(U) \cap V \neq \varnothing$$

bzw. $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, mit anderen Worten, falls $\bigcup_{f \in \mathscr{F}} f^{-1}(V)$ dicht in X ist für alle offenen und nichtleeren $V \subset Y$.[8] Ein dynamisches System (f, X) nennen wir **(topologisch) transitiv**, falls die Familie $\mathscr{F}_N := \{f^n : n \geq N\}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ transitiv ist. Weiter heißt (f, X) **mischend**, falls $\{f^n : n \in I\}$ für alle unendlichen $I \subset \mathbb{N}$ transitiv ist. Schließlich heißt das System **exakt**, falls für alle offenen, nichtleeren $U \subset X$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^N(U) = X$. Dann ist f surjektiv und $f^n(U) = X$ für alle $n \geq N$. Nach Definition ist jedes exakte System mischend und jedes mischende System transitiv.

Beispiel 1.11 (Winkelverdopplung) Es seien $(X, d) = (\mathbb{S}, d_{|\cdot|})$ und $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ mit

$$\sigma(z) = z^2 \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Dann gilt $\sigma^n(z) = z^{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{S}$. Ist $z = e^{i\theta}$, so ist $\sigma(z) = e^{2i\theta}$, d. h. σ bewirkt eine Winkelverdopplung. Für $\theta_1 < \theta_2$ setzen wir

$$B = B_{\theta_1,\theta_2} := \{e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2\}\,.$$

Dann ist

$$\sigma^n(B) = \{e^{i2^n\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2\} = \{e^{i\tau} : 2^n\theta_1 < \tau < 2^n\theta_2\}.$$

Ist N so, dass $2^N\theta_2 - 2^N\theta_1 > 2\pi$, so gilt $\mathbb{S} = \sigma^n(B)$ für alle $n \geq N$. Ist $\varnothing \neq U \subset \mathbb{S}$ offen, so existiert ein Bogen B mit $B \subset U$. Damit ist $\sigma^n(U) = \mathbb{S}$ für $n \geq N$, also $(\sigma, \mathbb{S})$ exakt. Insbesondere ist $(\sigma, \mathbb{S})$ mischend und transitiv.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so nennt man abzählbaere Schnitte offener Mengen G_δ-Mengen. Wir verwenden im Beweis zum nächsten Ergebnis den *Satz von Baire* in folgender Version (siehe Bemerkung und Definition A.2):
Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist für jede Folge (M_n) dichter G_δ-Mengen in X auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ eine dichte G_δ-Menge in X.

[7] siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung und https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bifurkationsdiagramm&redirect=no

[8] $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $A \cap U \neq \varnothing$ für alle nichtleeren offenen U gilt.

Satz 1.12 [9] *Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und (Y, d_Y) ein separabler metrischer Raum.*[10] *Weiter sei $\mathscr{F}$ eine Familie stetiger Abbildungen von X nach Y. Ist M die Menge der $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass $\mathscr{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathscr{F}\}$ dicht in Y ist, so gilt*

1. *M ist eine G_δ-Menge,*

2. *Ist M dicht in X, so ist $\mathscr{F}$ transitiv.*

3. *Ist X vollständig und $\mathscr{F}$ transitiv, so ist M dicht in X.*

Beweis. 1. Da Y separabel ist, existiert eine abzählbaere dichte Menge $A \subset Y$. Damit ist durch $\{U_{1/k}(a) : k \in \mathbb{N}, a \in A\}$ eine abzählbare Menge offener Kugeln in Y gegeben. Es sei $\{V_n :_n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung und damit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(V_n) =: L$. Da jedes $f \in \mathscr{F}$ stetig ist, ist $f^{-1}(V_n)$ offen in X für alle $f \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ und daher L eine G_δ-Menge.[11] Wir zeigen, dass $M = L$ gilt:
Ist $x \in M$, also $\mathscr{F}(x)$ dicht in Y, und ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $f \in \mathscr{F}$ mit $f(x) \in V_n$, d. h. $x \in f^{-1}(V_n)$. Also ist $x \in L$. Ist umgekehrt $x \in L$ und ist $V \subset Y$ offen, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n \subset V$. Da $x \in \bigcup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(V_n)$ gilt, existiert ein $f \in \mathscr{F}$ mit $f(x) \in V_n \subset V$. Damit ist $\mathscr{F}(x) \cap V \neq \varnothing$, also $\mathscr{F}(x)$ dicht in Y und somit $x \in M$.
2. Ist $V \subset Y$ nichtleer und offen, so existiert ein n mit $V_n \subset V$. Mit $M = L$ ist auch $\bigcup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(V_n)$ dicht in X, also auch $\bigcup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(V)$.
3. Nach Voraussetzung ist $\bigcup_{f\in\mathscr{F}} f^{-1}(V_n)$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist nach dem Satz von Baire auch M dicht in X. □

Bemerkung und Definition 1.13 Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann heißt A **perfekt**, falls A keine isolierten Punkte hat. Ist A perfekt und B dicht in A, so ist auch $B \setminus E$ dicht in A für alle endlichen Mengen E. Sind X perfekt und (f, X) ein diskretes System, und ist x so, dass der Orbit $O(x)$ dicht in X ist, so ist auch

$$\{f^n(x) : n \geq N\} = O(f^N(x))$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ dicht in X, also $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{O(f^N(x))} = X$.[12]

Bemerkung und Definition 1.14 Es seien $(f_t)_{t\in T}$ ein dynamisches System auf X und $x \in X$. Dann heißt

$$\omega(x) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{f_s(x) : s \geq t\}} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{O\big(f_t(x)\big)}$$

[9] Das Ergebnis findet man in dieser Form erstmals in der Dissertation *Holomorphe Monster und universelle Funktionen* von Karl-Goswin Grosse-Erdmann, Trier, 1987

[10] Ein metrischer Raum heißt **separabel**, falls eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

[11] Ganz allgemein ist Stetigeit einer Funktion $f : X \to Y$ äquivalent dazu, dass die Urbilder offener Mengen unter f offen sind.

[12] Ist $A \subset X$, so nennt man die Menge $\overline{A} := \{x \in X : \exists \text{ Folge } (x_n) \text{ in } A \text{ mit } x_n \to x\,(n \to \infty)\}$ den **Abschluss** von A in X. Damit ist A genau dann dicht in X, wenn $\overline{A} = X$ gilt. Außerdem heißen die Menge $A^\circ := \{x : x \text{ innerer Punkt von } A\}$ das **Innere** von A und $\partial A := \overline{A} \setminus A^\circ$ der **Rand** von A. Dabei sind $\overline{A}$ sowie ∂A abgeschlossen und A° offen.

ω**-Grenzmenge** von x. Ein Punkt $x \in X$ heißt **rekurrent**, falls $x \in \omega(x)$ gilt.
Die ω-Grenzmenge ist die Menge aller $y \in X$, für die eine Folge (t_k) in T mit $t_k \to \infty$ und $f_{t_k}(x) \to y$ $(k \to \infty)$ existiert ([Ü]). Insbesondere ist $\omega(x) = \omega(f_t(x))$ für alle $t \in T$ und $\omega(x) = \{y\}$ falls $f_t(x) \to y$ für $t \to \infty$ gilt. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $\omega(x)$ abgeschlossen. Außerdem ist $\omega(x)$ invariant.

> Denn: Ist $\omega(x) \neq \varnothing$ und $y \in \omega(x)$, so existiert eine Folge (t_k) in T mit $t_k \to \infty$ und $f_{t_k}(x) \to y$ für $k \to \infty$. Es sei $s \in T$. Da f_s stetig ist gilt
>
> $$f_{t_k+s}(x) = f_s\big(f_{t_k}(x)\big) \to f_s(y) \qquad (k \to \infty),$$
>
> $f_s(y) \in \omega(x)$. Also ist $f_s(\omega(x)) \subset \omega(x)$.

Im Falle kompakter X ist die ω-Grenzmenge stets nichtleer.
Sind X perfekt und (f, X) ein dynamisches System, so gilt für $x \in X$ nach Bemerkung und Definition 1.13 $\omega(x) = X$ genau dann, wenn $O(x)$ dicht in X ist, und in diesem Fall ist auch $\omega(f^N(x)) = X$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt aus der Existenz eines dichten Orbits schon, dass die Menge der x mit $\omega(x) = X$ dicht in X ist. In diesem Fall ist zudem (f, X) transitiv nach Satz 1.12.

Satz 1.15 (Birkhoffscher Transitivitätssatz)
Ist (X, d) ein vollständiger, separabler und perfekter metrischer Raum, so ist (f, X) genau dann transitiv, wenn ein dichter Orbit existiert und in diesem Fall ist die Menge der x mit $\omega(x) = X$ eine dichte G_δ-Menge in X.

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 1.14 und Satz 1.12 ist (f, X) genau dann transitiv, wenn ein dichter Orbit existiert, und dann die Menge der x mit $\omega(x) = X$ dicht in X. Außerdem ist $\{x \in X : O(x) \text{ dicht in } X\} = \{x \in X : \omega(x) = X\}$ wieder nach Satz 1.12, angewandt auf $\mathscr{F} = \{f^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, eine G_δ-Menge. □

Beispiel 1.16 (Winkelverdopplung, II) Es sei wieder $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ mit $\sigma(z) = z^2$ aus Beispiel 1.11. Da σ exakt und damit transitiv ist, existiert nach dem Transitivitätssatz eine dichte G_δ-Menge von Punkten $z \in \mathbb{S}$ so, dass $\omega(z) = \mathbb{S}$ gilt, d. h. für jedes solche z und jedes $w \in \mathbb{S}$ existiert eine Folge (n_k) mit $n_k \to \infty$ und $\sigma^{n_k}(z) = z^{2^{n_k}} \to w$ für $k \to \infty$.

Bemerkung und Definition 1.17 Sind $X \neq \varnothing$ eine Menge und $f : X \to X$, so heißt $p \in X$ **periodischer Punkt** von f, falls $f^m(p) = p$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, das heißt, falls p Fixpunkt einer Iterierten f^m von f ist. Jedes m mit dieser Eigenschaft nennt man eine **Periode** von p, und das Minimum aller Perioden heißt die **minimale Periode** von p. Ist (f, X) ein diskretes System und x periodischer Punkt mit Periode m, so ist jedes $y \in O(x)$ ebenfalls periodisch mit Periode m und es gilt

$$\omega(y) = O(y) = O(x).$$

Daher spricht man dann auch von einem periodischen Orbit und von einer Periode des Orbits. Der periodische Punkt p heißt **attraktiv** bzw. **superattraktiv**, falls p als Fixpunkt von f^m die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiel 1.18 (Drehungen auf $\mathbb{S}$) Es seien $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und und $f = f_a : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ definiert durch $f(z) = az$ für $z \in \mathbb{S}$ (vgl. Beispiel 1.5). Ist $a = e^{i\theta}$ mit $\theta \in (0, 2\pi)$, so beschreibt f eine Drehung um den Winkel θ. Ist $(2\pi)^{-1}\theta = k/m$ mit $k, m \in \mathbb{N}$ und damit a eine m-te Einheitswurzel, so ist jedes z periodisch mit Periode m. Hier ist

$$O(z) = \omega(z) = \{a^n z : n = 0, \ldots, m-1\}.$$

Ist dagegen $(2\pi)^{-1}\theta$ irrational, so kann man zeigen, dass $\omega(z) = \mathbb{S}$ für alle $z \in \mathbb{S}$ gilt ([Ü]). Insbesondere ist $(f, \mathbb{S})$ dann transitiv.

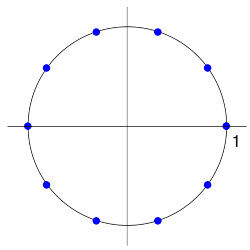

Figure 2: $f^k(1) = a^k = e^{ik\theta}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\theta = \pi/5$.

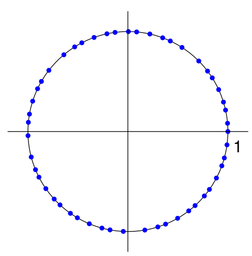

Figure 3: $f^k(1) = a^k = e^{ik\theta}$ für $k = 0, \ldots, 50$ und $\theta = \pi(\sqrt{5} - 1)$.

Bemerkung und Definition 1.19 (symbolische Dynamik) Für eine endliche Menge A mit $\#A \geq 2$ [13] schreiben wir

$$\Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0} := \left\{(a_k)_{k=0}^{\infty} : a_k \in A \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Durch

$$d(a, b) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(a_k, b_k)}{3^{k+1}} \quad (a = (a_k), b = (b_k) \in \Sigma_A),$$

[13] Wir schreiben wie üblich $\#M$ für die Mächtigkeit einer Menge M.

wobei δ die diskrete Metrik auf A bezeichnet, ist eine Metrik d auf Σ_A definiert ist.[14] Für $a \in \Sigma_A$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$U_{1/3^m}(a) = \{b \in \Sigma_A : b_k = a_k \text{ für } k = 0, \dots, m-1\}\,.$$

Denn: Ist b in der rechten Seite, so gilt $d(a,b) \le \sum\limits_{k=m}^{\infty} 1/3^{k+1} = 1/(2 \cdot 3^m)$. Ist umgekehrt $d(a,b) < 1/3^m$, so gilt notwendig $b_k = a_k$ für $k = 0, \dots, m-1$.

Insbesondere ist der Raum Σ_A perfekt. Die Abbildung $\sigma = \sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ mit

$$\sigma\big((a_k)\big) := (a_{k+1})_{k=0}^{\infty} \quad = (a_1, a_2, \dots) \qquad \big((a_k) \in \Sigma_A\big)$$

heißt **Linksshift** oder auch **Rückwärtsshift** auf Σ_A. Dabei gilt

$$d\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) \le 3d(a,b) \qquad (a, b \in \Sigma_A).$$

Insbesondere ist σ (Lipschitz-)stetig. Also ist (σ, Σ_A) ein dynamisches System. Hier ist $p = (p_k) \in \Sigma_A$ genau dann periodisch mit Periode m, wenn

$$p_{m+k} = p_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

also $p = (p_0, \dots, p_{m-1}, p_0, \dots, p_{m-1}, p_0, \dots, p_{m-1}, \dots)$ gilt. Damit existieren genau $(\#A)^m$ periodische Orbits mit Periode m.

[14]Die 3 im Nenner kann durch ein beliebiges $q > 1$ ersetzt werden, wobei der Fall $q > 2$ den Vorteil hat, dass die offenen Kugeln mit Radius $1/q^n$ leicht zu beschreiben sind.

2 Chaotische Systeme

Wir betrachten nun diskrete Systeme, die sich dadurch auszeichnen, dass das dynamische Verhalten in subtiler Weise von den Anfangswerten abhängt.

Definition 2.1 Es seien X perfekt und (f, X) ein dynamisches System. Dann heißt das System **chaotisch**[15] falls (f, X) transitiv ist und zudem eine dichte Menge periodischer Punkte existiert.

Ist X vollständig und separabel, so existiert nach dem Tansitivitätssatz bei chaotischen Systemen neben einer dichten Menge periodischer Punkte auch eine dichte G_δ-Menge von Punkten x mit dichtem Orbit bzw. $\omega(x) = X$.

Beispiel 2.2 (Winkelverdopplung, III) Es sei wieder $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ mit $\sigma(z) = z^2$ für $z \in \mathbb{S}$. Dann gibt es eine dichte Menge periodischer Orbits, denn es gilt $\sigma^n(z) = z^{2^n} = z$ genau dann, wenn $z^{2^n-1} = 1$, also z eine $(2^n - 1)$-te Einheitswurzel ist. Die Menge der Einheitswurzeln $\{z \in \mathbb{S} : z^{2^n-1} = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $\mathbb{S}$. Da $(\sigma, \mathbb{S})$ transitiv ist, ist $(\sigma, \mathbb{S})$ auch chaotisch.

Satz 2.3 *Für den Linksshift (σ_A, Σ_A) existiert ein dichter Orbit und die Menge der periodischen Punkte ist dicht in Σ_A. Außerdem ist σ chaotisch.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $A = \{1, \ldots, q\}$. Wir betrachten die Folge $b \in \Sigma_A$ mit

$$b := \big(\underbrace{1, 2, \ldots, q}_{\text{1er Blöcke}}, \underbrace{1, 1, 1, 2, \ldots, 1, q, 2, 1, \ldots, 2, q, \ldots, q, q}_{\text{2er Blöcke}}, \underbrace{1, 1, 1, \ldots, q, q, q}_{\text{3er Blöcke}}, \ldots\big),$$

d. h. b entsteht durch sukzessives Auflisten aller Blöcke der Länge $1, 2, 3, \ldots$ aus Zahlen aus $\{1, \ldots, q\}$.[16]
Nun seien $a = (a_k) \in \Sigma_A$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma^n(b)$ in den ersten N Folgengliedern mit a übereinstimmt. Nach Bemerkung und Definition 1.19 gilt $\sigma^n(b) \in U_{1/3^N}(a)$. Ist weiter $p \in \Sigma_A$ mit

$$p = (a_0, \ldots, a_{N-1}, a_0, \ldots, a_{N-1}, a_0, \ldots, a_{N-1}, \ldots),$$

so ist p periodisch mit $p \in U_{1/3^N}(a)$. Da a und N beliebig waren, sind $O(b)$ und die Menge der periodischen Punkte dicht in Σ_A. Nach Bemerkung 1.14 ist zudem σ transitiv und damit auch chaotisch. $\square$

Wir untersuchen jetzt das Polynom $f = f_\mu$ der logistischen Gleichung für Parameter $\mu \geq 4$ und führen zunächst das für dynamische Systeme zentrale Konzept der Faktoren bzw. der Konjugation ein.

[15] genauer Devaney-chaotisch
[16] Das Buch b enthält alle Texte.

Bemerkung und Definition 2.4 Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, und es seien $F = (f_t)_{t\in T}$ und $G = (g_t)_{t\in T}$ dynamische Systeme auf X bzw. Y. Man sagt, F sei ein **Faktor** von G, falls eine stetige Abbildung $h : Y \to X$ mit dichtem Bild und mit

$$h \circ g_t = f_t \circ h \quad (t \in T), \tag{2.1}$$

existiert, also so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g_t"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f_t"] & X \end{tikzcd}$$

für alle $t \in T$ kommutiert. Ist dabei h ein Homöomorphismus, so heißen F und G **konjugiert**. Weiter sagt man im ersten Fall auch, F sei zu G **quasikonjugiert vermittels** h und im zweiten Fall **konjugiert vermittels** h. Sind (f, X), (g, Y) diskrete Systeme und gilt (2.1) nur für $t = 1$, so gilt (2.1) schon für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Wir verwenden die obigen Begriffe daher im Fall $T = \mathbb{N}_0$ auch für f und g statt F und G.
Ist f ein Faktor von g, so überträgt sich die Dynamik von g in vielerlei Hinsicht auf f. Ist etwa q ein periodischer Punkt von g mit Periode m, so ist $p = h(q)$ ein periodischer Punkt von f mit Periode m. Da Bilder dichter Mengen unter stetigen Abbildungen mit dichtem Bild dicht sind ([Ü]), übertragen sich zudem Transitivität, die Mischend-Eigenschaft und Chaotizität von g auf f. Ist h surjektiv, so überträgt sich auch die Exaktheit.

Beispiel 2.5 (f_4, die Chaosparabel) Es seien $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ die Winkelverdopplung, also $\sigma(z) = z^2$, und $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definiert durch

$$g(x) := 2x^2 - 1 \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Dann gilt mit $\tau(z) := \mathrm{Re}(z)$ für $z \in \mathbb{S}$ und $z = x + iy$

$$(\tau \circ \sigma)(z) = \mathrm{Re}\, z^2 = x^2 - y^2 \underset{y^2=1-x^2}{=} 2x^2 - 1 = 2\,\mathrm{Re}^2 z - 1 = (g \circ \tau)(z).$$

Da $\tau : \mathbb{S} \to [-1, 1]$ surjektiv und stetig ist, ist damit $(g, [-1, 1])$ ein Faktor von $(\sigma, \mathbb{S})$. Vermittels $h(x) := (1 - x)/2$ für $x \in [-1, 1]$ ist weiter das Polynom $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ konjugiert zum Polynom g, da

$$(h \circ g)(x) = \frac{1}{2}\,(1 - 2x^2 + 1) = 1 - x^2 = 4\,\frac{1-x}{2}\Big(1 - \frac{1-x}{2}\Big) = (f_4 \circ h)(x).$$

Damit ist $(f_4, [0, 1])$ ein Faktor von $(\sigma, \mathbb{S})$. Nach Beispiel 2.2 und Bemerkung 2.4 ist f_4 chaotisch.

Wir betrachten nun Parameter $\mu > 4$. In diesem Fall ist f_μ keine Selbstabbildung auf $[0, 1]$. Wir müssen den Definitionsbereich geeignet einschränken.

Bemerkung 2.6 Mit $I := [0,1]$ sei

$$I(0) := \{x \in [0,1/2] : f_\mu(x) \in I\} \quad \text{und} \quad I(1) := \{x \in [1/2,1] : f_\mu(x) \in I\}.$$

Da $f_\mu|_{[0,1/2]}$ streng wachsend und $f_\mu|_{[1/2,1]}$ streng fallend ist, sind $I(0), I(1)$ disjunkte Intervalle mit $f_\mu(I(0)) = f_\mu(I(1)) = I$. Man rechnet nach, dass $(1 \pm \sqrt{1-4/\mu})/2$ rechter bzw. linker Randpunkt von $I(0)$ bzw. $I(1)$ sind. Insbesondere ist

$$f = f_\mu : I(0) \cup I(1) \to I$$

surjektiv. Allgemeiner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ und $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ [17]

$$I(a_0, \ldots, a_{n-1}) := I(a_0) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(I(a_k)) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(I(a_k)).$$

Dann ist $I(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap I(b_0, \ldots, b_{n-1}) = \varnothing$ falls $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (b_0, \ldots, b_{n-1})$.

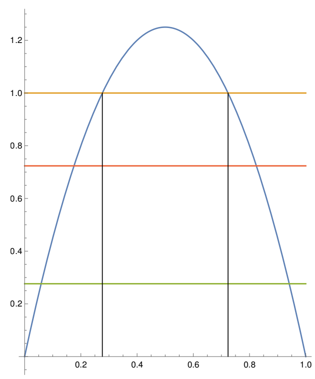

Figure 4: $\mu = 5$

Wegen der Injektivität von f auf $I(a_0)$ ergibt sich[18]

$$f(I(a_0, \ldots, a_{n-1})) = \bigcap_{k=1}^{n-1} f^{-(k-1)}(I(a_k)) = I(a_1, \ldots, a_{n-1})$$

und $f^{-1}(I(a_1, \ldots, a_{n-1})) = I(0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \cup I(1, a_1, \ldots, a_{n-1})$ sowie

$$f^{-1}(I(a_1, \ldots, a_{n-1})) \cap I(a_0) = I(a_0, \ldots, a_{n-1}). \tag{2.2}$$

Wegen der Stetigkeit von $(f|_{I(a_0)})^{-1}$ auf I folgt induktiv, dass $I(a_0, \ldots, a_{n-1})$ kompakte Intervalle sind. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$S_n := \bigcup_{(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n} I(a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

[17] Hier ist $f^{-k}(A)$ das k-te iterierte Urbild von A unter f, definiert durch $f^{-0}(A) := A$ und $f^{-k}(A) := f^{-1}(f^{-(k-1)}(A))$ für $k \in \mathbb{N}$.

[18] Erinnerung: für injektive $g : X \to X$ gilt $g(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha g(A_\alpha)$ und für surjektive $g(g^{-1}(A)) = A$.

Dann gilt $f^{-1}(S_n) = S_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und mit $I(\varnothing) := I$ damit

$$I(a_0, \dots, a_{n-1}) \cap S_{n+1} = I(a_0, \dots, a_{n-1}, 0) \cup I(a_0, \dots, a_{n-1}, 1) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.3}$$

Denn: Für $n = 0$ ist $I(\varnothing) \cap S_1 = I \cap S_1 = I(0) \cup I(1)$. Für den Induktionsschritt $n-1$ auf n sei $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$. Mit (2.2) und der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned} I(a_0, \dots, a_{n-1}) \cap S_{n+1} &= I(a_0) \cap f^{-1}(I(a_1, \dots, a_{n-1}) \cap S_n) \\ &= I(a_0) \cap f^{-1}\big(I(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) \cup I(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)\big) \\ &= I(a_0, \dots, a_{n-1}, 0) \cup I(a_0, \dots, a_{n-1}, 1)\,. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$C = C_\mu := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Dann ist $f^{-1}(C) = C$ und damit auch $f(C) \subset C$, also ist insbesondere (f_μ, C_μ) ein dynamisches System. Da S_n als endliche Vereinigung kompakter Intervalle kompakt ist, ist C kompakt. Weiter liegen nach Konstruktion alle Anfangs- und Endpunkte der Intervalle $I(a_0, \dots, a_{n-1})$ in C (diese sind die Punkte in $f^{-n}(\{0,1\})$.

Wir wollen nun zeigen, dass (f_μ, C_μ) konjugiert ist zum Linksshift σ auf dem Raum $\Sigma := \Sigma_{\{0,1\}}$ der $\{0,1\}$-Folgen.

Bemerkung 2.7 Für $a = (a_k)_{k=0}^\infty \in \Sigma$ setzen wir

$$J(a) := J_\mu(a) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I(a_0, \dots, a_n).$$

Dann ist $J(a)$ nach dem Intervallschachtelungsprinzip ein nichtleeres kompaktes Intervall. Nach Bemerkung und Definition 2.6 ist $J(a) \subset C_\mu$ für jedes $a \in \Sigma$ und $J(a) \cap J(b) = \varnothing$ für $a \neq b$. Man kann zeigen, dass die Intervalle $J(a)$ stets einpunktig sind. Wir skizzieren einen Beweis für $\mu > 2 + \sqrt{5}$:

> Es sei $\lambda(I)$ die Länge eines Intervalls I. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes, angewandt auf $(f|_{I(0)})^{-1}$ bzw. $(f|_{I(1)})^{-1}$, kann man induktiv zeigen: Ist
>
> $$\rho := \min_{S_1} |f'|,$$
>
> so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$
>
> $$\lambda(J(a)) \leq \lambda(I(a_0, \dots, a_{n-1})) \leq 1/\rho^n\,,$$
>
> also $\lambda(J(a)) = 0$ falls $\rho > 1$ ist. Aus Symmetriegründen und aufgrund der Konkavität von f ist $\rho = |f'(u_\pm)|$, wobei $u_\pm$ so, dass $f(u_\pm) = 1$, also $u_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4/\mu})/2$. Wegen $f'(x) = \mu(1-2x)$ für $x \in [0,1]$ ist $\rho = \sqrt{\mu^2 - 4\mu}$ und damit $\rho > 1$ genau dann, wenn $\mu > 2 + \sqrt{5}$ ist.

Damit ist durch $J(a) = \{h(a)\}$, wobei $h(a) \in C_\mu$, eine Abbildung $h = h_\mu : \Sigma \to C_\mu$ wohldefiniert. Wegen der paarweisen Disjunktheit der $J(a)$ ist h injektiv.

Satz 2.8 *Für $\mu > 4$ ist (f_μ, C_μ) vermittels h_μ konjugiert zu (σ, Σ).*

Beweis. 1. Wir zeigen, dass h surjektiv (und damit bijektiv) ist. Dazu sei $x \in C = C_\mu$. Zunächst existiert genau ein $a_0 \in \{0,1\}$ so, dass $x \in I(a_0)$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $x \in I(a_0, \ldots, a_{n-1})$, so existiert wegen $x \in S_{n+1}$ nach (2.3) genau ein $a_n \in \{0,1\}$ mit $x \in I(a_0, \ldots, a_n)$. Damit ist $x = h(a)$.
2. Es sei $a \in \Sigma$. Dann gilt wegen der Injektivität von f auf $I(a_0)$ mit Bemerkung 2.6

$$f_\mu(\{h(a)\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(I(a_0, \ldots a_n)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I(a_1, \ldots a_n) = \{h(\sigma(a))\}.$$

Also ist $f_\mu \circ h = h \circ \sigma$.
Wir zeigen, dass $h^{-1} : C \to \Sigma$ stetig ist: Dazu seien $h(a) \in C$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/3^n < \varepsilon$. Ist [19]

$$\delta := \min\left\{\operatorname{dist}(I(b_0, \ldots, b_{n-1}), I(a_0, \ldots, a_{n-1})) : (b_0, \ldots, b_{n-1}) \neq (a_0, \ldots, a_{n-1})\right\}$$

und ist $b \in \Sigma$ mit $|h(b) - h(a)| < \delta$, so ist $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots, n-1$, also $b \in U_{1/3^n}(a) \subset U_\varepsilon(a)$. Damit ist h^{-1} stetig an $h(a)$.
Wegen der Kompaktheit von C ist damit auch Σ kompakt[20] und h ein Homöomorphismus ([Ü]). $\square$

Bemerkung 2.9 Mit Bemerkung 2.4 ergibt aus den Sätzen 2.8 und 2.3, dass (f_μ, C_μ) chaotisch ist.

Bemerkung und Definition 2.10 Ist $A \subset \mathbb{R}$ perfekt,[21] so heißt A **Cantor-Menge**, falls A keine inneren Punkte hat. Wir zeigen, dass C_μ eine Cantor-Menge ist: Dazu sei $x \in C_\mu$ gegeben und $a = h^{-1}(x)$. Nach (2.3) ist

$$I(a_0, \ldots, a_{n-1}) \cap S_{n+1} = I(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0) \cup I(a_0, \ldots, a_{n-1}, 1)\,.$$

Wir wählen für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in I(a_0, \ldots, a_{n-1}) \setminus S_{n+1}$. Dann ist $y_n \notin C$ und es gilt $y_n \to x$ für $n \to \infty$, da die Längen der Intervalle $I(a_0, \ldots, a_n)$ abklingend sind (ansonsten wäre $J(a)$ nicht einpunktig). Also ist x kein innerer Punkt von C. Ist q_n der Endpunkt von $I(a_0, \ldots, a_{n-1}, a'_n)$, wobei $a'_n \neq a_n$, so gilt wieder $q_n \to x$ für $n \to \infty$. Dabei ist $q_n \neq x$ und $q_n \in C$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist x auch Häufungspunkt von C.

[19] Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A,\, y \in B\}$ der Abstand von $A, B \subset X$.
[20] Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt; siehe etwa `https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf`, Bem. und Def. 3.18.
[21] perfekte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind stets überabzählbar ([Ü])

Definition 2.11 Es sei $F = (f_t)_{t\in T}$ ein dynamisches System auf X. Ist $x \in X$, so sagt man, F sei **sensitiv abhängig von den Anfangswerten**, falls es ein $R > 0$ so gibt, dass für jedes $x \in X$ und jedes $\delta > 0$ ein $y \in U_\delta(x)$ existiert mit $\sup_{t\geq 0} d\big(f_t(y), f_t(x)\big) \geq R$.[22]

Satz 2.12 *Ist (X, d) ein vollständiger, perfekter und separabler metrischer Raum und ist (f, X) chaotisch, so existiert eine Konstante $R > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in X$ und alle $\delta > 0$ gibt es ein $y \in U_\delta(x)$ mit $d\big(f^n(y), f^n(x)\big) \geq R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere hat (f, X) sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Es existiert ein $R_0 > 0$ so, dass für alle $x \in X$ ein periodischer Punkt p existiert mit $\operatorname{dist}(O(p), x) \geq R_0$. Dazu seien p, q periodische Punkte mit $O(p) \cap O(q) = \varnothing$ (existieren, da X unendlich ist). Dann gilt

$$R_0 := \operatorname{dist}\big((O(p), O(q)\big)/2 > 0$$

und damit für alle $x \in X, n, m \in \mathbb{N}_0$

$$2R_0 \leq d\big(f^n(p), f^m(q)\big) \leq d(f^n(p), x) + d(f^m(q), x).$$

Ist also $d(f^m(q), x) < R_0$ für ein m, so ist $d(f^n(p), x) \geq R_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Wir setzen $R := R_0/4$. Sind $x \in X$ und $\delta \in (0, R)$ gegeben, so existiert nach 1. ein periodischer Punkt p mit $\operatorname{dist}(O(p), x) \geq 4R$ und nach Voraussetzung ein periodischer Punkt $q \in U_\delta(x)$ (mit Periode m). Die Menge

$$V := \bigcap_{\mu=0}^{m} f^{-\mu}\big(U_R\big(f^\mu(p)\big)\big) = \big\{y \in X : d\big(f^\mu(y), f^\mu(p)\big) < R \quad \text{für } \mu = 0, \dots, m\big\}$$

ist offen mit $p \in V$. Aus dem Transitivitätssatz folgt die Existenz eines $y \in U_\delta(x)$ mit $\omega(y) = X$ und damit einer Folge (n_k) mit $n_k \to \infty$ und $f^{n_k}(y) \to p$ für $k \to \infty$. Ist $k \in \mathbb{N}$ genügend groß, so ist $f^{n_k}(y) \in V$. Zu solchen k wählen wir $j_k \in \mathbb{N}$ so, dass $m(j_k - 1) \leq n_k \leq mj_k$. Wir zeigen: Es gilt

$$d\big(f^{mj_k}(q), f^{mj_k}(y)\big) > 2R \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

Mit der Dreiecksungkleichung folgt, dass $d(f^n(q), f^n(x)) \geq R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ oder $d(f^n(y), f^n(x)) \geq R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $q, y \in U_\delta(x)$ ergibt sich also die Behauptung.
Zu (2.1): Aus $f^{n_k}(y) \in V$ erhält man mit $j = j_k$ und $n = n_k$ wegen $0 \leq mj - n \leq m$

$$d\big(f^{mj}(y), f^{mj-n}(p)\big) = d\big(f^{mj-n}(f^n(y)), f^{mj-n}(p)\big) < R,$$

also wegen $d(x, q) < \delta < R$

$$4R \leq d\big(x, f^{mj-n}(p)\big) \leq d(x, q) + d\big(q, f^{mj}(y)\big) + d\big(f^{mj}(y), f^{mj-n}(p)\big) < 2R + d\big(q, f^{mj}(y)\big)$$

und damit $2R < d\big(q, f^{mj}(y)\big) = d\big(f^{mj}(q), f^{mj}(y)\big)$. □

[22] Ist dies der Fall, so ist X insbesondere perfekt.

3 Grundlagen aus der Funktionentheorie

In diesem einleitenden Abschnitt stellen wir zentrale Begriffe und Ergebnisse über Funktionen einer komplexen Variable zusammen, die typischerweise im Rahmen einer einführenden Funktionentheorie behandelt werden. Zunächst betrachten wir analytische Funktionen einer reellen oder komplexen Variable. Ist X eine Menge $f : X \to \mathbb{C}$, so schreiben wir

$$Z(f) := \{a \in X : f(a) = 0\}$$

für die Menge der Nullstellen von f.

Bemerkung und Definition 3.1 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **analytisch an** $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge (c_k) in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu \qquad (|h| < R)$$

gilt. In diesem Fall ist f insbesondere beliebig oft differenzierbar auf $U_R(a) \cap X$ [23] mit

$$c_k = f^{(k)}(a)/k! =: c_k(f,a) \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Wieder heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in X$ ist. Ist f analytisch an a, so nennt man (mit $\min \varnothing := \infty$)

$$n(f,a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(f,a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von f an a. Ist $w \in \mathbb{C}$ und $a \in Z(f-w)$, also $w = f(a) = c_0(f,a)$, so heißt a eine w**-Stelle** von f. Dann gilt $c_0(f-w,a) = 0$, also $n(f-w,a) > 0$. Dann nennt man $n(f-w,a)$ die **Vielfachheit** oder **Ordnung** der w-Stelle a.

Bemerkung 3.2 Ist f analytisch an der Stelle a und a eine Nullstelle, so ist entweder f lokal konstant $= 0$ an a [24] oder a ein isolierter Punkt von $Z(f)$.

> Denn: Ist $n := n(f,a) = \infty$, so ist $c_k(f,a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a+h) = 0$ für $|h| < R$. Ist $n < \infty$, so ist
>
> $$f(a+h) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu(f,a) h^\nu = h^n g(h)$$
>
> mit $g(h) := \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu+n}(f,a) h^\mu$ für $|h| < R$. Dabei ist $g(0) = c_n(f,a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $g(h) \neq 0$ auf einer Umgebung von 0.

[23] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.26

[24] Wir sagen, f sei lokal konstant an a, falls f auf einer Umgebung von a konstant ist.

Definition 3.3 Eine Menge $G \subset \mathbb{K}$ heißt **Gebiet**, falls G nichtleer offen und zusammenhängend ist.[25]

Satz 3.4 (Identitätssatz)
Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Hat $Z(f-g)$ einen Häufungspunkt in G, so ist schon $f = g$.[26]

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $g = 0$ zu beweisen (sonst betrachte man $f - g$ statt f). Da f stetig ist, ist $Z(f)$ abgeschlossen in G. Es sei $A \subset Z(f)$ die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$. Dann ist auch A abgeschlossen in G. Ist $A \neq \varnothing$ und $a \in A$, so ist a nach Bemerkung 3.2 ein innerer Punkt von A. Folglich ist A auch offen in G. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f = 0$. □

Bemerkung und Definition 3.5 Es sei $\varphi(t) = e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Ist $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ so, dass $f \circ \varphi$ eine Regelfunktion auf $[-\pi, \pi]$ ist, so setzen wir

$$\int f\, dm := \int f(\zeta)\, dm(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt.$$

Insbesondere ist damit $\int f\, dm$ für $f \in C(\mathbb{S})$ definiert. Mit dem Kronecker-Delta $\delta_{j,k}$ gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\int \zeta^n\, dm(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, dt = \delta_{n,0}. \tag{3.1}$$

Ist $g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ stetig und existiert eine Stammfunktion $G : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ von g, so erhält man aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung wegen $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$

$$\int g(\zeta)\zeta\, dm(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} (G \circ \varphi)'(t)\, dt = (2\pi i)^{-1} (G \circ \varphi)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0\ .$$

Dies zeigt in Verbindung mit (3.1) insbesondere, dass $\zeta \mapsto \overline{\zeta} = 1/\zeta$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{S}$ hat!

Bemerkung und Definition 3.6 Für f wir in Bemerkung und Definition 3.5 sei $Cf : \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(Cf)(z) := \int \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S})\,.$$

Cf heißt **Cauchyintegral** von f. Ist $a \in \mathbb{D}$, so gilt ([Ü])

$$(Cf)(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu \qquad (|h| < 1 - |a|)$$

[25] Die Definition des Zusammenhangs einer Teilmenge eines metrischen Raumes und einige Ergebnisse in diesem Kontext finden sich im Anhang B.
[26] Insbesondere ist im Falle $f \neq 0$ damit $Z(f)$ eine diskrete Menge in X.

mit

$$c_k = c_k(Cf, a) = \frac{(Cf)^{(k)}(a)}{k!} = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1 - a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,. \tag{3.2}$$

Insbesondere ist Cf analytisch in $\mathbb{D}$. Zudem ist $c_k(Cf, 0) = \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta)$ und mit (3.1) damit $C(1|_{\mathbb{S}}) = 1|_{\mathbb{D}}$. Schließlich erhält man wegen $|1 - a\overline{\zeta}| \geq 1 - |a|$ für $\zeta \in \mathbb{S}$ aus (3.2) die **Cauchysche Ungleichung**

$$|(Cf)^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{(1 - |a|)^{k+1}} \sup_{\mathbb{S}} |f| \qquad (a \in \mathbb{D}),$$

also insbesondere $|(Cf)^{(k)}(0)| \leq k! \sup_{\mathbb{S}} |f|$.

Definition 3.7 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar, so nennen wir f **holomorph**. Zudem setzen wir

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}.$$

Satz 3.8 (Cauchysche Integralformel)
Es seien $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $a \in \mathbb{D}$. Ist $f|_{\mathbb{D}\setminus\{a\}}$ holomorph, so gilt

$$f(a) = \int \frac{f(\zeta)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = (Cf)(a).$$

Beweis. Wir definieren $\varphi : [0,1] \times \mathbb{S}$ durch

$$\varphi(\lambda, \zeta) := \frac{f(a + \lambda(\zeta - a))}{1 - a\overline{\zeta}} \qquad (\lambda \in [0,1],\, \zeta \in \mathbb{S})$$

und $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(\lambda) := \int \varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) \qquad (\lambda \in [0,1]).$$

Da φ stetig ist, ist ist Φ stetig auf $[0,1]$ (Stetigkeit von Parameterintegralen). Da zudem $\zeta \mapsto f(a + \lambda(\zeta - a))/\lambda$ für jedes $\lambda \in (0,1)$ eine Stammfunktion zu $\zeta \mapsto f'(a + \lambda(\zeta - a))$ auf $\mathbb{S}$ ist, ergibt sich mit Differenzierbarkeit von Parameterintegralen und Bemerkung und Definition 3.5

$$\Phi'(\lambda) = \int \partial_1\varphi(\lambda, \zeta)\, dm(\zeta) = \int f'\big(a + \lambda(\zeta - a)\big)\, \zeta\, dm(\zeta) = 0 \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Damit ist Φ konstant auf $[0,1]$ und folglich wegen $C(1|_{\mathbb{S}}) = 1|_{\mathbb{D}}$

$$\int \frac{f(\zeta)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = \Phi(1) = \Phi(0) = \int \frac{f(a)}{1 - a\overline{\zeta}}\, dm(\zeta) = f(a)(C1)(a) = f(a).$$

$\square$

Bemerkung 3.9 Ist $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $f|_{\mathbb{D}}$ holomorph, so gilt $f|_{\mathbb{D}} = (Cf)|_{\mathbb{D}}$ nach Satz 3.8. Mit Bemerkung 3.6 ist daher f analytisch in $\mathbb{D}$ und $f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu h^\nu$ für alle $|h| < 1-|a|$ mit

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \int \frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^k}{(1-a\overline{\zeta})^{k+1}}\, dm(\zeta) \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

also insbesondere $f^{(k)}(0)/k! = \int f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, dm(\zeta)$.

Satz 3.10 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$ und $a \in \Omega$. Dann gilt*

$$f(a+h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}\, h^\nu \qquad (|h| < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)).$$

Insbesondere ist f analytisch.[27]

Beweis. Für $\rho < R := \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ sei $g = g_\rho \in C(\overline{\mathbb{D}})$ definiert durch

$$g(w) := f(a + \rho w) \qquad (|w| \le 1).$$

Dann ist $g|_{\mathbb{D}}$ holomorph. Mit Bemerkung 3.9, angewandt auf g, ergibt sich

$$f(a+h) = g\left(\frac{h}{\rho}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!}\frac{h^\nu}{\rho^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} h^\nu \quad (|h| < \rho).$$

Da $\rho < R$ beliebig war, gilt die Darstellung für $|h| < R$ und da $a \in \Omega$ beliebig war, ist f analytisch in Ω. □

Bemerkung und Definition 3.11 Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ nennt man auch eine **ganze Funktion**. Insbesondere sind Polynome und exp, sin, cos ganze Funktionen.[28] Bei ganzen Funktionen ist für jedes $a \in \mathbb{C}$ der Konvergenzradius $\operatorname{dist}(a, \varnothing) = \infty$. Mit der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich der Satz von Liouville: Ist f ganz und beschränkt, so ist f konstant ([Ü]).

Bemerkung 3.12 (lokales Maximumprinzip) Sind $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$, so ergibt sich für $a \in \Omega$ und $0 \le \rho < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Taylorreihe auf $a + \rho\mathbb{S}$ und $|f|^2 = f\overline{f}$ mit (3.1) die **Parsevalsche Gleichung**

$$\int |f(a+\rho\zeta)|^2\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} c_\nu \overline{c_\mu} \rho^\nu \rho^\mu \int \zeta^{\nu-\mu}\, dm(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 \rho^{2\nu}\,.$$

[27] Aus der stetigen Differenzierbarkeit im Komplexen folgt also schon die Existenz sämtlicher Ableitungen!
[28] Ist f ganz, so ist $(f, \mathbb{C})$ ein diskretes dynamisches System.

Hat $|f|$ an a ein lokales Maximum, so ist $|f(a)| \geq |f(a+\rho\zeta)|$ für genügend kleine $\rho > 0$ und $\zeta \in \mathbb{S}$, also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 \rho^{2\nu} = \int |f(a+\rho\zeta)|^2 \, dm(\zeta) \leq |f(a)|^2 \int dm = |f(a)|^2 = |c_0|^2 .$$

Also ist $c_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit f lokal konstant an a.

Satz 3.13 *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und ist $f \in H(\Omega)$ an keiner Stelle lokal konstant, so ist f offen.*[29]

Beweis. Es seien $a \in \Omega$ und $w = f(a)$. Es reicht zu zeigen, dass zu jedem (genügend kleinen) $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(w) \subset f(B_r(a))$. Da die w-Stellen von f isoliert sind, können wir $r > 0$ so klein wählen, dass $f(z) - w \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Wegen der Kompaktheit von $f(a + r\mathbb{S})$ ist

$$\delta := \operatorname{dist}(w, f(a + r\mathbb{S}))/2 > 0 .$$

Es sei nun $u \in U_\delta(w)$. Für $z \in a + r\mathbb{S}$ gilt dann

$$|f(z) - u| = |f(z) - w - (u - w)| \geq |f(z) - w| - |u - w| > \delta .$$

Weiter sei $z \in B_r(a)$ so, dass $|f(z) - u| = \min |f - u|(B_r(a))$. Dann gilt

$$|f(z) - u| \leq |f(a) - u| = |w - u| < \delta.$$

Wir zeigen, dass $f(z) = u$ gilt. Angenommen, nicht. Nach dem Maximumprinzip, angewandt auf $1/(f-u)|_{U_r(a)}$, muss dann $z \in a + r\mathbb{S}$ gelten. Also ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist $u = f(z) \in f(B_r(0))$. $\square$

Bemerkung und Definition 3.14 Wir erweitern die komplexen Zahlen um einen Punkt, den wir ∞ nennen, und setzen

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Dabei vereinbaren wir $1/\infty := 0$, $1/0 := \infty$ und $\infty \cdot w = w \cdot \infty := \infty$ für $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ sowie $w + \infty = \infty + w := \infty$ für $w \in \mathbb{C}$. Wir wollen $\mathbb{C}_\infty$ mit einer natürlichen Metrik so versehen, dass der Raum kompakt wird. Dazu sei $\|\cdot\|_2$ die euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und mit $0 = 0_\mathbb{C}$

$$S := \{(w, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \|(w, u) - (0, 1/2)\|_2 = 1/2\}$$

die 2-Sphäre mit Mittelpunkt $(0, 1/2)$ und Radius $1/2$. Dann ist durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1 + |z|^2}(z, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

[29] f heißt offen, falls Bilder offener Mengen offen sind.

eine Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S \setminus \{(0,1)\}$ definiert ([Ü]).[30] Mit $\varphi(\infty) := (0,1)$ ist also $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to S$ surjektiv. Man kann nachrechnen, dass für $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}_\infty$

$$\|\varphi(z) - \varphi(z')\|_2 = \begin{cases} |z - z'|/\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}, & \text{falls } z' \in \mathbb{C} \\ 1/\sqrt{1+|z|^2}, & \text{falls } z' = \infty \end{cases}$$

gilt ([Ü]). Insbesondere ist damit φ bijektiv und durch $\chi(z,z') := \|\varphi(z) - \varphi(z')\|_2$ eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ definiert, genannt die **chordale Metrik**. Die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ heißt **stereographische Projektion** und ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(w,u) = \begin{cases} w/(1-u), & \text{falls } u \neq 1 \\ \infty, & \text{falls } u = 1 \end{cases}.$$

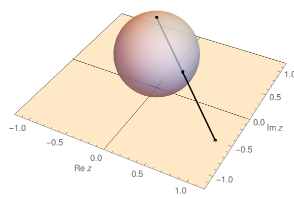

Figure 5: stereographische Projektion.

Da $\varphi^{-1} : S \to (\mathbb{C}_\infty, \chi)$ nach Definition eine Isometrie und damit insbesondere stetig ist, übertragt sich die Kompaktheit von S auf $\mathbb{C}_\infty$. Also ist $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ein *kompakter* metrischer Raum.[31] Außerdem ist $z \mapsto 1/z$ eine Isometrie bzgl. χ ([Ü]).
Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ ist genau dann beschränkt in $\mathbb{C}$, wenn $\mathrm{dist}_\chi(B, \infty) > 0$ gilt und in diesem Fall existiert eine Konstante $c > 0$ mit $|z - z'| \leq c \cdot \chi(z,z')$ für $z, z' \in B$. Ist (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$, so gilt damit $\chi(z_n, z) \to 0$ für $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $|z_n - z| \to 0$. Außerdem gilt $\chi(z_n, \infty) \to 0$ genau dann, wenn $|z_n| \to +\infty$, jeweils für $n \to \infty$.

Bemerkung und Definition 3.15 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ **meromorph** an $a \in \Omega \cap \mathbb{C}$, falls eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $f|_U$ oder $(1/f)|_U$ holomorph ist, und meromorph an ∞ (im Fall $\infty \in \Omega$), falls $z \mapsto f(1/z)$ meromorph an 0 ist. Nach Bemerkung und Definition 3.14 sind meromorphe Funktionen stetig.[32] Wir setzen

$$M(\Omega) := M(\Omega, \mathbb{C}_\infty) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty : f \text{ meromorph}\}.$$

[30] Geometrisch ergibt sich der Punkt $\varphi(z)$ als der Schnittpunkt der Sphäre S mit der Strecke zwischen den Punkten $(0,1)$, also dem Nordpol der Sphäre, und dem Punkt $(z,0)$.

[31] Man spricht von der **Riemannschen Zahlenkugel** $\mathbb{C}_\infty$, da man neben der metrischen Struktur nach Bemerkung 3.15 auch eine von $\mathbb{C}$ herkommende (mit passenden Einschränkungen versehene) arithmetische Struktur auf $\mathbb{C}_\infty$ hat.

[32] Wie üblich heißt f meromorph, wenn f an allen Stellen meromorph ist. Man beachte, dass nach dieser Definition meromorphe Funktionen auch lokal konstant mit Wert ∞ sein können.

Für $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ ist damit $f \in M(\Omega)$ genau dann, wenn $1/f \in M(\Omega)$ gilt. Weiter setzen wir $P(f) := Z(1/f)$.[33] Ist $a \in P(f)$ und f nicht lokal konstant($= \infty$) an a, so nennt man a eine **Polstelle** von f. Man spricht dann von einem Pol der Ordnung n wenn $1/f$ eine Nullstelle der Ordnung n an a hat. Ist f um keine Stelle konstant $= \infty$, so ist $P(f)$ die Polstellenmenge von f und nach Bemerkung 3.2 dann diskret in Ω. Sind $f, g \in M(\Omega)$ um keine Stelle lokal konstant mit Wert 0 oder ∞, so sind $f + g$ und $f \cdot g \in M(\Omega)$ (und damit auch $f/g = f \cdot (1/g)$) in folgendem Sinne: Die jedenfalls bis auf Polstellen von f und g auf Ω punktweise definierten Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ haben eindeutig bestimmte stetige und damit nach Satz 3.8 meromorphe Fortsetzungen auf Ω, die man dann auch mit $f + g$ beziehungsweise $f \cdot g$ bezeichnet ([Ü]).

Beispiel 3.16 Sind f, g ganze Funktionen und ist $g \neq 0$, so ist $f/g \in M(\mathbb{C})$. So sind etwa

$$\tan = \sin / \cos \qquad \text{und} \qquad \cot = 1/\tan$$

meromorph in $\mathbb{C}$. Wegen $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und $Z(\cos) = \pi(\mathbb{Z} + 1/2) = P(1/\cos)$, wobei alle Nullstellen von von erster Ordnung sind, hat tan Nullstellen erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und cot an den Stellen $(k + 1/2)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also hat $\cot = 1/\tan$ Pole erster Ordnung an den Stellen $k\pi$ und $\tan = 1/\cot$ Pole erster Ordnung an den Stellen $(k + 1/2)\pi$.

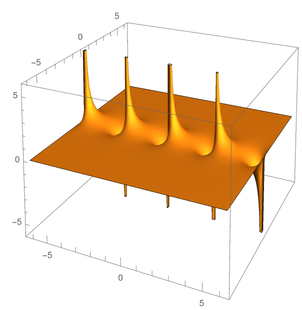

Figure 6: Re(cot).

Bemerkung und Definition 3.17 Es sei $f : C_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ eine rationale Funktion, also $f = P/Q$ mit Polynomen P, Q, die ohne Einschränkung keine gemeinsamen Nullellen haben. Dann ist f meromorph in $\mathbb{C}_\infty$.[34] Damit ist $(f, \mathbb{C}_\infty)$ ein diskretes dynamisches System.[35] Ist dabei P oder Q nicht konstant, so ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra $f(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}_\infty$, also f surjektiv.

[33] Ist X eine Menge und $f : X \to \mathbb{C}_\infty$, so schreiben wir wieder $Z(f)$ für die Nullstellenmenge.

[34] Vgl. https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_GW_WS2020-21.pdf, B. 4.16. Man beachte, dass $f = \infty$ auch als rationale Funktion aufgefasst wird. Umgekehrt sind Funktionen $f \in C(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}_\infty)$, die auf $\mathbb{C}$ eingeschränkt meromorph sind, schon rational.

[35] Insbesondere ist also für Polynome P die das Newton-Verfahren definierende rationale Funktion f mit

$$f(z) = z - P(z)/P'(z) \quad (z \in \mathbb{C}_\infty)$$

ein dynamisches System $(f, \mathbb{C}_\infty)$.

Bemerkung 3.18 Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\det A = ad - bc \neq 0$ heißt die rationale Funktion $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit

$$\varphi_A(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ a/c, & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

eine **Möbius-Transformation**. Man kann nachrechnen, dass $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ gilt. Insbesondere ist φ_A bijektiv mit Umkehrfunktion $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.[36] Für $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & -w \\ \overline{w} & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\varphi_w(z) := \varphi_A(z) = \frac{z-w}{1+z\overline{w}} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Da für $t \in \mathbb{R}$

$$\sin(\arctan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

gilt ([Ü]), ergibt sich für $w \in \mathbb{C}$ und $z \neq -1/\overline{w}$ durch Ausmultiplizieren im Nenner

$$\sin(\arctan|\varphi_w(z)|) = \frac{|\varphi_w(z)|}{\sqrt{1+|\varphi_w(z)|^2}} = \frac{|z-w|}{\sqrt{|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2}} = \chi(z,w).$$

Mit $\arctan|\infty| := \pi/2$ und mit $\varphi_\infty(z) = 1/z$ gilt die Gleichheit von linker und rechter Seite auch für $z = -1/\overline{w}$ und $w = \infty$. Mit

$$\sigma(z,w) := \arctan|\varphi_w(z)|$$

ist dann insbesondere

$$\chi(z,w) \leq \sigma(z,w) \leq \frac{\pi}{2}\chi(z,w).$$

Tatsächlich definiert σ ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$, genannt **sphärische Metrik**, was wir allerdings weder nutzen noch beweisen werden.[37]

Bemerkung 3.19 Es sei (S,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist für kompakte metrische Räume (K,d') auf $C(K,S)$ durch

$$d_K(f,g) := d_{K,S}(f,g) := \max_{x\in K} d(f(x),g(x))$$

eine vollständige Metrik definiert.[38] Konvergenz einer Folge bezüglich d_K bedeutet gleichmäßige Konvergenz. Im Fall $S = \mathbb{C}$ ist d_K die von der Maximumnorm induzierte Metrik

$$d_K(f,g) = \max_K |f-g|.$$

[36]Damit ist die Menge der Möbius-Transformationen eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathbb{C}_\infty$.

[37]$\sigma(z,w)$ entspricht geometrisch der Länge des kleineren Bogens eines Großkreises, auf dem die beiden Urbildpunkte $\varphi(z)$ und $\varphi(w)$ unter der stereographischen Projektion liegen. Sind die beiden Punkte keine Gegenpunkte, so existiert genau ein solcher Großkreis; Gegenpunkte haben stets den sphärischen Abstand $\pi/2$. Die Abbildung $z \mapsto 1/z$ ist auch bzgl. σ eine Isometrie.

[38]siehe etwa Bem. 9.9 in https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf.

Bemerkung und Definition 3.20 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Für

$$K_m := K_m(\Omega) := \{z \in \Omega : \mathrm{dist}_\chi(z, \partial\Omega) \geq 1/m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

gilt $K_m = \mathbb{C}_\infty$ für $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ und allgemein

- $K_m \subset \Omega$ ist kompakt mit $K_m \subset (K_{m+1})^\circ$.
- Für alle $K \subset \Omega$ kompakt ist $K \subset K_m$ für m genügend groß.

Wir nennen $(K_m) = (K_m(\Omega))$ die **Standardausschöpfung** von Ω. Ist nun (S, d) ein vollständiger metrischer Raum, so definieren wir für $f, g \in C(\Omega, S)$ mit $d_\emptyset(f, g) := 0$

$$d_\Omega(f, g) := d_{\Omega,S}(f, g) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \min\{1/m, d_{K_m}(f, g)\} \quad (\leq 1)\,.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass d_Ω eine Metrik auf $C(\Omega, S)$ ist. Im Weiteren soll stets $C(\Omega, S)$ mit dieser Metrik versehen sein.

Bemerkung und Definition 3.21 Es seien (S, d), (X, d') metrische Räume und $f_n : X \to S$. Dann heißt die Folge (f_n) **lokal gleichmäßig konvergent** (auf X), falls zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U von a so existiert, dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig auf U konvergiert. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, so gilt $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω genau dann, wenn (f_n) gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen gegen f konvergiert.[39]

Satz 3.22 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen und (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt*

1. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\Omega, S)$ ist genau dann d_Ω-konvergent, wenn sie lokal gleichmäßig auf Ω konvergiert.*
2. *Der metrische Raum $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ ist vollständig.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$: Gilt $f_n \to f$ in $(C(\Omega, S), d_\Omega)$ und ist $K \subset \Omega$ kompakt, so wählen wir ein $M = M_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_M$. Dann folgt

$$\min\{1/M, d_{K_M}(f, f_n)\} \leq d_\Omega(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also auch $d_{K_M}(f, f_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und wegen $K \subset K_M$ damit

$$d_K(f, f_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

$\Leftarrow$: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $M = M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/M < \varepsilon$. Also ist

$$\sup_{m\geq M} \min\{1/m, d_{K_m}(f, f_n)\} \leq 1/M < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

[39] ergibt sich aus der der Äquivalenz von Kompaktkeit und Überdeckungskompaktheit; siehe Anhang C

Weiter existiert ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d_{K_M}(f, f_n) < \varepsilon$ für $n > N$. Damit ist auch

$$\max_{1 \leq m \leq M} \min\{1/m, d_{K_m}(f, f_n)\} < \varepsilon$$

für $n > N$, also auch $d_\Omega(f, f_n) < \varepsilon$ für $n > N$.
2. Die Überlegungen aus 1. zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine d_Ω-Cauchyfolge ist, wenn $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C(K, S), d_K)$ für alle kompakten Teilmengen K von Ω ist. Ist also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine d_Ω-Cauchyfolge, so existiert nach Bemerkung 3.19 für alle kompakten, nichtleeren $K \subset \Omega$ eine stetige Funktion $f_K : K \to S$ mit $f_n \to f_K$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig auf K. Durch $f(z) := f_K(z)$, falls $z \in K$, ist damit eine Grenzfunktion $f \in C(\Omega, S)$ definiert. □

Im Weiteren sei $\mathbb{C}$ stets mit der euklidschen Metrik und $\mathbb{C}_\infty$ mit der chordalen Metrik χ versehen. Wie üblich schreiben wir kurz $C(X) := C(X, \mathbb{C})$.

Bemerkung 3.23 Als Anwendung von der Cauchyschen Ungleichung ergibt sich: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen[40] und sind $f_n \in H(\Omega)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist $f \in H(\Omega)$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig auf Ω. Damit ist $H(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega), d_\Omega)$. Also ist auch $(H(\Omega), d_\Omega)$ als metrischer Raum vollständig.

Bemerkung 3.24 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Konvergiert eine Folge (f_n) in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C(\Omega)$ (also eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion), so existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $n_K \in \mathbb{N}$ mit $f_n|_K \in C(K)$ für $n \geq n_K$ und $f_n \to f$ $(C(K), d_K)$ für $n \to \infty$.[41]

> Denn: Mit K ist auch $f(K) \subset \mathbb{C}$ kompakt, also insbesondere beschränkt in $\mathbb{C}$ und damit ist $\delta := \mathrm{dist}_\chi(f(K), \infty) > 0$. Wegen $f_n \to f$ gleichmäßig auf K (nach Bemerkung und Definition 3.21) existiert ein $n_K \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{dist}_\chi(f_n(K), \infty) \geq \delta/2$ für $n \geq n_K$. Nach Bemerkung 3.14 gilt dann $f_n|_K \in C(K)$ für $n \geq n_K$ und $f_n \to f$ in $(C(K), d_K)$.

Satz 3.25 *Ist $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, so ist $M(\Omega)$ abgeschlossen in $(C(\Omega, \mathbb{C}_\infty), d_\Omega)$ also als metrischer Raum vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Folge in $M(\Omega)$ mit $f_n \to f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$.
Ist $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq \infty$, so existiert eine offene Umgebung V von a mit $f|_V \in C(V)$. Ist $K := B_r(a) \subset V$, so gilt $f_n|_K \in C(K)$ für n genügend groß und $f_n \to f$ in $(C(K), d_K)$ nach Bemerkung 3.24. Ist $U = U_r(a)$, so ist $f|_U \in H(U)$ nach Bemerkung 3.23.
Ist $f(a) = \infty$, so ist $(1/f)(a) = 0$. Aus $f_n \to f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ folgt auch $1/f_n \to 1/f$ in $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$, da $w \mapsto 1/w$ eine Isometrie auf $\mathbb{C}_\infty$ ist. Wie vorher sieht man, dass $(1/f)|_U \in H(U)$ und damit $f|_U \in M(U)$ für eine Umgebung U von a gilt.

□

[40] Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$, also $\infty \notin \Omega$, so ist Ω genau dann offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, wenn Ω offen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist. Daher gibt kein Problem, wenn wir kurz davon sprechen, dass $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen ist.
[41] Hier ist d_K die von der Maximumnorm auf $C(K)$ induzierte Metrik.

4 Normal oder nicht – komplexe Dynamik

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Kompaktheitseigenschaften von Familien meromorpher Funktionen.[42] Zunächst betrachten wir Familien $\mathscr{F}$ stetiger Funktionen. Für $\mathscr{F} \subset C(X,S)$ und $A \subset X$ schreiben wir $\mathscr{F}|_A := \{f|_A : f \in \mathscr{F}\}$.

Definition 4.1 Es seien (S,d) und (X,d') metrische Räume. Eine Familie $\mathscr{F} \subset C(X,S)$ heißt **gleichgradig stetig** an der Stelle $a \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d'(x,a) < \delta$ und alle $f \in \mathscr{F}$. Ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig an allen $a \in X$, so heißt $\mathscr{F}$ kurz gleichgradig stetig.

Sind (S,d) ein vollständiger metrischer Raum, (K,d') kompakt und ist $\mathcal{F} \subset C(K,S)$ relativ kompakt, d. h. jede Folge in $\mathscr{F}$ hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, so ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig ([Ü]). Im Fall kompakter S gilt genauer

Satz 4.2 (Arzelà-Ascoli)
Sind (S,d) und (K,d') kompakte metrische Räume, so ist $\mathscr{F} \subset C(K,S)$ relativ kompakt genau dann, wenn $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig ist.

Beweis. Es reicht, $\Leftarrow$ zu zeigen, und dazu, dass $\mathscr{F}$ präkompakt ist (siehe Bemerkung C.3). Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes $a \in K$ existiert ein $\delta_a = \delta_{a,\varepsilon} > 0$ mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle x mit $d'(x,a) < \delta_a$ und alle $f \in \mathscr{F}$. Da K kompakt und damit überdeckungskompakt ist (siehe wieder Bemerkung C.3) und da $(U_{\delta_a})_{a\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, existiert eine endliche Teilmenge E von K mit

$$K = \bigcup_{a\in E} U_{\delta_a}(a).$$

Da (S,d) kompakt ist, ist auch $(C(E,S), d_E) = (\mathrm{Abb}(E,S), d_E)$ kompakt.[43] Also ist $\mathscr{F}|_E$ präkompakt (da relativ kompakt), das heißt, für eine endliche Menge $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ gilt

$$\mathscr{F}|_E \subset \bigcup_{g\in\mathscr{E}} U_\varepsilon(g|_E)\ .$$

Es sei $f \in \mathscr{F}$. Dann existiert ein $g \in \mathscr{E}$ mit $f|_E \in U_\varepsilon(g|_E)$. Ist $x \in K$ beliebig, so ist $x \in U_{\delta_a}(a)$ für ein $a \in E$. Für dieses a gilt

$$d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d\big(g(x), g(a)\big) < \varepsilon,$$

also

$$d\big(f(x), g(x)\big) \le d\big(f(x), f(a)\big) + d\big(f(a), g(a)\big) + d\big(g(a), g(x)\big) < 3\varepsilon.$$

Folglich ist $d_K(f,g) < 3\varepsilon$ und damit $\mathscr{F} \subset \bigcup_{g\in\mathscr{E}} U_{3\varepsilon}(g)$. □

[42] Für die im Weiteren auftretenden Kompaktheitsbegriffe sei auf Anhang C verwiesen.

[43] siehe etwa Bem. 9.9 in `https://www.math.uni-trier.de/~mueller/EinfMathe/Einf_Mathe_Analysis_1617.pdf`.

Definition 4.3 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen und (S,d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Familie $\mathscr{F} \subset C(\Omega,S)$ heißt **normal**, falls $\mathscr{F}$ relativ kompakt in $(C(\Omega,S),d_\Omega)$ ist. Für $a \in \Omega$ nennen wir $\mathscr{F}$ **normal an** a, falls eine offene Umgebung U von a so existiert, dass $\mathscr{F}|_U$ normal ist. Um Normalität einer Familie in $C(\Omega,\mathbb{C}_\infty)$ von Normalität in $C(\Omega)$ zu unterscheiden, nennen wir im zweiten Fall die Familie auch **norm-normal**. Ist (f_n) eine Folge in $C(\Omega,S)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω, so ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ normal.

> Denn: Ist (g_k) eine Folge in $\mathscr{F}$, so existieren $k_n \in \mathbb{N}$ mit $g_k = f_{k_n}$. Ist (k_n) beschränkt, so existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ mit $k = k_N$ für $k \in I$. Dann gilt $g_k = g_{k_N} \to g_{k_N}$ für $I \ni k \to \infty$. Ist (k_n) unbeschränkt, so hat (k_n) eine streng wachsende Teilfolge $(k_n)_{n\in J}$ mit $n_k \to \infty$. Ist $I = \{k_n : n \in J\}$ so gilt $g_k = f_{k_n} \to f$ für $I \ni k \to \infty$.

Beispiel 4.4 Es seien $f_n(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathscr{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\mathbb{C}) \subset C(\mathbb{C},\mathbb{C}_\infty).$$

Hier gilt $f_n(z) \to 0$ für $n \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ und $f_n(z) \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ([Ü]). Insbesondere sind $\mathscr{F}|_{\mathbb{D}}$ norm-normal und $\mathscr{F}|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}}$ normal. Allerdings ist $\mathscr{F}$ an keiner Stelle in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ norm-normal.

Satz 4.5 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, (S,d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathscr{F} \subset C(\Omega,S)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\mathscr{F}$ ist normal.

b) $\mathscr{F}$ ist normal an allen Stellen a.

c) $\mathscr{F}$ ist gleichgradig stetig.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) ist klar.
b) $\Rightarrow$ c): Es seien $a \in \Omega$ und U eine offene Umgebung von a so, dass $\mathscr{F}|_U$ normal ist. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{F}$, so existiert eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_n)_{n\in I}$. Ist $r > 0$ mit $K := B_r(a) \subset U$, so konvergiert $(f_n)_{n\in I}$ auf K gleichmäßig. Also ist $\mathscr{F}|_K$ relativ kompakt in $C(K,S)$. Nach Satz 4.2 ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig an a.
c) $\Rightarrow$ a): Es sei (K_m) die Standardausschöpfung von Ω. Nach Satz 4.2 ist $\mathscr{F}|_{K_m}$ für jedes m relativ kompakt. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so ergibt sich mit $I_0 := \mathbb{N}$ induktiv, dass zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n)_{n\in I_m}$ von $(f_n)_{n\in I_{m-1}}$ existiert, die gleichmäßig auf K_m konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt $n_j > n_{j-1}$ mit $n_j \in I_j$, so konvergiert die Folge $(f_{n_j})_j$ gleichmäßig auf allen K_m und damit auch gleichmäßig auf allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$. $\square$

Satz 4.6 (Vitali)
Es seien $G \subset \mathbb{C}_\infty$ ein Gebiet und $\mathscr{F} \subset M(G)$ eine normale Familie. Ist (f_n) eine Folge in $\mathscr{F}$ so, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf einer Menge $A \subset G$ mit Häufungspunkt in G konvergiert, so konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig auf G.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede in $M(G)$ konvergente Teilfolge von (f_n) den gleichen Grenzwert hat (siehe Bemerkung und Definition C.1). Dazu seien $(f_n)_{n\in I}$ und $(f_n)_{n\in J}$ konvergente Teilfolgen von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung stimmen die Grenzfunktionen auf A überein. Nach dem Identitätssatz (der auch für meropmorphe Funktionen gilt) sind dann die Grenzfunktionen schon gleich. □

Wir starten nun mit der Untersuchung dynamischer Systeme $(f, \mathbb{C}_\infty)$ in Fall rationaler Funktionen $f = P/Q$ vom Grad > 1 [44] und $(f, \mathbb{C})$ im Fall transzendenter ganzer Funktionen f.[45] Wir schreiben im Weiteren kurz RT für die Menge dieser Funktionen und

$$D := D(f) := \begin{cases} \mathbb{C}_\infty & \text{falls } f \text{ rational} \\ \mathbb{C} & \text{falls } f \text{ transzendent} \end{cases}.$$

Bemerkung und Definition 4.7 Es sei $f \in RT$ und $\langle f \rangle := \{f^n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset M(D(f))$. Dann heißen

$$F := F(f) := \{z \in D(f) : \langle f \rangle \text{ normal an } z\}$$

die **Fatou-Menge** von f und $J := J(f) := D(f) \setminus F$ [46] die **Julia-Menge** von f. Aus der Definition ergibt sich, dass F offen und damit J abgeschlossen in $D(f)$ ist. Außerdem ist $\langle f \rangle|_F$ normal nach Satz 4.5. Im Fall transzendenter f setzen wir noch

$$I(\infty) := I(f, \infty) := \big\{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \to \infty \ (n \to \infty)\big\}.$$

Beispiel 4.8 Es sei $f(z) = z^2$, also $f^n(z) = z^{2^n}$ für $z \in \mathbb{C}_\infty$. Hier ist $a = 0$ ein superattraktiver Fixpunkt und es gilt $f^n(z) \to 0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}$.[47] Außerdem gilt $f^n(z) \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Also ist $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S} \subset F(f)$. Aus dem Satz von Vitali folgt, dass $\mathbb{S} \cap F(f) = \varnothing$ ist. Also ist hier $J(f) = \mathbb{S}$. Das System $(f, \mathbb{S})$ ist die Winkelverdopplung, die wir bereits als exakt und chaotisch identifiziert haben (siehe Beispiele 1.11 und 2.2).

Nach Definition sind Attraktionsbereiche vollständig invariant. Entsprechendes gilt für die Fatou- und die Julia-Menge:

[44] Der Grad von f ist das Maximum der Grade von P und Q und unabhängig von der Wahl von P, Q für teilerfremde P, Q.

[45] eine ganze Funktion nennt man transzendent, falls sie kein Polynom ist

[46] im Fall rationaler f, wie etwa im Fall des Newton-Fraktals, ist die Sphäre $\mathbb{C}_\infty$ der natürliche Rahmen; für entsprechende Bilder siehe etwa https://mathematica.stackexchange.com/questions/15047/how-to-draw-fractal-images-of-iteration-functions-on-the-riemann-sphere.

[47] mit quadratischer Konvergenz

Satz 4.9 *Für $f \in RT$ sind $F(f)$ und $J(f)$ vollständig invariant.*

Beweis. Zunächst sind $f^{-1}(F)$ und $f(F)$ wegen der Stetigkeit und Offenheit von f offen. Es seien $\alpha \in f^{-1}(F)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $\langle f \rangle$ an $a := f(\alpha) \in F$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\chi(f^n(z), f^n(a)) < \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in U := U_\delta(a)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von α. Wegen

$$\chi(f^{n+1}(\zeta), f^{n+1}(\alpha)) = \chi(f^n(f(\zeta)), f^n(a)) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0,\, \zeta \in f^{-1}(U))$$

ist $\langle f \rangle$ gleichgradig stetig an α. Da $\alpha \in f^{-1}(F)$ beliebig war, ist $f^{-1}(F) \subset F$ nach Satz 4.5. Es seien nun $b \in f(F)$ und $\varepsilon > 0$. Ist $a \in F$ mit $f(a) = b$ und ist $U = U_\delta(a)$ wie vorher, so ist $V := f(U)$ wegen der Offenheit von f eine Umgebung von b. Sind $w \in V$ und $z \in U$ mit $f(z) = w$, so ist

$$\chi\big(f^n(w), f^n(b)\big) = \chi\big(f^{n+1}(z), f^{n+1}(a)\big) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und damit $\langle f \rangle$ gleichgradig stetig an b. Da b in $f(F)$ beliebig war, ist $f(F) \subset F$ nach Satz 4.5. Insgesamt ist also F vollständig invariant und nach Bemerkung 1.8 damit auch J. $\square$

Wir zeigen nun, dass Fatou- und Julia-Menge von f und g bei geeigneter Konjugiertheit entsprechen.

Satz 4.10 *Sind $f, g \in RT$ und existiert eine rationale Funktion h mit $f \circ h = h \circ g$, so gilt $F(f) \supset h(F(g))$. Ist h eine Möbius-Transformation, so gilt $F(f) = h(F(g))$ und $J(f) = h(J(g))$.*

Beweis. Nach Satz 4.5 ist $\langle g \rangle|_{F(g)}$ gleichgradig stetig. Da $\mathbb{C}_\infty$ kompakt und h stetig ist, ist h gleichmäßig stetig. Damit ist auch $\{f^n \circ h|_{F(g)} = h \circ g^n|_{F(g)} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ([Ü]). Wie im Beweis zu Satz 4.9 sieht man, dass auch $\langle f \rangle|_{h(F(g))}$ gleichgradig stetig ist, also $h(F(g)) \subset F(f)$ nach Satz 4.5. Ist h eine Möbius-Transformation, so folgt $F(f) = h(F(g))$ durch Anwendung der ersten Aussage mit h^{-1}. Mittels Komplementbildung sieht man dann auch, dass $J(f) = h(J(g))$ gilt. $\square$

Beispiel 4.11 Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Newton-Verfahren für das quadratische Polynom $P(z) = z^2 - a^2$.[48] Hier ist

$$f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{a^2}{z}\Big) \qquad (z \in C_\infty).$$

Die Möbius-Transformation h mit

$$h(w) = a\frac{w+1}{w-1} \qquad (w \in \mathbb{C})$$

[48] also das Babylonische Wurzelziehen

bildet das Paar $(0,\infty)$ auf das Nullstellenpaar $(-a,a)$ von P ab und den Kreis $\mathbb{S}$ wegen $\mathrm{Re}((w+1)/(w-1)) = (|w|^2-1)/|w-1|^2$ für $w \neq 1$ auf die erweiterte imaginäre Achse $i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Weiterhin gilt

$$(f\circ h)(w) = \frac{a}{2}\Big(\frac{w+1}{w-1} + \frac{w-1}{w+1}\Big) = \frac{a}{2}\frac{(w+1)^2+(w-1)^2}{w^2-1} = a\frac{w^2+1}{w^2-1} = h(w^2).$$

Also sind f und $w \mapsto w^2$ vermittels h konjugiert. Nach Satz 4.10 und Beispiel 4.8 gilt $F(f) = \mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$ und $J(f) = i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Für $\pm\mathrm{Re}(z) > 0$ gilt $f^n(z) \to \pm a$ (mit quadratischer Geschwindigkeit) und aus den Beispielen 1.11 und 2.2 ergibt sich, dass $(f, i\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ exakt und chaotisch ist.

Bemerkung 4.12 Es sei $h(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}_\infty$. Ist f rational und $f_* := h\circ f\circ h$, so ist wegen $h^{-1} = h$ die (rationale) Funktion f_* konjugiert zu f vermittels der isometrischen Möbiustransformation h. Man kann sich bei der Untersuchung des dynamischen Verhaltens von f an ∞ daher bei Bedarf auf die Untersuchung des Verhaltens von f_* an der Stelle 0 zurückziehen. Nach Satz 4.10 ist $F(f) = 1/F(f_*)$ und $J(f) = 1/J(f_*)$.

Bemerkung und Definition 4.13 Es seien $f \in RT$ und p ein periodischer Punkt von f mit Periode m. Gilt $f^{nm} = (f^m)^n \to p$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf einer Umgebung U von p, so folgt $f^{nm+k} = f^k \circ f^{mn} \to f^k(p)$ gleichmäßig auf U für $n \to \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ ([Ü]). Nach Bemerkung und Definition 4.3 ist $\mathscr{F}_{m,k} := \{f^{nm+k}|_U : n \in \mathbb{N}\}$ normal für $k = 0,\dots,m-1$ und dann auch $\langle f\rangle|_U = \bigcup_{k=0}^{m-1} \mathscr{F}_{m,k}$.[49] Also ist $p \in F(f)$ und damit $O(p) \subset F(f)$. Die Zahl

$$\lambda(p) := \lambda(f,p) := \begin{cases} (f^m)'(p), & \text{falls } p \in \mathbb{C} \\ ((f^m)_*)'(0), & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

heißt **Multiplikator** von f an p. Ist $|\lambda(p)| < 1$, so gilt $f^{nm} \to p$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf einer Umgebung von p nach Bemerkung und Definition 1.6 und damit $O(p) \subset F(f)$.

Beispiel 4.14 Für $f(z) = c\sin z$, wobei $c \in \mathbb{C}$, ist $a = 0$ Fixpunkt mit $\lambda(0) = f'(0) = c$. Also ist $0 \in F(f)$, falls $|c| < 1$. Ist $c = 1$, so kann man sich überlegen, dass $0 \in J(f)$ gilt ([Ü]).[50]

Satz 4.15 *Ist $f \in RT$ ein Polynom, so ist $J(f)$ nichtleer und kompakt in $\mathbb{C}$.*[51]

Beweis. Ist f ein Polynom, so ist 0 ein superattraktiver Fixpunkt von f_* und damit $\lambda(f,\infty) = 0$ [Ü]). Insbesondere ist $\infty \in F(f)$ und es gilt $f^n \to \infty$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf einer Umgebung von ∞. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existiert auch

[49] endliche Vereinigungen relativ kompakter Mengen sind relativ kompakt.

[50] Interessante Bilder zum Thema: etwa http://paulbourke.net/fractals/sinjulia/.

[51] Man kann zeigen, dass $J(f)$ stets nichtleer ist. Der Beweis ist relativ leicht für rationale Funktionen, aber nicht leicht für transzendente.

(mindestens) ein Fixpunkt in $\mathbb{C}$, nämlich eine Nullstelle von $z \mapsto f(z) - z$.[52] Dann ist aber $F(f) \neq \mathbb{C}_\infty$ (sonst würde $f^n \to \infty$ auf $\mathbb{C}_\infty$ nach dem Satz von Vitali gelten), also $J(f) \neq \varnothing$ und beschränkt in $\mathbb{C}$ und damit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. $\square$

Bemerkung und Definition 4.16 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen. Eine Familie $\mathscr{F} \subset C(\Omega)$ heißt **(lokal) beschränkt** wenn zu jedem $a \in \Omega$ ein $r > 0$ so existiert, dass $\mathscr{F}|_{B_r(a)}$ beschränkt im Raum $(C(B_r(a)), \|\cdot\|_{B_r(a)})$ ist[53] also

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \max_{B_r(a)} |f| < \infty$$

gilt. In dem Fall ist $\mathscr{F}|_K$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω beschränkt in $(C(K), \|\cdot\|_K)$. Man sieht leicht ([Ü]): Ist $\mathscr{F} \subset C(\Omega)$ norm-normal, so ist $\mathscr{F}$ beschränkt.

Der Schrankensatz zeigt, dass die Verzerrung einer differenzierbaren Funktionen auf Strecken durch den Betrag der Ableitung abgeschätzt werden kann. Umgekehrt ergibt sich für holomorphe Funktionen aus der Cauchyschen Ungleichung und der Cauchyschen Integralformel auch eine Abschätzung der Ableitung durch die Funktion selbst. Dies führt zu

Satz 4.17 (Montel für holomorphe Funktion)
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ist $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ genau dann norm-normal, wenn $\mathscr{F}$ beschränkt ist.[54]

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 4.16 ist nur $\Leftarrow$ zu zeigen. Dazu seien $a \in \Omega$, $r > 0$ mit $B_r(a) \subset \Omega$ und $R := \sup_{f \in \mathscr{F}} \max_{B_r(a)} |f|$. Anwendung der Cauchyschen Ungleichung in Verbindung mit der Cauchyschen Integralformel auf $g(w) = f(a + rw)$ ergibt

$$\max_{B_{r/2}(a)} |f'| \leq 4r^{-1} \max_{B_r(a)} |f| \leq 4r^{-1} R.$$

Nach dem Schrankensatz ist[55]

$$|f(z) - f(a)| \leq \max_{[a,z]} |f'| \cdot |z - a| \leq 4r^{-1} R |z - a| \qquad (f \in \mathscr{F},\ z \in B_{r/2}(a)).$$

Damit ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig an a. Da a beliebig war, ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig. Nach Satz 4.5, angewandt mit $S = B_R(0)$, ist $\mathscr{F}|_{U_r(a)}$ norm-normal. $\square$

Wir wollen nun einen Normalitätssatz für meromorphe Funktionen herleiten. Dabei wir der Betrag der klassischen Ableitung durch eine passende sphärische Ableitung ersetzt.

[52] Während jedes Polynom vom Grad ≥ 2 Fixpunkte in $\mathbb{C}$ hat, gibt es transzendente Funktionen ohne Fixpunkt, etwa $z \mapsto e^z + z$.

[53] Ist (K, d') kompakt, so ist der normierte Raum $C(K) = C(K, \mathbb{C})$ mit der Max-Norm $\|f\|_K := \max_K |f|$ ein Banachraum, d. h. die induzierte Metrik d_K ist vollständig; vgl. Bemerkung 3.19.

[54] Man hat also in $H(\Omega)$ eine dem Satz von Bolzano-Weierstraß entsprechende Aussage.

[55] $[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ bezeichnet die Strecke zwischen a und b

Bemerkung und Definition 4.18 Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in M(\Omega)$. Ist $a \in \Omega$, so heißt

$$f^{\#}(a) := \lim_{z \to a} \frac{\chi(f(z), f(a))}{|z-a|} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \chi(f(a+h), f(a))$$

die **sphärische Ableitung** von f an a.[56] Nach Definition ist $f^{\#} \geq 0$. Mit der Darstellung von χ aus Bemerkung und Definition 3.14 und der Isometrie von $z \mapsto 1/z$ ergibt sich

$$f^{\#}(a) = (1/f)^{\#}(a) = \begin{cases} |f'(a)|/(1+|f(a)|^2), & \text{falls } f(a) \neq \infty \\ |(1/f)'(a)|/(1+|(1/f)(a)|^2), & \text{falls } f(a) = \infty \end{cases}$$

und die Stetigkeit von $f^{\#}$. Außerdem ist die Abbildung

$$M(\Omega) \ni f \mapsto f^{\#} \in C(\Omega)$$

stetig ([Ü]).

Beispiel 4.19 Für $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ gilt $\mathrm{id}^{\#}(z) = 1/(1+|z|^2)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 4.20 Der Betrag der klassischen Ableitung f' verändert sich nicht, wenn man f eine affin-lineare Translation[57] $\tau_{a,b}(u) = a + bu$ mit $b \in \mathbb{S}$, nachschaltet, das heißt $|(\tau_{a,b} \circ f)'| = |f'|$. Eine entsprechende Eigenschaft kann man für die sphärische Ableitung und geeignete Möbius-Transformationen herleiten. Für $c \in \mathbb{C}$ betrachten wir φ_c mit

$$\varphi_c(u) := \frac{u-c}{1+u\bar{c}} \qquad (u \in \mathbb{C})$$

(vgl. Bemerkung und Definition 3.18). Dann gilt

$$(\varphi_c)'(u) = \frac{1+|c|^2}{(1+u\bar{c})^2} \qquad (u \in \mathbb{C} \setminus \{-1/\bar{c}\}).$$

Mit $|1+u\bar{c}|^2 + |u-c|^2 = (1+|u|^2)(1+|c|^2)$ folgt

$$(\varphi_c)^{\#}(u) = \frac{1+|c|^2}{|1+u\bar{c}|^2 + |u-c|^2} = \frac{1}{1+|u|^2} = \mathrm{id}^{\#}(u).$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt Gleichheit von rechter und linker Seite auch für $u = -1/\bar{c}$. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ergibt sich mit $\varphi_\infty(u) = 1/u$ für $c \in \mathbb{C}_\infty$ und $f \in H(\Omega)$ nach der sphärischen Kettenregel ([Ü])

$$(\varphi_c \circ f)^{\#} = ((\varphi_c)^{\#} \circ f)|f'| = f^{\#} .$$

Durch lokale Anwendung der Kettenregel auf $1/f$ sieht man, dass $(\varphi_c \circ f)^{\#} = f^{\#}$ auch für meromorphe f gilt.

[56] Man beachte, dass hier Ω offen in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ ist. Der Fall $\infty \in \Omega$ würde eher $\chi(z,w)$ im Nenner sinnvoll machen.

[57] also eine Isometrie der Ebene

Wir zeigen nun, dass durch die sphärische Ableitung $f^\#$ die Verzerrung von f als Abbildung von $\Omega \subset \mathbb{C}$ in die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C}_\infty$ abgeschätzt werden kann.

Satz 4.21 (Sphärischer Schrankensatz)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in M(G)$. Sind $a, b \in G$ mit $[a, b] \subset G$, so ist

$$\chi(f(b), f(a)) \leq |b-a| \max_{[a,b]} f^\#.$$

Beweis. Ist f lokal konstant an einer Stelle z, so ist f konstant nach dem Identitätssatz. Wir können also voraussetzen, dass f an keiner Stelle lokal konstant ist.
1. Zunächst sei f so, dass $f(z) \neq f(a)$ und $f(z) \neq -1/\overline{f(a)}$ für alle $z \in (a, b)$ gilt.[58] Ist φ_c wie in Bemerkung 4.20, so existiert eine offene Menge $D \supset [0, 1)$ so, dass

$$\psi(\zeta) := (\varphi_{f(a)} \circ f)(a + \zeta(b-a))$$

eine auf D holomorphe Funktion definiert mit $\psi(0) = 0$. Außerdem ist ψ nullstellenfrei auf $(0, 1)$ und damit $|\psi| = \sqrt{\psi \cdot \overline{\psi}}$ differenzierbar auf $(0, 1)$ und stetig auf $[0, 1)$. Wegen $\arctan(x) \to \pi/2$ für $x \to +\infty$ ist $g := \arctan \circ |\psi|$ stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $(0, 1)$. Ist σ die sphärische Metrik, so existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$\sigma(f(b), f(a)) = \arctan |\varphi_{f(a)}(f(b))| = g(1) = g(1) - g(0) = g'(\tau) = \frac{|\psi|'(\tau)}{1 + |\psi(\tau)|^2}$$

und mit umgekehrter Dreiecksungleichung ist $|\psi|' \leq |\psi'|$, also $\sigma(f(b), f(a)) \leq \psi^\#(\tau)$. Weiter ist nach der sphärischen Kettenregel und Bemerkung 4.20 mit $\xi := a + \tau(b-a)$

$$\psi^\#(\tau) = (\varphi_{f(a)} \circ f)^\#(\xi) \cdot |b-a| = f^\#(\xi) \cdot |b-a|,$$

also auch

$$\chi(f(b), f(a)) \leq \sigma(f(b), f(a)) \leq f^\#(\xi) \cdot |b-a|.$$

2. Ist f beliebig, so existiert zu jedem $\alpha \in [a, b]$ eine offene Umgebung U_α so dass $f(z) \neq f(\alpha)$ und $f(z) \neq -1/\overline{f(\alpha)}$ für $z \in U_\alpha \setminus \{\alpha\}$. Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ existiert eine endliche Menge $A \subset [a, b]$ mit $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Daher gibt es Punkte $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ so, dass mit $a_j := a + s_j(b-a)$ für $j = 0, \ldots, n$ die Bedingungen, aus 1., also $f(z) \neq f(a_j)$ und $f(z) \neq -1/\overline{f(a_j)}$ auf (a_{j-1}, a_j), erfüllt sind (beachte: $[a_{j-1}, a_j] = [a_j, a_{j-1}]$). Durch Anwendung von 1. auf die Strecken $[a_{j-1}, a_j]$ ergibt sich unter Verwendung der Dreiecksungleichung für χ die Behauptung (man beachte dabei, dass $\sum_{j=1}^{n} |a_j - a_{j-1}| = |b-a|$ gilt). □

Satz 4.22 (Marty)
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, so ist $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ genau dann normal, wenn $\mathscr{F}^\# := \{f^\# : f \in \mathscr{F}\}$ beschränkt ist.

[58] $(a, b) := \{a + t(b-a) : t \in (0, 1)\}$ bezeichnet die Strecke zwischen a und b ohne die Punkte a, b.

Beweis. $\Leftarrow$: Es seien $a \in \Omega$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \subset \Omega$. Ist $z \in U_\rho(a)$, so ergibt sich für $f \in \mathscr{F}$ mit dem sphärischen Schrankensatz

$$\chi(f(z), f(a)) \le \max_{[a,z]} f^\# \cdot |z-a| \le |z-a| \sup_{f\in\mathscr{F}} \max_{B_\rho(a)} f^\#.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig (an a und damit überall). Nach Satz 4.5 ist $\mathcal{F}$ normal.
$\Rightarrow$: Da $f \mapsto f^\#$ stetig ist, folgt aus der Normalität von $\mathscr{F}$ auch die von $\mathscr{F}^\#$. Nach Bemerkung und Definition 4.16 ist $\mathscr{F}^\#$ beschränkt. $\square$

Bemerkung und Definition 4.23 Es seien $f \in RT$ und p ein periodischer Punkt von f. Ist $|\lambda(p)| > 1$, so nennt man p **abweisend**. In diesem Fall ist $p \in J(f)$.

Denn: Nach Definition der Julia-Menge gilt $J(f^m) \subset J(f)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also können wir annehmen, dass p ein Fixpunkt ist. Ohne Einschränkung sei dabei $p \in \mathbb{C}$ (sonst: f_* betrachten). Es gilt

$$(f^n)^\#(p) = |(f^n)'(p)|/(1+|p|^2)$$

und mit der Kettenregel $(f^n)'(p) = (f'(p))^n = \lambda(p)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$(f^n)^\#(p) = |\lambda(p)|^n/(1+|p|^2) \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Nach dem Satz von Marty ist damit $p \in J(f)$.

Beispiel 4.24 Ist $f(z) = c \sin z$ für $z \in \mathbb{C}$, so ist $0 \in J(f)$ im Fall $|c| > 1$ (vgl. Beispiel 4.14).

5 Satz von Montel und Konsequenzen

Wir wollen nun einen für die komplexe Dynamik zentralen Satz beweisen, den großen Satz von Montel. Unser Zugang ist ein vergleichsweise neuer, der auf dem Reskalierungssatz von Zalcman basiert. Einleitend betrachten wieder die Familie $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M(\mathbb{C})$ mit $f_n(z) = z^n$. Nach Beispiel 4.8 ist $\mathcal{F}$ etwa an $z = 1$ nicht normal. Man kann zeigen, dass

$$e^\zeta = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (f_n \circ \varphi_n)(\zeta)$$

mit $\varphi_n(\zeta) = 1 + \zeta/n$ gilt, wobei die Konvergenz lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ ist ([Ü]). Es zeigt sich also, dass eine geeignete affin-lineare Skalierung im Argument der f_n an der Stelle 1 zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ konvergenten Folge mit nicht-konstanter Grenzfunktion führt. Wir werden beweisen, dass eine entsprechende Aussage ganz allgemein für nicht normale Familien gilt. Für $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ schreiben wir $\varphi_{a,\rho}(\zeta) = a + \rho\,\zeta$ und

$$A(\mathbb{C}) := \{\varphi_{a,\rho} : a \in \mathbb{C},\, \rho > 0\}$$

Satz 5.1 (Zalcman-Lemma)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ nicht normal an a. Dann existieren eine Folge (f_n) in $\mathscr{F}$, eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $a_n \to a$ und eine Nullfolge (r_n) positiver Zahlen so, dass für $\varphi_n := \varphi_{a_n,r_n}$ gilt:

1. *$f_n \circ \varphi_n \in M(\mathbb{D})$ mit $(f_n \circ \varphi_n)^\#(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Für alle $R < \infty$ existiert ein $n_R \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(B_R(0)) \subset \Omega$ für $n \geq n_R$ und*

$$\max_{B_R(0)} (f_n \circ \varphi_n)^\# \to 1 \quad (n \to \infty,\, n \geq n_R).$$

Beweis. Es sei (s_n) eine Folge positiver Zahlen mit $B_{s_n}(a) \subset \Omega$ und $s_n \to 0$. Aus dem Satz von Marty ergibt sich induktiv die Existenz einer Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit

$$s_n \cdot \max_{B_{s_n/2}(a)} f_n^\# \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Dann gilt auch

$$M_n := \max_{z\in B_{s_n}(a)} f_n^\#(z)(s_n - |z-a|) \geq \frac{s_n}{2} \cdot \max_{B_{s_n/2}(a)} f_n^\# \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge können wir voraussetzen, dass (M_n) wachsend ist mit $M_n \geq 1$ für alle n. Wir wählen $a_n \in U_{s_n}(a)$ mit

$$f_n^\#(a_n)\big(s_n - |a_n - a|\big) = M_n$$

und setzen $r_n := 1/f_n^\#(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und

$$r_n M_n = \frac{M_n}{f_n^\#(a_n)} = s_n - |a_n - a| \in [0, s_n],$$

also insbesondere $r_n \to 0$ für $n \to \infty$ und wegen der Dreiecksungleichung

$$a_n + r_n B_{M_n}(0) = B_{r_n M_n}(a_n) \subset B_{s_n}(a) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $\mathbb{D} \subset B_{M_n}(0)$ ist $\varphi_n(\mathbb{D}) \subset B_{s_n}(a) \subset \Omega$ und damit $f_n \circ \varphi_n$ definiert und meromorph in $\mathbb{D}$.
Nun sei $R < \infty$ gegeben und $n = n_R$ so gewählt, dass $R \leq M_{n_R}$. Sind $n \geq n_R$ und $\zeta \in B_R(0)$, so gilt $\varphi_n(\zeta) = a_n + r_n\zeta \in a_n + r_n B_{M_n}(0) \subset B_{s_n}(a)$ und damit

$$M_n \geq f_n^{\#}(\varphi_n(\zeta))\big(s_n - |\varphi_n(\zeta) - a|\big) \geq f_n^{\#}(\varphi_n(\zeta))(s_n - |a_n - a| - r_n|\zeta|)\,,$$

also mit der sphärischen Kettenregel

$$(f_n \circ \varphi_n)^{\#}(\zeta) = r_n f_n^{\#}(\varphi_n(\zeta)) \leq \frac{r_n M_n}{s_n - |a_n - a| - r_n|\zeta|} = \frac{r_n M_n}{r_n M_n - r_n|\zeta|} = \frac{1}{1 - |\zeta|/M_n}$$

und folglich

$$1 = r_n f_n^{\#}(a_n) = (f_n \circ \varphi_n)^{\#}(0) \leq \max_{B_R(0)} (f_n \circ \varphi_n)^{\#} \leq \frac{1}{1 - R/M_n} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

□

Unter den Bedingungen des Zalcman-Lemmas ist nach dem Satz von Marty für beliebiges $R < \infty$ die Familie $\{f_n \circ \varphi_n|_{U_R(0)} : n \geq n_R\}$ in $M(U_R(0))$ normal. Geeignete (affin-lineare) Skalierung im Argument führt also zu Normalität. Damit erhält man

Satz 5.2 (Reskalierungssatz von Zalcman)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ nicht normal an a. Dann existieren eine Folge eine Folge (f_n) in $\mathscr{F}$, eine Folge $(\varphi_n = \varphi_{a_n,r_n})$ in $A(\mathbb{C})$ mit $a_n \to a$ und $r_n \to 0$ sowie eine Funktion $g \in M(\mathbb{C})$ mit

$$\max_{\mathbb{C}} g^{\#} = g^{\#}(0) = 1$$

und so, dass für jedes $R < \infty$ die Folge $(f_n \circ \varphi_n)_{n \geq n_R}$ für ein geeignetes $n_R \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig auf $U_R(0)$ gegen g konvergiert.

Beweis. Es seien (φ_n) und (f_n) Folgen wie im Zalcman-Lemma. Da nach dem Satz von Marty die Familie $\{f_n \circ \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $M(\mathbb{D})$ normal ist, können wir nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge voraussetzen, dass die Folge $(f_n \circ \varphi_n)$ in $M(\mathbb{D})$ konvergiert. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $g_{\mathbb{D}}$. Wieder nach dem Satz von Marty ist für jedes $R < \infty$ die Familie $\{f_n \circ \varphi_n|_{U_R(0)} : n \geq n_R\}$ mit geeignetem n_R normal. Nach dem Satz von Vitali existiert eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Fortsetzung g von $g_{\mathbb{D}}$ so, dass

$$f_n \circ \varphi_n \to g \qquad (n \to \infty,\, n \geq n_R)$$

lokal gleichmäßig auf $U_R(0)$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit von $h \mapsto h^{\#}$ folgt $(f_n \circ \varphi_n)^{\#} \to g^{\#}$ in $C(U_R(0))$. Wieder mit dem Zalcman-Lemma ergibt sich $g^{\#}(0) = 1$ und $g^{\#}(\zeta) \leq 1$ für $\zeta \in \mathbb{C}$. □

Bemerkung 5.3 (Satz von Hurwitz) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in $H(G)$ mit $f_n \to f \in H(G)$ lokal gleichmäßig. Ist $f \in H(G)$ nicht konstant, so folgt aus $w \in f(G)$ schon $w \in f_n(G)$ bis auf endlich viele n. Die Aussage ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Hurwitz.[59] Sie ist im Allgemeinen falsch, wenn die Grenzfunktion konstant ist (man betrachte etwa $w = 0$ und f_n konstant $= 1/n$ auf $\mathbb{C}$). Eine Folgerung aus dem Satz von Hurwitz ist, dass für Gebiete G der Raum

$$H_\infty(G) := H(G) \cup \{f = \infty\}$$

abgeschlossen in $M(G)$ ist ([Ü]). Dies impliziert insbesondere, dass im Fall einer Familie holomorpher Funktionen $\mathscr{F}$ die Grenzfunktion g im Reskalierungssatz von Zalcman eine ganze Funktion ist.

Satz 5.4 (Montel, groß)
Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ offen, $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ und $a \in \Omega$. Existiert eine Umgebung U von a so, dass $\mathscr{F}|_U$ drei Werte auslässt, das heißt $\#\big(\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f(U)\big) \geq 3$, so ist $\mathcal{F}$ normal an a.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $a \in \mathbb{C}$ annehmen und zudem, dass $U = U_r(a)$ eine offene Kreisscheibe ist.
1. Zunächst die Familie $\mathscr{F}$ so, dass

$$0, 1, \infty \notin \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f(U)$$

gilt. Dann ist $\mathscr{F} \subset H(U)$ und aus $0 \notin f(U)$ für $f \in \mathscr{F}$ folgt die Existenz m-ter Wurzeln von f auf U, das heißt, für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren $h = h_m \in H(U)$ mit $h^{\cdot\, m} = f$ ([Ü]).[60] Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathscr{F}_k := \{h \in H(U) : h^{\cdot\, 2^k} = f \text{ für ein } f \in \mathscr{F}\}.$$

Wir schreiben $\mathbb{S}_m := \{\zeta \in \mathbb{S} : \zeta^m = 1\}$ für die Menge der m-ten Einheitswurzeln. Wegen $1 \notin f(U)$ für $f \in \mathscr{F}$ ist $h(U) \cap \mathbb{S}_{2^k} = \varnothing$ für alle $h \in \mathscr{F}_k$.
Wir nehmen an, $\mathscr{F}$ sei nicht normal an a. Ist $V \subset U$ eine offene Umgebung von a, so existiert eine Folge $(f_n)_n$ in $\mathscr{F}$, die keine auf V lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Sind $k \in \mathbb{N}$ und $h_{n,k} \in \mathscr{F}_k$ mit $(h_{n,k})^{\cdot\, 2^k} = f_n$, so hat auch $(h_{n,k})_n$ keine auf V lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Also ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $\mathscr{F}_k$ nicht normal an a.
Es sei $g_k \in H_\infty(\mathbb{C})$ eine Grenzfunktion zu $\mathscr{F}_k$ wie im Reskalierungssatz (die dort g heißt). Dann gilt $g_k^\# \leq 1 = g_k^\#(0)$. Also ist nach dem Satz von Marty $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine normale Familie und da g nicht konstant ist, folgt aus Bemerkung 5.3, dass $g_k(\mathbb{C}) \cap \mathbb{S}_{2^k} = \varnothing$ ist. Ist $g \in H_\infty(\mathbb{C})$ lokal gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge $(g_k)_{k \in I}$ von $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so ist

$$g^\#(0) = \lim_{I \ni k \to \infty} g_k^\#(0) = 1\,.$$

[59] siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Hurwitz_(Funktionentheorie).
[60] Wir schreiben hier $\cdot\, m$ statt m, da es sich um das punktweise Produkt der Funktionen handelt, nicht um die m-te Iterierte.

Wieder nach Bemerkung 5.3 enthält $g(\mathbb{C})$ keine 2^k-te Einheitswurzel, jetzt aber für alle $k \in \mathbb{N}$, das heißt $g(\mathbb{C}) \cap W = \varnothing$, wobei $W := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_{2^k}$ (man beachte dabei: $\mathbb{S}_{2^j} \supset \mathbb{S}_{2^k}$ für $j \geq k$). Da W dicht in $\mathbb{S}$ ist und da $g(\mathbb{C})$ nach Satz 3.13 und Satz B.4 ein Gebiet ist, gilt $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ oder $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Im ersten Fall ist g konstant nach dem Satz von Liouville, im Widerspruch zu $g^{\#}(0) = 1$. Im zweiten Fall liefert die Anwendung des Satzes von Liouville auf $1/g$ den gleichen Widerspruch.
2. Nun seien $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_{f\in\mathscr{F}} f(U)$ beliebig. Dann existiert eine Möbius-Transformation $\varphi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, die die drei Werte w_1, w_2, w_3 nach $0, 1, \infty$ abbildet.[61] Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von φ und φ^{-1} ist nach 1. ist die Familie $\{\varphi \circ f : f \in \mathscr{F}\}$ normal an a ([Ü] und Satz 4.5) und mit $f = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f$ für $f \in \mathscr{F}$ dann auch $\mathscr{F}$. □

Bemerkung 5.5 Da holomorphe Funktionen den Wert ∞ stets auslassen, ist unter den Bedingungen des Satzes von Montel eine Familie holomorpher Funktionen $\mathscr{F}$ schon dann normal an a, wenn $\mathscr{F}|_U$ zwei Werte in $\mathbb{C}$ auslässt.

Für $A \subset \mathbb{C}_\infty$ mit $0 \in A$ schreiben wir im Weiteren $A_* := A \setminus \{0\}$. Eine erste Folgerung aus dem Satz von Montel ist

Satz 5.6 (Picard, groß)
Ist $f \in M(\mathbb{D}_*)$ und lässt f drei Werte aus, d. h. $\#(\mathbb{C}_\infty \setminus f(\mathbb{D}_*)) \geq 3$, so hat f ein meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{D}$.[62]

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die ausgelassenen Werte $0, \infty, w$ sind (ansonsten: passende Möbius-Transformation nachschalten, vgl. den Beweis zu Satz 5.4). Dann sind f und $1/f$ holomorph. Definieren wir $g_n \in H(\mathbb{D}_*)$ durch

$$g_n(z) := f(z/n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{D}_*),$$

so sind $0, \infty, w \notin g_n(\mathbb{D}_*)$ für alle n. Nach dem großen Satz von Montel und Satz 4.5 ist $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ normal in $M(\mathbb{D}_*)$. Also existieren eine Teilfolge $(g_n)_{n\in I}$ von (g_n) und ein $g \in H_\infty(\mathbb{D}_*)$ mit $g_n \to g$ für $I \ni n \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{D}_*$. Ist g nicht konstant $= \infty$, so ist $g \in H(\mathbb{D}_*)$ und die Konvergenz gilt in $H(\mathbb{D}_*)$ (vgl. Bemerkung 3.24). Insbesondere ist daher $(g_n)_{n\in I}$ beschränkt in $(C(K), \|\cdot\|_K)$, wobei $K = 2^{-1}\mathbb{S} = \{\zeta : |\zeta| = 1/2\}$. Also existiert ein $M > 0$ mit

$$|f(\zeta)| \leq M \quad \text{ und } \quad |g_n(\zeta)| \leq M - 1$$

für $\zeta \in K$, $n \in I$ und damit auch $|f(\eta)| \leq M$ für $\eta \in n^{-1}K$, $n \in I$. Nach dem Maximumprinzip (in der Version aus [Ü]) ist daher $|f(z)| \leq M$ für $z \in 2^{-1}\mathbb{D}_*$. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz ([Ü]) impliziert, dass f an 0 holomorph fortsetzbar ist. Ist g konstant $= \infty$, so argumentiert man entsprechend mit $1/f$ statt f. □

[61] $\varphi(z) = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{z - w_1}{z - w_3}$ ist im Falle $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ geeignet, $\varphi(z) = \frac{z - w_1}{w_2 - w_1}$ für $w_3 = \infty$.
[62] Wir man leicht sieht, gilt die (lokale) Aussage schon dann, wenn f drei Werte nur endlich oft annimmt.

Bemerkung 5.7 (für uns im Weiteren wichtig) Ist f ganz, so ergibt sich durch Anwendung des Satzes von Picard auf die Funktion $h(z) = f(r/z)$ für geeignetes $r > 0$ die folgende Version des Satzes von Picard für ganze Funktionen: Nimmt f mindestens zwei Werte nur endlich oft an, d. h. existieren $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, so, dass $f^{-1}(\{a, b\})$ endlich ist, so ist f meromorph fortsetzbar nach $\mathbb{C}_\infty$.[63] Ist f transzendent, so wird also jeder Wert bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft als Funktionswert angenommen! Wird $a \in \mathbb{C}$ nur endlich oft angenommen, so nennt man a einen **Picardschen Ausnahmewert** von f. Jeder ausgelassene Wert a (also $f^{-1}(\{a\}) = \varnothing$) ist ein solcher, etwa der Nullpunkt für exp. Der Nullpunkt ist aber auch Picardscher Ausnahmewert etwa von $P \cdot \exp$ für beliebige Polynome $P \neq 0$.

Mit dem Satz von Montel haben wir auch ein starkes Hilfsmittel zur Verfügung, um weitere Aussagen zu Fatou- und Julia-Mengen zu machen. Für $f \in RT$ und offene Mengen $U \subset D(f)$ setzen wir

$$E(U) := E(f, U) := \mathbb{C}_\infty \setminus O^+(U)$$

Im Fall ganzer Funktionen ist stets $\infty \in E(U)$. Wir schreiben dann $E_{\mathbb{C}}(U) := \mathbb{C} \cap E(U)$.

Satz 5.8 *Es sei $f \in RT$. Dann gilt*

1. *Ist $U \subset D(f)$ offen mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$, so ist $E(U)$ höchstens zweipunktig und im Fall ganzer Funktionen $E_{\mathbb{C}}(U)$ höchstens einpunktig.*
2. *Entweder ist $J(f) = D(f)$ oder $J(f)$ hat keine inneren Punkte.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus dem großen Satz von Montel. Wir zeigen: Hat $J(f)$ einen inneren Punkt a, so ist $F(f) = \varnothing$. Dazu sei $U := U_\delta(a) \subset J(f)$. Da $J(f)$ invariant ist, folgt $O^+(U) \subset J(f)$, also $F(f) \subset E(U)$. Nach 1. ist damit $F(f)$ höchstens zweipunktig und als offene Menge dann leer. $\square$

Bemerkung 5.9 1. Für $d \in \mathbb{Z}$ mit $|d| > 1$ sei g_d definiert ist durch $g_d(z) = z^d$. Dann ist $J(g_d) = \mathbb{S}$ und $E(g_d, U) = \{0, \infty\} \subset F(g_d)$ für alle offenen $U \subset \mathbb{C}_*$ mit $U \cap \mathbb{S} \neq \varnothing$ ([Ü]). Dies zeigt, dass $E(U)$ zweielementig sein kann.
2. Nach Satz 4.15 ist $J(f)$ für Polynome f kompakt in $\mathbb{C}$ und damit hat $J(f)$ nach Satz 5.8 keine inneren Punkte. Andererseits gibt es transzendente Funktionen, deren Julia-Menge ganz $\mathbb{C}$ ist. So kann man zeigen, dass etwa $J(\exp) = \mathbb{C}$ gilt.[64] Weiterhin gibt es auch rationale Funktionen f mit $J(f) = \mathbb{C}_\infty$, etwa $f(z) = (z^2 + 1)/(4z(z^2 - 1))$ oder auch $f(z) = 1 - 2/z^2$.[65]

[63] In diesem Fall ist f ein Polynom.
[64] Einen Beweis findet man zum Beispiel in Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M., Ueda, T. *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
[65] siehe etwa L. Carleson, T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer, New York, 1993.

Bemerkung und Definition 5.10 Es seien $X \neq \varnothing$ eine Menge, $f : X \to X$ und $a \in X$. Wir setzen

$$O^-(a) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\{a\})$$

Für surjektive f ist $O^-(a) \neq \varnothing$. Ist $U \subset X$, so ist nach Definition $a \in O^+(U)$ genau dann, wenn $O^-(a) \cap U \neq \varnothing$ ist. Aus $O^-(a) \cap O^+(U) \neq \varnothing$ folgt zudem $a \in O^+(U)$.

Denn: Es sei $x \in O^-(a) \cap O^+(U)$. Sind $n, k \in \mathbb{N}$ mit $f^n(x) = a$ und $x \in f^k(U)$, so gilt $a = f^n(x) \in f^n(f^k(U)) = f^{n+k}(U) \subset O^+(U)$.

Bemerkung und Definition 5.11 Es seien $f \in RT$ [66] und $U \subset D(f)$ eine offene Menge mit

$$U \cap J(f) \neq \varnothing.$$

Nach Satz 5.8.1 ist $\#E(U) \leq 2$ bzw. $\#E_{\mathbb{C}}(U) \leq 1$. Ist f rational mit $\#E(U) = 2$, so ist f vermittels einer Möbiustransformation h konjugiert zu g_d aus Bemerkung 5.9 für ein d ([Ü]). Nach Satz 4.10 ist $J(f) = h(\mathbb{S})$ [67] und außerdem

$$E(U) = h(\{0, \infty\}) \subset h(\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{S})) = F(f).$$

Ist f rational mit $\#E(U) = 1$, also $E(U) = \{a\}$ für ein $a = a_U \in \mathbb{C}_\infty$, so ist $O^-(a) \neq \varnothing$ wegen der Surjektivität von f und

$$O^-(a) = \{a\}$$

(wäre $a \neq z \in O^-(a)$, so wäre $z \in O^+(a)$ und nach Bemerkung und Definition 5.10 damit $a \in O^+(a)$, also Widerspruch). Dann ist f vermittels einer Möbius-Transformation konjugiert zu einem Polynom ([Ü]). Daher kann man sich im Wesentlichen bei der Untersuchung von $E(U)$ auf ganze Funktionen zu beschränken.
Es sei also f eine ganze Funktion. Ist $\#E_{\mathbb{C}}(U) = 1$, also $E_{\mathbb{C}}(U) = \{a\}$ für ein $a = a_U$, so ist nach Bemerkung und Definition 5.10

$$O^-(a) \subset \{a\}.$$

Einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ mit $O^-(a) \subset \{a\}$ heißt **Montelscher Ausnahmewert** von f. Ist a ein Montelscher Ausnahmewert, so ist entweder $O^-(a) = \varnothing$, das heißt $a \notin f(\mathbb{C})$ (wie etwa $a = 0$ bei $f(z) = e^z$) oder aber $O^-(a) = \{a\}$ und damit a ein Fixpunkt (wie etwa $a = 0$ bei $f(z) = z^2$ oder auch bei $f(z) = ze^z$). Jeder Montelsche Ausnahmewert ist natürlich auch ein Picardscher Ausnahemwert. Wir schreiben $M(f)$ für die (in Fall transzendenter f nach dem Satz von Picard höchstens einpunktige) Menge der Montelschen Ausnahmewerte. Wie oben gesehen gilt

$$E_{\mathbb{C}}(U) \subset M(f). \tag{5.1}$$

[66] Wie bereits erwähnt ist $J(f)$ stets nichtleer, was wir im Weiteren nutzen, aber nur für Polynome bewiesen haben.

[67] also perfekt in $\mathbb{C}_\infty$, da Bilder perfekter kompakter Mengen unter Homöomorphismen perfekt und kompakt sind. Tatsächlich ist hier $h(\mathbb{S})$ ein Kreis auf der Sphäre.

Ist f ein Polynom und $a \in M(f)$, so ist $O^-(a) = \{a\}$ da f keinen Wert in $\mathbb{C}$ auslässt. Also hat die Gleichung $f(z) - a = 0$ nur die Lösung a. Mit Linearfaktorzerlegung gilt

$$f(z) - a = c(z-a)^d$$

mit $d = \deg(f) \geq 2$ und einer Konstante $c \neq 0$. Dies sind also die einzigen Polynome, bei denen ein Montelscher Ausnahmewert existiert. In diesem Fall ist zudem a ein superattraktiver Fixpunkt und damit $a \in F(f)$. Also ist bei Polynomen stets $E_{\mathbb{C}}(U) \subset F(f)$.

Satz 5.12 *Es seien $f \in RT$ und $U \subset D(f)$ offen mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$.*

1. *Ist f rational, so existiert ein N in $\mathbb{N}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{N} f^n(U \cap J(f)) = J(f)$.*
2. *Ist f transzendent, so ist $J(f) \setminus M(f) \subset O^+(U \cap J(f)) \subset J(f)$.*

Beweis. Zunächst sei $f \in RT$ beliebig. Da $J = J(f)$ invariant ist gilt $f^n(U \cap J) \subset f^n(U) \cap f^n(J) \subset f^n(U) \cap J$ und da J auch rückwärts invariant ist, ergibt sich zudem $\supset$ (ist $a \in f^n(U) \cap J$ und $z \in U$ so, dass $a = f^n(z)$, so ist $z \in J$ und damit $a \in f^n(U \cap J)$). Also ist $f^n(U \cap J) = f^n(U) \cap J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch

$$O^+(U \cap J) = O^+(U) \cap J.$$

Ist f transzendent, so ergibt sich 2. damit aus (5.1). Ist f rational, so ist $E(U) \cap J = \varnothing$, also $O^+(U) \cap J = J$ und damit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U \cap J) = O^+(U \cap J) = J.$$

Da $f^n(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen in $\mathbb{C}_\infty$ ist, ist $f^n(U) \cap J$ offen in J für alle n. Da J als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}_\infty$ (überdeckungs-)kompakt ist, existiert ein N mit $\bigcup_{n=1}^{N} f^n(U \cap J) = J$. □

Bemerkung 5.13 Aus Satz 5.12.1 ergibt sich für rationale $f \in RT$: Das dynamische System $(f, J(f))$ ist transitiv und für jedes $a \in J(f)$ ist $O^-(a)$ nach Bemerkung und Definition 5.10 dicht in $J(f)$.[68] Für transzendente f ist $O^-(a)$ für jedes $a \in J(f) \setminus M(f)$ dicht in $J(f) \setminus M(f)$. Insbesondere ist $O^-(a)$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $J(f)$ bzw. $J(f) \setminus M(f)$, also $J(f)$ stets separabel.[69]

Es gibt transzendente Funktionen ohne Fixpunkte, etwa $f(z) = z + e^z$. Auf der anderen Seite kann man zeigen:

[68] Die Dichtheit von $O^-(a)$ in $J(f)$ kann genutzt werden, um Bilder von $J(f)$ zu erzeugen (Inverse Iteration Method, kurz IIM; siehe etwa `https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set`). Man startet mit einem beliebigen $a \in J(f)$ und berechnet sukzessive die iterierten Urbilder. Die Vereinigung dieser Mengen füllt $J(f)$ dicht auf.

[69] Man kann allgemein zeigen, dass Teilmengen separabler metrischer Räume separabel sind.

Satz 5.14 *Ist f transzendent, so hat f unendlich viele periodische Punkte der Periode zwei oder es existiert ein Fixpunkt, der kein Picardscher Ausnahmewert ist.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g := (f \circ f - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})/(f - \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \in M(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}.$$

Ist $g(a) = 0$, so ist a ein Fixpunkt von $f \circ f$, ist $g(a) = \infty$, so ist a ein Fixpunkt von f und ist $g(a) = 1$, so ist $f(a)$ ein Fixpunkt von $f \circ f$. Da f kein Polynom ist, ist g keine rationale Funktion: Angenommen, es ist $g = P/Q$ mit Polynomen $P, Q \neq 0$, also

$$(f \circ f)Q - fP = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(Q - P).$$

Für $w \in \mathbb{C}$ und $z \in f^{-1}(\{w\})$ ist

$$f(w)Q(z) - wP(z) = z(Q(z) - P(z)).$$

Da beide Seiten Polynome in z sind, gilt die Gleichheit für alle $z \in \mathbb{C}$, falls w kein Picardscher Ausnahmewert von f ist. Da dies für alle $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme gilt, ergibt sich durch Differenzieren nach w die Konstanz von P/Q und $f'(w) = P/Q$ für alle w. Andererseits ist mit f auch f' transzendent, also ergibt sich ein Widerspruch.
Da g nicht rational ist, ist $g(1/\cdot) \in M((\mathbb{C}_\infty)_*)$ nicht meromorph fortsetzbar an 0.[70] Nach dem Satz von Picard nimmt g einen der Werte $0, 1, \infty$ unendlich oft an. Gilt dies für 0 oder für ∞, so hat f unendlich viele periodische Punkte der Periode 2. Ist $g^{-1}(\{1\})$ unendlich, so ist jeder Punkt in $W := f(g^{-1}(\{1\}))$ ein Fixpunkt von f. Ist W unendlich, so existieren unendlich viele Fixpunkte. Ist W endlich, so existiert ein $a \in g^{-1}(\{1\})$ mit $f(a') = f(a)$ für unendlich viele $a' \in g^{-1}(\{1\})$. Für $f(a)$ gilt dann die zweite Alternative. $\square$

Bemerkung 5.15 Sind $f \in RT$ und a so, dass $O^-(a) \not\subset \{a\}$, so ist $O^-(a)$ unendlich

> Denn: Es existiert ein $z \neq a$ mit $f(z) = a$. Ist f transzendent, so ist a oder z kein Picardscher Ausnahmewert. Also hat einer der beiden Punkte unendlich viele Urbilder. Ist f rational, so sieht man induktiv, dass a mindestens $n + 1$ Urbilder unter f^n hat. Damit ist auch hier $O^-(a)$ unendlich.

Satz 5.16 *Für $f \in RT$ ist $J(f)$ unendlich und für transzendente f ist $J(f)$ unbeschränkt in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei f rational. Dann existiert nach Bemerkung und Definition 5.11 kein $a \in J$ mit $O^-(a) \subset \{a\}$. Nach Bemerkung 5.15 ist J wegen der Rückwärts-Invarianz unendlich. Also können wir uns auf den Fall transzendenter f beschränken. Da $J(f) \supset J(f \circ f)$

[70] haben wir bereits im letzten Abschnitt in einer Fußnote erwähnt, aber nicht bewiesen

gilt, können wir nach Satz 5.14 ohne Einschränkung annehmen, dass f unendlich viele Fixpunkte oder einen Fixpunkt mit unendlich vielen Urbildern hat. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß und dem Identitätssatz ist dann die Menge der $a \in \mathbb{C}$ mit $f^n(a) = f(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unbeschänkt.
Angenommen, J sei beschränkt, also $J \subset B_\rho(0)$ für ein $\rho > 0$. Wir setzen

$$U := \mathbb{C} \setminus B_\rho(0) \subset F(f)$$

und zeigen: Es existiert eine Folge (g_k) in $\langle f \rangle$ mit $g_k \to \infty$ lokal gleichmäßig auf U. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass ein $a \in U$ mit $f^n(a) = f(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $g_k(a) = f(a)$ oder $g_k(a) = a$ existiert.
Nach Bemerkung und Definition C.1 reicht es zu zeigen: Es existiert eine Folge (g_k) in $\langle f \rangle$ für die jede auf U lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge gegen ∞ konvergiert. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existieren dann zu jeder Folge (g_k) in $\langle f \rangle$ ein $g \in H(U)$ und eine auf U lokal gleichmäßig gegen g konvergente Teilfolge $(g_k)_{\in I}$. Nach Bemerkung 3.24 ist die Konvergenz lokal norm-gleichmäßig und nach dem Maximumprinzip konvergiert dann $(g_k)_{k\in I}$ lokal norm-gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ (man beachte dabei: $(g_k)_{k\in I}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C(2\rho\mathbb{S}), \|\cdot\|_{2\rho\mathbb{S}})$ und nach dem Maximumprinzip dann auch in $((C(B_{2\rho}(0)), \|\cdot\|_{B_{2\rho}(0)})$; vgl. [Ü]). Dann ist aber $F(f) = \mathbb{C}$, im Widerspruch zu $J(f) \neq \varnothing$.
$\square$

Da $J(f)$ abgeschlossen in $D(f)$ ist, ist $J(f)$ (mit der Spurmetrik von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}_\infty$) ein vollständiger metrischer Raum. Wir haben bereits gesehen, dass $J(f)$ im Fall $J(f) \neq D(f)$ keine inneren Punkte hat. Wir zeigen nun, dass andererseits Julia-Mengen stets perfekt (und wegen der Vollständigkeit damit insbesondere überabzählbar) sind. Genauer gilt:

Satz 5.17 *Für $f \in RT$ ist $J(f)$ perfekt und separabel. Außerdem ist $(f, J(f))$ transitiv und $\omega(a) = J(f)$ für eine dichte G_δ-Menge von Punkten $a \in J(f)$.*

Beweis.
Nach Satz 5.16 ist $J(f)$ unendlich. Damit ist für jedes $a \in J$ auch $J \setminus O^+(a)$ unendlich: Ist $f(a)$ periodischer Punkt, so ist $O^+(a)$ endlich und daher $J \setminus O^+(a)$ unendlich. Ist $f(a)$ kein periodischer Punkt, so ist $O^-(f(a))$ unendlich nach Bemerkung 5.15. Ist $z \in O^-(f(a))$, so ist $z \in J$ wegen der vollständigen Invarianz von J. Außerdem ist $z \notin O^+(a)$ (sonst wäre $z = f^k(a)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $f(a) = f^{n+k-1}(f(a))$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(z) = f(a)$, und damit $f(a)$ periodisch). Also ist wieder $J \setminus O^+(a)$ unendlich.
Ist nun U offen mit $a \in U$, so unterscheiden sich J und $O^+(U \cap J)$ nach Satz 5.12 um höchstens einen Punkt. Also ist $O^+(U \cap J) \setminus O^+(a)$ unendlich. Ist $w \in O^+(U \cap J) \setminus O^+(a)$ und sind $\zeta \in U \cap J$, $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(\zeta) = w$, so ist $\zeta \neq a$. Also ist a Häufungspunkt von J. Damit ist J perfekt.
Da kein Punkt in J (also insbesondere kein möglicher Montelscher Ausnahmewert) isoliert ist, ist nach Bemerkung 5.13 stets (f, J) transitiv und J separabel. [71] Die letzte Aussage

[71] Tatsächlich man kann zeigen, dass Teilmengen separabeler Räume stets separabel sind.

folgt daher aus dem Transitivitätssatz. □

Als weitere Anwendung des Reskalierungssatzes beweisen wir, dass stets eine dichte Menge periodischer Punkte in der Julia-Menge existiert. Nach Bemerkung und Definition 4.23 liegen abweisende periodische Punkte stets in J. Es gilt:

Satz 5.18 *Es sei $f \in RT$. Dann ist ist die Menge der abweisenden periodischen Punkte dicht in $J(f)$ und $(f, J(f))$ chaotisch.*

Beweis. Wegen Satz 5.17 reicht es, die erste Aussage zu beweisen. Dazu sei M Menge aller Punkte $a \in J$ mit $\omega(a) = J$ (oder gleichbedeutend mit in J dichtem Orbit $O^+(a)$). Da M nach Satz 5.17 dicht in J ist, reicht es zu zeigen: Ist $a \in M$ und ist $U \subset D(f)$ eine Umgebung von a, so existiert ein abweisender periodischer Punkt in U.
Es seien also $a \in M$ und U eine offene Umgebung von a. Nach dem Reskalierungssatz existieren Folgen (a_k) mit $a_k \to a$, (ρ_k) mit $\rho_k \to 0$, (n_k) mit $n_k \to \infty$ sowie eine nicht konstante ganze Funktion g so, dass für $\varphi_k = \varphi_{a_k,\rho_k}$

$$f^{n_k} \circ \varphi_k \to g \quad (k \to \infty)$$

gleichmäßig auf allen $B_R(0)$ gilt (wobei $k \geq k_R$). Da $O^+(a)$ dicht in J ist und g nach dem Satz von Picard höchstens einen Wert auslässt, ist $O^+(a) \cap U \cap g(\mathbb{C})$ nichtleer. Es sei $w \in \mathbb{C}$ mit $g(w) \in O^+(a) \cap U \subset J$. Dann existiert eine offene Umgebung V von w mit $g(V) \subset U$ und $g'(z) \neq 0$ für $z \in V \setminus \{w\}$ (beachte: $Z(g')$ ist diskrete Menge). Da $g(V \setminus \{w\})$ offen und J perfekt ist, gilt $J \cap g(V \setminus \{w\}) \neq \varnothing$, und da $O^+(a)$ dicht in J ist, existieren ein $j \in \mathbb{N}$ und ein $\zeta \in V \setminus \{w\}$ mit $g(\zeta) = f^j(a)$. Mit $\varphi_k \to a$ gleichmäßig auf allen $B_R(0)$ folgt

$$f^{n_k} \circ \varphi_k - f^j \circ \varphi_k \to g - f^j(a) \quad (k \to \infty)$$

gleichmäßig auf allen $B_R(0)$. Da ζ Nullstelle von $g - f^j(a)$ ist, existieren nach dem Satz von Hurwitz (Bemerkung 5.3) Punkte ζ_k mit $\zeta_k \to \zeta$ und

$$f^{n_k}(\varphi_k(\zeta_k)) = f^j(\varphi_k(\zeta_k)) =: \eta_k$$

für k genügend groß. Also ist η_k ein Fixpunkt von $f^{n_k - j}$ und damit ein periodischer Punkt von f für k genügend groß. Aus $\varphi_k(\zeta_k) = a_k + \rho_k \zeta_k \to a$ folgt

$$\eta_k \to f^j(a) = g(\zeta) \in U$$

für $k \to \infty$, also $\eta_k \in U$ für k genügend groß. Schließlich gilt, wieder für k genügend groß,

$$(f^{n_k} \circ \varphi_k)'(\zeta_k) = (f^{n_k - j} \circ f^j \circ \varphi_k)'(\zeta_k) = (f^{n_k - j})'(\eta_k) \cdot (f^j)'(\varphi_k(\zeta_k)) \cdot \rho_k.$$

Aus

$$(f^j)'(\varphi_k(\zeta_k)) \cdot \rho_k \to (f^j)'(a) \cdot 0 = 0 \quad (k \to \infty)$$

und

$$(f^{n_k} \circ \varphi_k)'(\zeta_k) \to g'(\zeta) \neq 0 \quad (k \to \infty)$$

folgt $(f^{n_k - j})'(\eta_k) \to \infty$ für $k \to \infty$. Damit sind die η_k abweisend für k genügend groß. □

Bemerkung 5.19 Ist f rational, so ist f gleichmäßig stetig. Mit ählicher Argumentation wie in Bemerkung und Definition 4.13 sieht man, dass $J(f^m) = J(f)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt ([Ü]). Mit Satz 5.18 kann man zeigen, dass genauer als in Satz 5.12.1 für jedes offene U mit $U \cap J(f) \neq \varnothing$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^N(U \cap J(f)) = J(f)$. Dies zeigt: Für rationale f ist das dynamische System $(f, J(f))$ exakt.

...genau

A Der Satz von Baire

Im ersten Abschnitt verwenden wir ein recht elementares Ergebnis der Analysis, das in vielen Situationen äußerst nützlich ist:

Satz A.1 (Baire) *Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Ist (U_n) eine Folge offener Mengen so, dass U_n dicht in X ist für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.*

Beweis.[72] Es seien $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist: $B_\varepsilon(a) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Wir setzen $A_0 := B_\varepsilon(a)$. Da U_1 dicht in X ist, ist $U_\varepsilon(a) \cap U_1 \neq \varnothing$ und offen. Also existieren $b \in X$, $0 < \delta \leq 1/2$ mit $A_1 := B_\delta(b) \subset A_0 \cap U_1$. Dabei ist $\operatorname{diam}(A_1) \leq 2\delta \leq 1$. Da U_2 dicht in X ist, ist $U_\delta(b) \cap U_2 \neq \varnothing$ und offen. Mit gleicher Argumentation wie vorher existiert eine abgeschlossene Kugel $A_2 \subset A_1 \cap U_2$ mit $\operatorname{diam}(A_2) \leq 1/2$. Induktiv erhält man so eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Kugeln mit

$$A_n \subset A_{n-1} \cap U_n \subset A_0 \cap U_n$$

und $\operatorname{diam}(A_n) \leq 1/n$. Wählt man $x_j \in A_j$, so ist (x_j) wegen $\operatorname{diam}(A_j) \to 0$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_j \to x$ für $j \to \infty$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x_j \in A_j \subset A_n$ für $j \geq n$, also $x \in A_n \subset A_0 \cap U_n$, da A_n abgeschlossen ist. Damit ist $x \in A_0 \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. □

Bemerkung und Definition A.2 In vollständigen metrischen Räumen (X,d) sind nach dem Satz von Baire abzählbare Schnitte offener, dichter Mengen dichte G_δ-Mengen. Enthält $M \subset X$ eine dichte G_δ-Menge, so nennt man M **residual** in X. Der Satz von Baire zeigt, dass abzählbare Schnitte residualer Mengen wieder residual sind.

[72] Für $A \subset X$ ist $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ der **Durchmesser** von A.

B Zusammenhängende Mengen

Wir stellen Begriffe und Ergebnisse aus der Topologie zusammen, die für im Rahmen dynamischer Systeme eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkung und Definition B.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. (X, d) heißst **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$, so ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$. Andernfalls heißt X **unzusammenhängend**.

2. $M \subset X$ heißt **zusammenhängend**, falls (M, d_M) zusammenhängend oder $M = \varnothing$ ist.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X und $\varnothing$ die einzigen in (X, d) sowohl offen als auch abgeschlossenen Mengen sind. Weiter sieht man leicht ([Ü]), dass eine Teilmenge von M genau dann offen in (M, d_M) ist, wenn sie von der Form $U \cap M$ für eine in (X, d) offene Menge U ist. Also ergibt sich aus obiger Definition, dass $M \subset X$ genau dann unzusammenhängend ist, wenn offene Mengen $U, V \subset X$ existieren mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$. Man kann leicht zeigen ([Ü]), dass dies äquivalent dazu ist, dass M zerlegt werden kann in zwei nichtleere Mengen A, B mit $\overline{A} \cap B = \varnothing$ und $\overline{B} \cap A = \varnothing$.

Bemerkung B.2 Sind X, Y metrische Räume, ist X zusammenhängend und ist $f : X \to Y$ lokal konstant, so ist f konstant.

> Denn: Es sei $c \in f(X)$. Dann ist $A := \{x : f(x) = c\}$ nichtleer, abgeschlossen (da f stetig ist) und offen (da f lokal konstant ist). Also ist $A = X$.

Satz B.3 *Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in M, c \notin M$. Folglich gilt für $U := (-\infty, c)$ und $V := (c, \infty)$

$$M \subset U \cup V, \quad U \cap M \neq \varnothing, \quad V \cap M \neq \varnothing \qquad \text{und} \qquad U \cap V \cap M = \varnothing\,,$$

also ist M unzusammenhängend.
$\Leftarrow$: Angenommen, M ist unzusammenhängend. Dann existieren offene Mengen U, V in $\mathbb{R}$ mit $M \subset U \cup V$, $U \cap M \neq \varnothing$, $V \cap M \neq \varnothing$ und $U \cap V \cap M = \varnothing$.
Es seien $a \in U \cap M$, $b \in V \cap M$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da M ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset M$. Wir setzen $\xi := \sup(U \cap [a, b])$. Da U offen ist, gilt $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Da V offen ist, existiert dann ein $a < c < \xi$ mit $(c, \xi] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \varnothing$ und damit auch $U \cap V \cap M \neq \varnothing$.

Widerspruch. Damit gilt $\xi \notin V$. Da $M \subset U \cup V$ ist, folgt $\xi \in U$. Da U offen und $\xi < b$ ist, widerspricht dies der Definition von ξ. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz B.4 *Es seien (X,d), (Y,d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Dann existieren eine in (Y,d_Y) offene Menge U und eine in (Y,d_Y) abgeschlossene Menge A mit $B = U \cap f(X) = A \cap f(X)$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}(B) = f^{-1}(U) = f^{-1}(A)$ offen und abgeschlossen in (X,d) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \varnothing$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. $\square$

Als Konsequenz aus Satz B.3 und Satz B.4 ergibt sich folgender Zwischenwertsatz:

Satz B.5 *Es sei (X,d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis. Nach Satz B.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also nach Satz B.3 ein Intervall. $\square$

Bemerkung B.6 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Sind A_α $(\alpha \in I)$ zusammenhängende Mengen in X mit $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, so ist $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ebenfalls zusammenhängend.

> Denn: Wir setzen $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Es seien U und V in X offene Mengen mit $A \subset U \cup V$ und $A \cap U \neq \varnothing$ sowie $A \cap V \neq \varnothing$. Ist $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, so ist $x \in U \cup V$. Ohne Einschränkung sei $x \in U$. Weiter existiert ein $\alpha \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Aus $x \in A_\alpha \cap U$ folgt auch $A_\alpha \cap U \neq \varnothing$. Da A_α zusammenhängend ist, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \varnothing$. Damit ist auch $A \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Bemerkung und Definition B.7 Da Strecken $[u,v] \subset \mathbb{C}$ nach den Sätzen B.3 und B.4 zusammenhängend sind, sind sternförmige offene Mengen $X \subset \mathbb{C}$ nach Bemerkung B.6 zusammenhängend, also Gebiete (falls nichtleer).

C Kompaktkeit

Bemerkung und Definition C.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X

1. **folgenkompakt** oder kurz **kompakt**, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.

2. **präkompakt** oder auch **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliche Menge $F \subset X$ mit $X = \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$ existiert.

Weiter heißt $M \subset X$ **kompakt** bzw. **präkompakt**, falls $(M, d|_{M\times M})$ kompakt bzw. präkompakt ist. Schließlich heißt M **relativ kompakt**, falls jede Folge in M eine in X konvergente Teilfolge besitzt. Ist M relativ kompakt, so ist eine Folge (a_n) im M schon dann konvergent, wenn alle *konvergenten* Teilfolgen den gleichen Grenzwert haben.
Weiter ist M relativ kompakt genau dann, wenn $\overline{M}$ kompakt ist und außerdem ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen in X.

Da Cauchyfolgen mit konvergenter Teilfolge konvergieren, sind kompakte Räume vollständig. Präziser gilt

Satz C.2 *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $X \neq \bigcup_{x\in F} U_\varepsilon(x)$ für alle endlichen Mengen $F \subset X$. Wir definieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so, dass $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für alle j, k mit $j \neq k$ gilt. Dazu wählen wir $x_1 \in X$ beliebig und nehmen an, dass wir $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für $j, k = 1, \ldots, n, j \neq k$ bereits definiert haben. Nach Annahme existiert dann ein $x \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n U_\varepsilon(x_j)$. Mit $x_{n+1} := x$ ist also $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für $j = 1, \ldots, n$. Damit ist (x_n) wie gewünscht. Die Folge (x_n) hat keine konvergente Teilfolge, also Widerspruch.
$\Leftarrow$ Da X präkompakt ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $F_n \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{y\in F_n} U_{1/n}(y).$$

Es sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Da F_1 endlich ist, existiert ein $y_1 \in F_1$ so, dass

$$I_1 := \{j \in \mathbb{N} : x_j \in U_1(y_1)\}$$

unendlich ist. Entsprechend existiert ein $y_2 \in F_2$ so, dass

$$I_2 := \{j \in I_1 : x_j \in U_{1/2}(y_2)\}$$

unendlich ist. Induktiv erhält man auf diese Weise eine Folge (y_n) und eine Folge (I_n) unendlicher Mengen mit $I_{n+1} \subset I_n \subset \mathbb{N}$ mit $x_j \in U_{1/n}(y_n)$ für $j \in I_n$. Setzt man $j_0 := 1$ und wählt für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in I_k$ mit $j_k > j_{k-1}$, so ist $j_k \geq k$ und $x_{j_m} \in U_{1/k}(y_k)$ für $m \geq k$, also $d(x_{j_m}, x_{j_{m'}}) < 2/k$ f"ur $m, m' \geq k$ und damit (x_{j_k}) eine Cauchy-Folge in X. Da (X, d) vollständig ist, ist (x_{j_k}) konvergent. □

Bemerkung C.3 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Als Folgerung aus Satz C.2 ergibt sich: Jede relativ kompakte Teilmenge ist präkompakt und im Fall, dass X vollständig ist, sind relative Kompaktheit und Präkompaktheit äquivalent.

> Denn: Ist $M \subset X$ relativ kompakt, so ist $\overline{M}$ kompakt, also auch präkompakt. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert eine endliche Menge $F \subset \overline{M}$ mit $\overline{M} \subset \bigcup_{x\in F} U_{\varepsilon/2}(x)$.[73] Wählt man zu $x \in F$ ein $y \in M$ mit $d(x,y) < \varepsilon/2$, so ist $U_\varepsilon(y) \supset U_{\varepsilon/2}(x)$. Damit kann M mit endlich vielen ε-Kugeln mit Mittelpunkten in M überdeckt werden. Ist X vollständig, so ist $\overline{M}$ für alle $M \subset X$ vollständig. Ist dabei M präkompakt, so ist auch $\overline{M}$ präkompakt, also dann auch kompakt.

Schießlich verwenden wir noch, dass X genau dann (folgen-)kompakt ist, wenn X überdeckungskompakt ist, d. h. für jedes System $\mathscr{U}$ offener Mengen mit $X = \bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$ existiert eine endliches Teilsystem $\mathscr{E}$ mit $X = \bigcup_{U\in\mathscr{E}} U$.[74]

---

[73] Die Kugeln $U_\delta(x)$ werden hier in X betrachtet.

[74] siehe etwa D. Werner, Funktionalanalysis, Springer, Berlin, 2005, Satz B.1.7.

Index