Jürgen Müller

Differenzialgleichungen und Integralsätze

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2022

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Definition und Beispiele **3**

2 Lösungstheorie für gewöhnliche Differenzialgleichungen **10**

3 Allgemeine lineare Differenzialgleichungen **21**

4 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung **32**

5 Stabilität **41**

6 Mannigfaltigkeiten **46**

7 Oberflächenintegrale und Gaußscher Integralsatz **53**

A Maße und Integrale **63**

1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen: Definition und Beispiele

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine unabhängige Variable, Funktionen und Ableitungen der Funktionen auftauchen. Dabei bezeichnen wir die unabhängige Variable meist mit t (Zeit).

Definition 1.1 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, und es sei $f : D \to \mathbb{K}^d$ stetig. Wir schreiben ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ meist in der Form (t, x), wobei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{K}^d$ ist.

1. Eine **(gewöhnliche) Differenzialgleichung (1. Ordnung)** ist eine Gleichung der Form
$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$
oder kurz
$$x' = f(t, x) ,$$
wobei $x'(t) = (x_1'(t), ..., x_d'(t))$. Ist $d = 1$, so spricht man auch von einer **skalaren Differenzialgleichung**, im Falle $d > 1$ dagegen auch von einem **System gewöhnlicher Differenzialgleichungen (1. Ordnung)**. Um einen Eindruck der durch die rechte Seite f gemachten Vorgabe zu bekommen, betrachtet man zur Veranschaulichung im skalaren Fall gelegentlich entsprechende Richtungsfelder, also Vektorfelder $\{(1, f(t, x)) : (t, x) \in E\}$, wobei E eine diskrete Teilmenge von D ist.

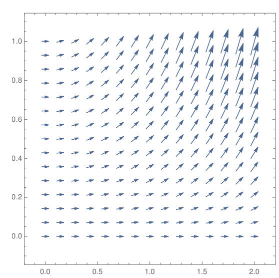

Abbildung 1: Richtungsfeld für $f(t, x) = tx$.

2. Ist $T \subset \mathbb{R}$, so heißt eine Funktion $\varphi : T \to \mathbb{K}^d$ bzw. das Paar (φ, T) eine **Lösung der Differenzialgleichung** (1.1) falls φ differenzierbar auf T ist, falls
$$\mathrm{graph}(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in T\} \subset D$$
gilt, und falls (1.1) für alle $t \in T$ erfüllt ist, d. h.
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (t \in T) .$$

3. Ist $(u, v) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form
$$x' = f(t, x), \qquad x(u) = v \tag{1.2}$$

ein **Anfangswertproblem** für die Differenzialgleichung (1.1) (kurz: AWP) und die Gleichung $x(u) = v$ **Anfangsbedingung**. Ist I ein Intervall mit $u \in I$ und ist (φ, I) eine Lösung von (1.1) mit $\varphi(u) = v$, so heißt φ bzw. (φ, I) **Lösung des Anfangswertproblems** (1.2).

Bevor wir uns mit der allgemeinen Theorie beschäftigen, betrachten wir einige einfache Spezialfälle mit Anwendungsbeispielen.

Bemerkung und Definition 1.2 Sind $T \subset \mathbb{R}$ offen und $D = T \times \mathbb{K}$, so heißt eine Gleichung der Form

$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t)$$

mit stetigen Funktionen $a : T \to \mathbb{K}$ und $b : T \to \mathbb{K}$ eine skalare **lineare Differenzialgleichung (1. Ordnung)**. Ist $b = 0$, so spricht man von einer **homogenen Gleichung**.

Bei skalaren linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung können die Lösungen mittels Integration bestimmt werden. Genauer gilt:

Satz 1.3 *Es seien $T \subset \mathbb{R}$ offen und $a, b : T \to \mathbb{K}$ stetig. Sind $u \in T$ und $v \in \mathbb{K}$, so hat für jedes Intervall $I \subset T$ mit $u \in I$ das Anfangswertproblem*

$$x' = a(t)x + b(t)\,, \qquad x(u) = v \tag{1.3}$$

genau eine Lösung φ auf I, die mit $\alpha(t) := \int_u^t a(s)ds$ für $t \in I$ gegeben ist durch

$$\varphi(t) = e^{\alpha(t)}\Big(v + \int_u^t e^{-\alpha(s)} b(s)ds\Big) \qquad (t \in I).$$

Beweis. Es gilt $\varphi(u) = e^{\alpha(u)}v = v$ und

$$\varphi'(t) = e^{\alpha(t)}a(t)\Big(v + \int_u^t e^{-\alpha(s)} b(s)ds\Big) + e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t) \quad (t \in I).$$

Also ist φ Lösung des Anfangswertproblems auf I.
Ist (ψ, I) eine weitere Lösung auf I und ist $\delta(t) := (\varphi - \psi)(t)e^{-\alpha(t)}$, so gilt

$$\delta'(t) = (\varphi'(t) - \psi'(t))e^{-\alpha(t)} - (\varphi(t) - \psi(t))e^{-\alpha(t)}a(t) = 0 \quad (t \in I)\,.$$

Da I ein Intervall ist, folgt $\delta(t) = \delta(u) = 0$ für $t \in I$ und (da exp nullstellenfrei ist) auch $\varphi = \psi$ auf I . $\square$

Beispiel 1.4 1. Sind $I = \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $a = \lambda 1_{\mathbb{R}}$ sowie $b = 0$, so ist $\alpha(t) = (t-u)\lambda$ und damit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit

$$\varphi(t) = ve^{(t-u)\lambda} \quad (t \in \mathbb{R})$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \lambda x(t), \qquad x(u) = v$$

auf $\mathbb{R}$. Ist $v > 0$, so ergibt sich im Fall $\lambda > 0$ ein exponentielles Wachstum und im Fall $\lambda < 0$ ein exponentielles Abklingen der Lösung φ für $t \to \infty$. Für $\lambda = i$ und $u = 0$ ist

$$\varphi(t) = ve^{it} = v(\cos t + i \sin t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

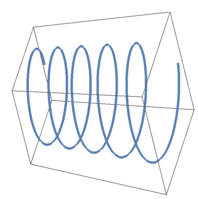

Abbildung 2: e^{it} für $t \in [0, 10\pi]$.

2. Es seien $T = \mathbb{R}$ und $a(t) = t$ sowie $b(t) = \mu \in \mathbb{K}$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = a(t)x + b(t) = tx + \mu, \qquad x(0) = v$$

wegen $\alpha(t) = t^2/2$ gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{t^2/2}\Big(v + \mu \int_0^t e^{-s^2/2}\, ds\Big) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

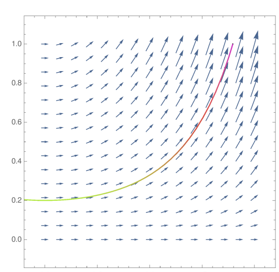

Abbildung 3: Richtungsfeld und Lösung für $\mu = 0$ und $v = 1/5$.

Wir betrachten einen zweiten Typ skalarer Gleichungen, bei denen ggfs. Lösungen per Integration berechnet werden können.

Bemerkung und Definition 1.5 Es seien T, X offen, $D = T \times X$ und f von der Form $f(t, x) = h(t)g(x)$ mit stetigen $h : T \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}$, also

$$x' = h(t)g(x).$$

Dann spricht man von einer **Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen** oder auch von einer **separierbaren Differenzialgleichung**. Ein wichtiger Spezialfall ist gegeben durch $h = 1_{\mathbb{R}}$, also

$$x' = g(x).$$

Solche Gleichungen nennt man **autonom**. Ist v eine Nullstelle von g, so ist die konstante Funktion $\varphi = v1_I$ für jedes Intervall $I \subset T$ und jedes $u \in I$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = h(t)g(x), \qquad x(u) = v. \tag{1.4}$$

Man nennt φ **triviale** oder **stationäre** Lösung.

Satz 1.6 *Es seien T, X ein offene Intervalle, $h : T \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ stetig, $u \in T$ und $v \in X$ mit $g(v) \neq 0$. Weiter seien $J \subset X$ ein Intervall mit $v \in J$ und $g(x) \neq 0$ für $x \in J$ sowie*

$$H(t) := \int_u^t h(s)ds \quad (t \in T), \qquad G(x) := \int_v^x \frac{ds}{g(s)} \quad (x \in J).$$

Dann existiert auf jedem Intervall $I \subset T$ mit $u \in I$ und $H(I) \subset G(J)$ genau eine Lösung (φ, I) des Anfangswertproblems (1.4). Diese erhält man durch Auflösen der Gleichung

$$G(x) = H(t)$$

nach x, also $\varphi = G^{-1} \circ H|_I$.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz ist $g > 0$ auf J oder $g < 0$ auf J. Wegen $G' = 1/g$ ist G daher streng monoton auf J. Also besitzt G eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \to J$. Ist $I \subset T$ ein offenes Intervall mit $u \in I$ und $H(I) \subset G(J)$, und ist $\varphi := G^{-1} \circ H$, so gilt $\varphi(u) = G^{-1}(H(u)) = G^{-1}(0) = v$ und

$$h = H' = (G \circ \varphi)' = ((1/g) \circ \varphi)\varphi',$$

also $\varphi' = h(g \circ \varphi)$. Ist $\psi : I \to J$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so gilt $\psi' = h(g \circ \psi)$ auf I und damit nach der Substitutionsregel

$$G(\psi(t)) = \int_{v=\psi(u)}^{\psi(t)} 1/g = \int_u^t ((1/g) \circ \psi)\psi' = \int_u^t h = H(t) \qquad (t \in I),$$

also auch $\psi(t) = G^{-1}(H(t)) = \varphi(t)$ für $t \in I$. $\square$

Bemerkung 1.7 1. Oft verwendet man Satz 1.6 lokal : Ist $g(v) \neq 0$, so existiert ein offenes Intervall $J \subset X$ mit $v \in J$ und $g(x) \neq 0$ auf J. Ist $u \in T$, so existiert dann wegen $H(u) = 0 = G(v)$ auch ein offenes Intervall $I \subset T$ mit $H(I) \subset G(J)$. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems lokal (also auf einer Umgebung von u) garantiert und die Lösung kann lokal durch Auflösen der Gleichung $H(t) = G(x)$ bestimmt werden.
2. Im Fall einer autonomen Gleichung ist $H(t) = t - u$ auf $\mathbb{R}$ und damit die Lösung von (1.4) gegeben durch

$$\varphi(t) = G^{-1}(t-u) \qquad (t \in u + G(J)).$$

Beispiel 1.8 1. Wir betrachten für $k \in \mathbb{Z}$ mit $X = \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$x' = g(x) = 1 + x^2\,, \qquad x(k\pi) = 0\,.$$

Die Lösung ergibt sich nach Bemerkung 1.7 mit $J = \mathbb{R}$ aus

$$G(x) = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

und $G(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$ als

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) = \tan(t - k\pi) = \tan(t) \qquad (t \in k\pi + (-\pi/2, \pi/2)).$$

Man sieht, dass die Lösung lediglich auf einem echten Teilintervall von $\mathbb{R}$ existiert. In einem solchen Fall sagt man, die Lösung hat eine **endliche Entweichzeit**.[1]
2. Wir betrachten die in der Populationsdynamik zur Modellierung von Tier- oder Pflanzenpopulationen oft verwendete **logistische Gleichung** $x' = g(x) := x(1-x)$ und suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x(1-x)\,, \qquad x(0) = v \geq 0\,.$$

Ist $v = 1$ oder $v = 0$, so ist $g(v) = 0$ und damit sind $\varphi = 1_{\mathbb{R}}$ und $\varphi = 0$ triviale Lösungen.

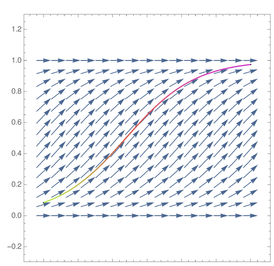

Abbildung 4: Richtungsfeld und Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 1/5$.

Es sei nun $0 < v < 1$. Nach Bemerkung 1.7 erhalten wir eine Lösung lokal aus

$$t = \int_0^t ds = \int_v^x \frac{ds}{s(1-s)} = \int_v^x \frac{ds}{s} + \int_v^x \frac{ds}{1-s} = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \ln\left(\frac{v}{1-v}\right),$$

[1] tan löst die Differenzialgleichung auf $(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}) - \pi/2$.

also $e^t\frac{v}{1-v} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ und damit

$$\varphi(t) = x = 1 - \frac{1}{1 + e^t\frac{v}{1-v}} = 1 - \frac{(1-v)e^{-t}}{(1-v)e^{-t}+v} = \frac{v}{(1-v)e^{-t}+v}\,.$$

Nachrechnen zeigt, dass dadurch eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben ist. Eine entsprechende Rechnung gilt für $v > 1$. Man beachte, dass nun

$$\varphi(t) = \frac{v}{(1-v)e^{-t}+v}$$

nur auf $(\ln(1-1/v), \infty)$ definiert und Lösung ist. Hier hat man wieder eine endliche Entweichzeit.

Bemerkung 1.9 Wir betrachten die Gleichung

$$x' = g(x) := \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases}\,.$$

Für $v \leq 0$ ist $\varphi(t) = v$ die triviale Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = v$ auf $\mathbb{R}$. Für $v = 0$ ist durch

$$\psi(t) := \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

eine weitere Lösung auf $\mathbb{R}$ gegeben. Man sieht, dass das Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$ mehrere Lösungen hat. Einen Punkt (u, v), an dem das Anfangswertproblem mit $x(u) = v$ mehrere Lösungen hat, nennt man **Verzweigungspunkt** der Differenzialgleichung.

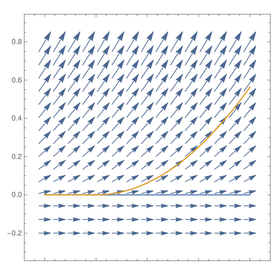

Abbildung 5: Richtungsfeld und zwei Lösungen zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Zum Abschluss wollen wir uns noch mit einer Klasse von Differenzialgleichungen beschäftigen, in denen höhere Ableitungen auftreten.

Definition 1.10 Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, und es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$. Eine Gleichung der Gestalt

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \tag{1.5}$$

oder kurz

$$x^{(n)} = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big)$$

heißt **(gewöhnliche) Differenzialgleichung n-ter Ordnung**. Eine Funktion $\varphi : T \to \mathbb{K}$ bzw. das Paar (φ, T) heißt **Lösung** von (1.5), falls φ n-mal differenzierbar auf T ist mit $(t, \varphi(t), ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\big) \qquad (t \in T)\,.$$

Ist $(u, v_0, \ldots, v_{n-1}) \in D$, so heißt ein Gleichungssystem der Form

$$x^{(n)} = f\big(t, x, \ldots, x^{(n-1)}\big), \quad x(u) = v_0, \ldots, x^{(n-1)}(u) = v_{n-1} \tag{1.6}$$

ein **Anfangswertproblem** für (1.5). Schließlich heißt eine Lösung (φ, I) von (1.5) **Lösung des Anfangswertproblems** (1.6), falls I ein Intervall ist und

$$\varphi(u) = v_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(u) = v_{n-1}$$

gilt.

Beispiel 1.11 (**harmonischer Oszillator**) Für $(v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ hat das Anfangswertproblem

$$x'' = -x, \qquad x(0) = v_0,\, x'(0) = v_1$$

hat die Lösung $\varphi(t) = v_0 \cos t + v_1 \sin t$ auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.12 Man kann eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung stets auf ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung wie aus Definition 1.1 umschreiben: Betrachten wir $F : D \to \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{array}{rcl} F_1(t, x_1, \ldots, x_n) & = & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_n) & = & x_n \\ F_n(t, x_1, \ldots, x_n) & = & f(t, x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Ist einerseits (φ, T) eine Lösung von (1.5), so ist $\Phi := (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})^\top$ wegen $\Phi' = (\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}, \varphi^{(n)})^\top$ eine Lösung von $x' = F(t, x)$ auf T. Ist andererseits (Φ, T) eine Lösung von $x' = F(t, x)$ und ist $\varphi := \Phi_1$, so ist $\varphi' = \Phi_1' = \Phi_2, \ldots, \varphi^{(n-1)} = \Phi_{n-1}' = \Phi_n$ und damit (φ, T) eine Lösung von (1.5). Außerdem löst (φ, I) das Anfangswertproblem (1.6) genau dann, wenn (Φ, I) das Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x), \qquad x(u) = (v_0, \ldots v_{n-1})^\top$$

löst.

Bemerkung 1.12 zeigt, dass man sich bei einer allgemeinen Lösungstheorie auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken kann. Einer solchen Lösungstheorie wenden wir uns als nächstes zu.

2 Lösungstheorie für gewöhnliche Differenzialgleichungen

Sind $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $a \in E$ und $\delta > 0$, so schreiben wir

$$U_\delta(a) := \{e \in E : ||e - a|| < \delta\} \quad \text{und} \quad B_\delta(a) := \{e \in E : ||e - a|| \leq \delta\}.$$

Im Weiteren betrachten wir stets die euklidsche Norm auf $\mathbb{K}^d$ (und schreiben dafür kurz $|\cdot|$) und auf $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ die Norm $|(t,x)| := |(t,x)|_{\max} := \max\{|t|, |x|\}$. Für $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ gilt dann

$$B_\delta(u,v) = B_\delta(u) \times B_\delta(v).$$

Im Weiteren sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$,[2] wobei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen ist. Für $(u,v) \in D$ betrachten wir das Anfangswertproblem (1.2), also

$$x' = f(t,x) \qquad x(u) = v\,.$$

In Bemerkung 1.9 haben wir gesehen, dass Verzweigungstellen existieren können. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass unter einer etwas stärkeren Voraussetzung als der Stetigkeit an f stets lokal eindeutige Lösbarkeit garantiert ist, und dass genau eine maximale Lösung existiert.

Definition 2.1 1. Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und $G \subset C(X, \mathbb{K}^d)$. Wir nennen G **gleichgradig Lipschitz-stetig**, falls ein $L \geq 0$ existiert mit

$$|g(x) - g(y)| \leq L d_X(x,y) \qquad (x, y \in X,\ g \in G).$$

Ist $G = \{g\}$ einelementig, so heißt g kurz **Lipschitz-stetig**.
2. Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}^d$ heißt **lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen** (oder kurz bezüglich x), wenn zu jedem $(u,v) \in D$ Umgebungen U von u von U und V von v so existieren, dass $\{f(t,\cdot)|_V : t \in U\}$ gleichgradig Lipschitz-stetig ist, d. h. falls eine Konstante $L = L(u,v) \geq 0$ existiert mit

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \qquad ((t,x),(t,y) \in U \times V)\,.$$

Wir schreiben $C^+(D, \mathbb{K}^d)$ für die Menge aller $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$, die lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen sind.

Satz 2.2 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Genau dann ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x, wenn für alle kompakten Mengen $K \subset D$ eine Konstante $L = L(K) \geq 0$ existiert mit*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y| \qquad ((t,x),(t,y) \in K)\,.$$

[2] Für metrische Räume X, Y bezeichnet $C(X,Y)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : X \to Y$.

Beweis. $\Leftarrow$: Ist $(u, v) \in D$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $K := B_\delta(u) \times B_\delta(v) \subset D$. Dabei ist K kompakt nach dem Satz von Heine-Borel.
$\Rightarrow$: Es sei $K \subset D$ kompakt. Angenommen, es existiert keine Konstante L wie gewünscht. Dann existieren Folgen (t_n, x_n), (t_n, y_n) in K mit

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)|/|x_n - y_n| \to \infty \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da K kompakt ist, besitzt (t_n, x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert (u, v) in K. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Folge (t_n, x_n) selbst konvergiert. Aus

$$|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)| \le 2 \max_K |f| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

folgt $|x_n - y_n| \to 0$. Dann gilt auch $(t_n, y_n) \to (u, v)$. Nach Voraussetzung existieren Umgebungen U von u und V von v und ein $L > 0$ mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y| \qquad ((t, x), (t, y) \in U \times V).$$

Da (t_n, x_n) und (t_n, y_n) für große n in $U \times V$ liegen, ergibt sich ein Widerspruch. □

Satz 2.3 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^d$. Existieren für $j, k = 1, \ldots, d$ die partiellen Ableitungen $\partial f_j/\partial x_k$ auf D und sind die Funktionen $\partial f_j/\partial x_k : D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.*

Beweis. Mit

$$\partial_2 f(t, x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(t, x) \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(t, x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(t, x) \end{pmatrix}$$

für $(t, x) \in D$ folgt aus Eigenschaften der Operatornorm[3] leicht, dass $\partial_2 f : D \to \mathbb{R}^{d \times d}$ stetig ist.[4] Ist $(u, v) \in D$, so ist $K := B_\delta(u) \times B_\delta(v) \subset D$ für genügend kleines $\delta > 0$ eine kompakte Umgebung von (u, v). Also existiert

$$L := \max_K \|\partial_2 f\|.$$

Für $(t, \xi) \in K$ ist $\partial_2 f(t, \xi)$ die Jacobi-Matrix von $f(t, \cdot)$ an der Stelle ξ. Sind $(t, x), (t, y) \in K$, so gilt damit nach dem Schrankensatz $|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y|$. □

Beispiel 2.4 1. Es sei $f(t, x) := tx^2$ für $t, x \in \mathbb{R}$ Dann gilt $\partial_2 f(t, x) = 2tx$. Insbesondere ist $\partial_2 f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach Satz 2.3 ist f auf $\mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x.

---

[3] Im Weiteren soll $\mathbb{K}^{d \times d}$ stets mit der Operatornorm $\|\cdot\|$, also $||A|| := \sup_{x \in B_1(0)} |Ax|$ für $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ versehen sein.

[4] vgl. https://www.math.uni-trier.de//~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Bemerkung 3.11

2. Für $t, x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(t,x) := g(x) := \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

wie in Bemerkung 1.9. Auf $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ist $\partial_2 f$ stetig. Also ist $f|_D$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. x. Andererseits gilt für alle $x > 0$

$$|g(x) - g(0)| = \sqrt{x} = \frac{|x-0|}{\sqrt{x}}\,.$$

Aus $1/\sqrt{x} \to \infty$ für $x \to 0^+$ folgt, dass f auf keiner offenen Menge D, die $\mathbb{R} \times \{0\}$ trifft, lokal Lipschitz-setig bezüglich x ist.

Wir zeigen nun, dass das Anfangswertproblem (1.2) äquivalent ist zu einer gewissen Integralgleichung. Um dies für $\mathbb{K}^d$-wertige Funktionen formulieren zu können, definieren wir für Intervalle I und $f = (f_1, \dots, f_d)^\top \in C(I, \mathbb{K}^d)$

$$\int_u^t f := \int_u^t f(s)ds := \Big(\int_u^t f_1, \dots, \int_u^t f_d\Big)^\top \in \mathbb{K}^d \qquad (u, t \in I).$$

Dann ist $f \mapsto \int_u^t f$ linear. Außerdem gilt

$$\Big|\int_u^t f\Big| \leq \Big|\int_u^t |f|\Big| \qquad (u, t \in I,\ f \in C(I, \mathbb{K}^d)).$$

Denn: Ohne Einschränkung können wir $u < t$ annehmen. Mit $v := \int_u^t f$ gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \overline{v}^\top v = \sum_{j=1}^d \overline{v}_j \int_u^t f_j(s)ds = \int_u^t \Big(\sum_{j=1}^d \overline{v}_j f_j(s)\Big)ds \\ &= \int_u^t \overline{v}^\top f(s)ds = \mathrm{Re} \int_u^t \overline{v}^\top f(s)ds = \int_u^t \mathrm{Re}(\overline{v}^\top f(s))ds \\ &\leq \int_u^t |\overline{v}^\top f(s)|ds \leq \int_u^t |v|\,|f(s)|ds = |v| \int_u^t |f|. \end{aligned}$$

Satz 2.5 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Weiter seien $(u, v) \in D$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $u \in I$. Dann sind für $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$ folgende Aussagen äquivalent:*

a) (φ, I) ist eine Lösung von (1.2), d. h. $\varphi(u) = v$ und

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (t \in I)\,.$$

b) Es ist $\mathrm{graph}(\varphi) \subset D$ und für alle $t \in I$ gilt

$$\varphi(t) = v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds\,.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Es sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, $v = (v_1, \dots, v_d)$. Aus $\varphi_j'(s) = f_j(s, \varphi(s))$ für $s \in I$ folgt insbesondere, dass φ_j' stetig ist. Mit $\varphi_j(u) = v_j$ ergibt sich durch Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung für alle $t \in I$ und $j = 1, \dots, d$

$$\varphi_j(t) - v_j = \int_u^t \varphi_j'(s)ds = \int_u^t f_j(s, \varphi(s))ds\,.$$

b) $\Rightarrow$ a): Da φ stetig auf I und f stetig auf D sind, ist $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I. Also ergibt sich a) durch Anwendung des Hauptsatzes über Integralfunktionen. $\square$

Bemerkung 2.6 1. Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann heißen $\overline{M} := M \cup M'$ der **Abschluss** von M, die Menge M° der inneren Punkte von M das **Innere** von M und $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ der **Rand** von M. Man sieht leicht, dass M° offen ist, und dass $\overline{M}$ und ∂M abgeschlossen sind. Für $A, B \subset X$ heißt zudem (mit $\inf \varnothing := \infty$)

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

der **Abstand** von A und B. Dabei gilt: Sind A abgeschlossen und B kompakt mit $A \cap B = \varnothing$, so ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ ([Ü]).
3. Sind $(E, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum und $A, B \subset E$ kompakt, so ist auch die **Minkowski-Summe** $A + B := \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ kompakt ([Ü]).

Damit können wir folgende erste Version eines Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Anfangswertprobleme beweisen.

Satz 2.7 (Picard-Lindelöf; lokale Version)
Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$. Dann existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset D$ ein $\alpha = \alpha(K) > 0$ so, dass das Anfangswertproblem (1.2) für jedes $(u, v) \in K$ und jedes Intervall $I \subset [u - \alpha, u + \alpha]$ mit $u \in I$ genau eine Lösung auf I besitzt.

Beweis. Unser Beweis beruht auf einer geeigneten Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.
1. Es sei $K \subset D$ kompakt. Da $\operatorname{dist}(K, \partial D)$ nach Bemerkung 2.6 positiv ist, existieren $\gamma > 0$ und $\beta > 0$ so, dass

$$K_{\gamma,\beta} := K + \{(t, x) : |t| \le \gamma,\, |x| \le \beta\}$$

in D enthalten ist. Nach Bemerkung 2.6 ist außerdem $K_{\gamma,\beta}$ kompakt. Wir setzen

$$M := \max_{K_{\gamma,\beta}} |f|$$

und (mit $\rho/0 := \infty$ für $\rho > 0$)

$$\alpha' := \min(\gamma, \beta/M)\,.$$

Es seien nun $(u, v) \in K$ und $I \subset [u - \alpha', u + \alpha']$ ein Intervall mit $u \in I$. Wir setzen[5]

$$C := \{\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d) : |\varphi(t) - v| \leq \beta \text{ für alle } t \in I\} \subset B(I, \mathbb{K}^d)\,.$$

Der normierte Raum $(B(I, \mathbb{K}^d), ||\cdot||_\infty)$ ist ein Banachraum.[6] Ist $(\varphi_n)_n$ eine Folge in C mit $\varphi_n \to \varphi$ für ein $\varphi \in B(I, \mathbb{K}^d)$, so ist φ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig auf I, d. h. $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$. Außerdem gilt für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(t) - v| \leq |\varphi_n(t) - v| + |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \beta + |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \to \beta \quad (n \to \infty)\,.$$

Also ist auch $|\varphi(t) - v| \leq \beta$. Damit ist $C \subset B(I, \mathbb{K}^d)$ abgeschlossen. Ist $\varphi \in C$, so folgt $(s, \varphi(s)) \in K_{\gamma,\beta} \subset D$ für alle $s \in I$. Da $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ stetig auf I ist, definiert

$$T\varphi(t) := v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds \qquad (t \in I)\,.$$

nach dem Hauptsatz über Integralfunktionen eine auf I stetige Funktion $T\varphi$.[7] Weiter gilt für $t \in I$

$$|T\varphi(t) - v| = \Big|\int_u^t f(s, \varphi(s))ds\Big| \leq \Big|\int_u^t |f(s, \varphi(s))|ds\Big| \leq M \cdot |t - u| \leq M \cdot \alpha' \leq \beta\,.$$

Also ist $T\varphi \in C$ und damit $T(C) \subset C$.
2. Es seien nun $0 < \lambda < 1$, $L = L(K_{\gamma,\beta})$ wie in Satz 2.2,

$$\alpha := \min(\alpha', \lambda/L)$$

und $I \subset [u - \alpha, u + \alpha]$. Dann gilt für $\varphi, \psi \in C$ und $t \in I$

$$\begin{aligned} |T\varphi(t) - T\psi(t)| &\leq \Big|\int_u^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|ds\Big| \leq \\ &\leq L\Big|\int_u^t |\varphi(s) - \psi(s)|ds\Big| \leq L\|\varphi - \psi\|_\infty |t - u| \\ &\leq L\|\varphi - \psi\|_\infty \cdot \alpha \leq \lambda\|\varphi - \psi\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \lambda\|\varphi - \psi\|_\infty$$

und damit T eine λ-Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz[8] hat T genau einen Fixpunkt $\varphi \in C$, d. h. es existiert genau eine Funktion $\varphi \in C$ mit

$$\varphi(t) = T\varphi(t) = v + \int_u^t f(s, \varphi(s))ds \qquad (t \in I)\,.$$

Da jede Funktion, die das Anfangswertproblem (1.2) auf I löst, notwendigerweise in C liegt ([Ü]), ist φ nach Satz 2.5 die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (1.2) auf I. □

[5]Für eine Menge M und einen Banachraum $(E, |\cdot|_E)$ bezeichnet $(B(M, E), \|\cdot\|_\infty)$ den Raum der auf M beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm.

[6]siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 1.21.

[7]tatsächlich ist $T\varphi$ sogar stetig differenzierbar

[8]siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 5.2

Bemerkung 2.8 Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$.
1. Man sagt, dass Anfangswertproblem (1.2) sei **lokal eindeutig lösbar**, falls eine Umgebung U von u so existiert, dass das Anfangswertproblem auf jedem Intervall $I \subset U$ mit $u \in I$ genau eine Lösung hat. Insbesondere ergibt sich aus Satz 2.7, dass für $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ das Anfangswertproblem in jedem Punkt $(u, v) \in D$ lokal eindeutig lösbar ist (man wähle $K = \{(u, v)\}$ und $U := [u - \alpha, u + \alpha]$).[9]
2. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 2.7 ergibt sich für $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgendes iterative Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems (1.2): Ist $I \subset [u-\alpha, u+\alpha]$ und sind $T^n : C \to C$ die Iterierten von T, d. h. $T^0 := \mathrm{id}_C$ und $T^n := T \circ T^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert für jeden Startwert $\psi \in C$ die Folge $(T^n\psi)$, also

$$(T^n\psi)(t) = v + \int_u^t f(s, T^{n-1}\psi(s))ds \quad (t \in I,\, n \in \mathbb{N}),$$

gleichmäßig auf I gegen die Lösung φ und der Fehler $\|\varphi - T^n\psi\|_\infty$ klingt mit geometrischer Rate λ^n ab. Das dadurch definierte Näherungsverfahren zur Bestimmung der Lösung heißt **Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren**. Für das einfache Beispiel $x' = x$, $x(0) = 1$ erhalten wir mit $\psi = 1_\mathbb{R}$

$$(T^n\psi)(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{t^\nu}{\nu!}\,,$$

also $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} T^n\psi = \exp$, hier sogar gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall mit $0 \in I$.

Definition 2.9 1. Es seien (φ, I) und (ψ, J) Lösungen des Anfangswertproblems (1.2). Dann heißt (φ, I) **Fortsetzung** von (ψ, J) bzw. (ψ, J) **Einschränkung** von (φ, I), falls $I \supset J$ und $\varphi|_J = \psi$ gilt. Dabei nennt man im Falle $I \neq J$ die Fortsetzung bzw. die Einschränkung **echt**. Die Lösung (φ, I) heißt **maximal**, falls (φ, I) keine echte Fortsetzung hat. Das Intervall I heißt dann ein **maximales Lösungsintervall** des Anfangswertproblems.
2. Das Anfangswertproblem (1.2) heißt **global eindeutig lösbar**, falls eine Lösung (φ_0, I_0) so existiert, dass jede Lösung Einschränkung davon ist. In diesem Fall ist (φ_0, I_0) maximal und einzige maximale Lösung. Wenn wir die Abhängigkeit von den Anfangswerten (u, v) betonen möchten, schreiben wir im Falle der global eindeutigen Lösbarkeit auch $\varphi(\cdot, u, v)$ für die maximale Lösung und $I(u, v)$ für das maximale Lösungsintervall.

Beispiel 2.10 1. Wir betrachten wieder Beispiel 1.4.1. Mit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad x(u) = v$$

[9] Man kann zeigen, dass auch ohne die Voraussetzung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems auf einer Umgebung von u gesichert ist Dies ist der Existenzsatz von Peano. Wie etwa Bemerkung 1.9 zeigt, sind die Lösungen in diesem Fall allerdings im Allgemeinen nicht mehr lokal eindeutig. Auf den Beweis des Satzes von Peano, der weitergehende Hilfsmittel der Analysis erfordert, werden wir nicht eingehen. Einen Beweis findet man etwa in B. Aulbach, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Spektrum Verlag, Heidelberg, 1997.

für $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ nach Satz 1.3 global eindeutig lösbar mit

$$\varphi(t, u, v) = ve^{(t-u)\lambda} \quad \text{auf} \quad I(u, v) = \mathbb{R}\,.$$

2. Ist $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(t, x) = g(x) = \sqrt{|x|}$ für $t, x \in \mathbb{R}$, so ist das Anfangswertproblem $x' = g(x)$, $x(1) = 1/4$ nach Satz 1.6 zwar lokal eindeutig lösbar, nämlich durch $\varphi(t) = t^2/4$ für $t > 0$, kann aber einerseits durch 0 und andererseits durch $-t^2/4$ zu einer Lösung auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Damit ist das Anfangswertproblem nicht global eindeutig lösbar.

Satz 2.11 *Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ist das Anfangswertproblem (1.2) für jedes $(u, v) \in D$ lokal eindeutig lösbar, so ist es auch für jedes $(u, v) \in D$ global eindeutig lösbar.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Sind (φ, I) und (ψ, J) Lösungen von (1.2), so gilt

$$\varphi|_{I \cap J} = \psi|_{I \cap J}\,.$$

Angenommen, es existiert ein $t \in I \cap J$ mit $\varphi(t) \neq \psi(t)$. Ohne Einschränkung betrachten wir den Fall $t > u$ und setzen

$$\tau := \inf\{t \in I \cap J : t > u,\, \varphi(t) \neq \psi(t)\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist $u < \tau$ und nach Definition von τ

$$\varphi|_{[u,\tau)} = \psi|_{[u,\tau)}\,.$$

Da φ und ψ stetig auf $[u, \tau] \subset I \cap J$ sind, gilt auch

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau)$$

und damit insbesondere $\tau < t$. Also ist τ kein Randpunkt von $I \cap J$ und φ und ψ sind Lösungen von $x' = f(t, x)$, $x(\tau) = \psi(\tau)(= \varphi(\tau))$ auf $I \cap J$. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von τ mit $\varphi|_U = \psi|_U$, im Widerspruch zur Definition von τ.
2. Es seien $(u, v) \in D$ und I_0 die Vereinigung aller Intervalle I mit $u \in I$ und so, dass auf I eine Lösung φ von (1.2) existiert (solche Intervalle existieren nach Voraussetzung). Nach 1. ist durch $\varphi_0(t) := \varphi(t)$ falls $t \in I$ eine Funktion $\varphi_0 : I_0 \to \mathbb{K}^d$ wohldefiniert. Aus der Definition ergibt sich, dass φ_0 Lösung von (1.2) ist und dass jede Lösung Einschränkung von (φ_0, I_0) ist. □

Es gilt damit

Satz 2.12 (Picard-Lindelöf, globale Version)
Es seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ und $(u, v) \in D$. Dann ist das Anfangswertproblem (1.2) global eindeutig lösbar und zu jeder kompakten Menge $K \subset D$ existieren u_1, u_2 mit $\inf I(u, v) < u_2 < u < u_1 < \sup I(u, v)$ und der Eigenschaft, dass $(t, \varphi(t, u, v)) \notin K$ für alle $t > u_1$ und für alle $t < u_2$. Außerdem ist $I(u, v)$ offen.

Beweis. Nach Bemerkung 2.8.1 ist das Anfangswertproblem (1.2) für jedes (u, v) lokal eindeutig lösbar. Aus Satz 2.11 folgt dann die global eindeutige Lösbarkeit.
Es seien $K \subset D$ kompakt und $(u, v) \in D$. Angenommen, es existiert kein u_1 wie gefordert. Ist $b = \sup I(u, v) \in (u, \infty]$, so existiert damit eine Folge (t_n) mit $u < t_n \to b$ für $n \to \infty$ und

$$(t_n, \varphi(t_n, u, v)) \in K \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Dann ist insbesondere $b < \infty$. Es sei nun $\alpha = \alpha(K)$ wie in Satz 2.7. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t_N > b - \alpha$ und betrachten das Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_N) = w := \varphi(t_N, u, v) .$$

Nach Satz 2.7 gilt $[t_N - \alpha, t_N + \alpha] \subset I(t_N, w)$ für die maximale Lösung $\varphi(\cdot, t_N, w)$. Da $t_N + \alpha > b$ gilt und da $\varphi(\cdot, t_N, w)$ als Fortsetzung von $\varphi(\cdot, u, v)$ auch Lösung von (1.2) ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Maximalität von $\varphi(\cdot, u, v)$. Also existiert ein u_1 wie gefordert. Zudem ist dabei $b \notin I(u, v)$, denn sonst wäre $[u, b] \times \varphi([u, b], u, v)$ kompakt in D als Bild der stetigen Funktion $t \mapsto (t, \varphi(t, u, v))$ unter der kompakten Menge $[u, b]$. Dies widerspricht aber dem eben Bewiesenen.
Eine entsprechende Argumentation für $a := \inf I(u, v)$ zeigt die Existenz eines u_2 wie gefordert und damit insbesondere auch $a \notin I(u, v)$. □

Bemerkung 2.13 Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.12 existiert zu jedem $(u, v) \in D$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi(\cdot, u, v)$. Die dadurch definierte Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ mit

$$\Omega := \{(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d : t \in I(u, v),\ (u, v) \in D\}$$

nennen wir die **allgemeine Lösung** der Differenzialgleichung $x' = f(t, x)$. Dabei „verlässt $\varphi(\cdot, u, v)$ jede kompakte Teilmenge von D“, sowohl bei Annäherung an den rechten Randpunkt von $I(u, v)$, als auch bei Annäherung an den linken.[10]

Beispiel 2.14 1. Es sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = tx^2 , \qquad x(u) = v$$

für $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist $v = 0$, so ist $\varphi(\cdot, u, 0) = 0$ auf $\mathbb{R}$ die maximale Lösung. Nach Bemerkung 1.7 ergibt sich für $v \neq 0$ eine Lösung lokal durch Auflösen von

$$\frac{1}{2}(t^2 - u^2) = \int_u^t s\, ds = \int_v^x \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v} ,$$

nach x. Man erhält dann

$$x = \frac{1}{1/v - (t^2 - u^2)/2} = \frac{2v}{2 - v(t^2 - u^2)}$$

[10] Man spricht auch davon, dass die maximalen Lösungen von Rand zu Rand verlaufen.

für $|t-u|$ genügend klein. Genauer ist dadurch eine Lösung des Anfangswertproblems auf jedem Intervall gegeben, das u, aber nicht die im Falle $c := c(u,v) := u^2 + 2/v \geq 0$ auftretenden Nullstellen des Nenners $\pm\sqrt{c}$, enthält. Nach passenden Fallunterscheidungen ergibt sich (mit viel Konzentration)

$$\varphi(t,u,v) = \frac{2v}{2 - v(t^2 - u^2)} \quad \text{für } t \in I(u,v) = \begin{cases} \mathbb{R}\,, & \text{falls } c < 0 \\ (-\sqrt{c}, \sqrt{c})\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v > 0 \\ (\sqrt{c}, \infty)\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v < 0,\ u > 0 \\ (-\infty, -\sqrt{c})\,, & \text{falls } c \geq 0,\ v < 0,\ u < 0 \end{cases}.$$

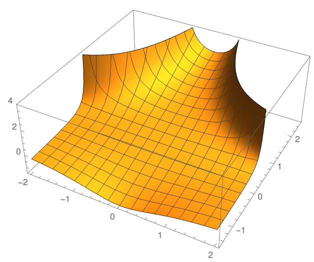

Abbildung 6: Lösungen $\varphi(t,0,v)$ für $t \in [-2,2]$ und $v \in [-3/2, 5/2]$.

Alle Lösungen verlassen jede kompakte Teilmenge von $D = \mathbb{R}^2$. Genauer gilt im Fall $c \geq 0$

$$\varphi(t,u,v) \to \begin{cases} \infty & \text{für } t \to \pm\sqrt{c}\,, & \text{falls } v > 0 \\ -\infty & \text{für } t \to \sqrt{c}\,, & \text{falls } v < 0,\ u > 0 \\ -\infty & \text{für } t \to -\sqrt{c}\,, & \text{falls } v < 0,\ u < 0 \end{cases}.$$

2. Es seien $D = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ die offene obere Halbebene und $f(t,x) = -t/x$. Dann ergibt sich aus Satz 1.6 ([Ü])

$$\varphi(t,u,v) = \sqrt{u^2 + v^2 - t^2} \qquad (t \in I(u,v))$$

mit $I(u,v) = (-\sqrt{u^2+v^2}, \sqrt{u^2+v^2})$. Wieder verlassen die Lösungen jede kompakte Teilmenge von D für $t \to \pm\sqrt{u^2+v^2}$.

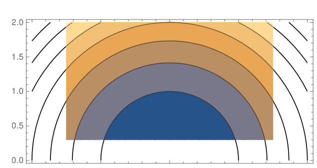

Abbildung 7: Graphen der Lösungen $\varphi(t,u,v)$.

3. Es sei $D = (0,\infty) \times \mathbb{C}$ und $f(t,x) = -ix/t^2$. Aus Satz 1.3 folgt ([Ü])

$$\varphi(t, 1/\pi, -1) = e^{i/t} \qquad (t \in (0,\infty))\,.$$

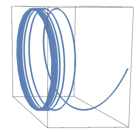

Abbildung 8: Lösung $\varphi(t, 1/\pi, -1)$.

Am linken Randpunkt 0 des maximalen Lösungsintervalls $(0, \infty) = I(1/\pi, -1)$ existiert hier kein Grenzwert!

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an f kann man eine Aussage über die Größe der maximalen Lösungsintervalle machen. Vorbereitend beweisen wir das äußerst nützliche **Lemma von Gronwall**:

Satz 2.15 *Es seien* $-\infty < u < \beta \leq \infty$ *und* $\psi \in C([u, \beta), \mathbb{R})$. *Existieren Konstanten* $A \in \mathbb{R}$ *und* $B \geq 0$ *mit*

$$\psi(t) \leq A + B \int_u^t \psi \qquad (t \in [u, \beta)),$$

so ist

$$\psi(t) \leq A e^{B(t-u)} \qquad (t \in [u, \beta)).$$

Beweis. Für $\delta \geq 0$ setzen wir

$$g_\delta(t) = (A + \delta) e^{B(t-u)} \qquad (t \in [u, \beta))\,.$$

Dann gilt $g_\delta'(t) = B g_\delta(t)$ und nach Satz 2.5

$$g_\delta(t) = A + \delta + B \int_u^t g_\delta \qquad (t \in [u, \beta))\,.$$

Wir zeigen: Für alle $\delta > 0$ ist $\psi < g_\delta$. Dann ist $\psi \leq g_0$ und damit gilt die Behauptung. Dazu sei $\delta > 0$. Angenommen, es existiert ein t mit $\psi(t) \geq g_\delta(t)$. Wegen

$$\psi(u) \leq A < A + \delta = g_\delta(u)$$

ist

$$\tau := \inf\{t \in [u, \beta) :\ \psi(t) \geq g_\delta(t)\} > u$$

und es gilt $\psi|_{[u,\tau]} \leq g_\delta|_{[u,\tau]}$ sowie $\psi(\tau) = g_\delta(\tau)$. Nach Voraussetzung ist dann aber andererseits auch

$$\psi(\tau) \leq A + B \int_u^\tau \psi < A + \delta + B \int_u^\tau g_\delta = g_\delta(\tau)\,.$$

Widerspruch! $\square$

Satz 2.16 (linear beschränkte rechte Seite)
Es sei D eine Zylindermenge der Form $D = I \times \mathbb{K}^d$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Weiter sei $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$ so, dass zu jedem kompakten Intervall $J \subset I$ Konstanten $L, M \geq 0$ existieren mit

$$|f(t,x)| \leq L|x| + M \qquad ((t,x) \in J \times \mathbb{K}^d).$$

Dann ist $I(u,v) = I$ für alle $(u,v) \in D$.

Beweis. Angenommen, $I(u,v) \neq I$. Ohne Einschränkung sei $\beta := \sup I(u,v) < \sup I$. Dann ist $J := [u,\beta] \subset I$ kompakt und damit existieren $L, M \geq 0$ mit $|f(t,x)| \leq L|x| + M$ für alle $(t,x) \in J \times \mathbb{K}^d$. Für $t \in [u,\beta)$ gilt nach Satz 2.5

$$\varphi(t,u,v) = v + \int_u^t f(s, \varphi(s, u.v))ds$$

und mit $\alpha := \beta - u$ daher

$$\psi(t) := |\varphi(t, u.v)| \leq |v| + \int_u^t |f(s, \varphi(s, u.v))|\, ds \leq |v| + M\alpha + L \int_u^t \psi \qquad (t \in [u,\beta))\,.$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$|\varphi(t,u,v)| = \psi(t) \leq (|v| + M\alpha)e^{L(t-u)} \leq (|v| + M\alpha)e^{L\alpha} \quad (t \in [u,\beta))\,,$$

also ist $\varphi(\cdot, u.v)$ beschränkt auf $[u,\beta)$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $\varphi(\cdot, u, v)$ für $t \to \beta$ nach Satz 2.12 jede kompakte Teilmenge von D verlässt. $\square$

3 Allgemeine lineare Differenzialgleichungen

Bereits in Abschnitt 1 hatten wir uns kurz mit (skalaren) linearen Differenzialgleichungen beschäftigt. Wir untersuchen jetzt den wesentlich allgemeineren Fall von Systemen linearer Differenzialgleichungen. Dazu seien im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A = (a_{jk}) \in C(I, \mathbb{K}^{d\times d})$ sowie $b \in C(I, \mathbb{K}^d)$. Mit $D := I \times \mathbb{K}^d$ und $f : D \to \mathbb{K}^d$, definiert durch $f(t,x) := A(t)x + b(t)$, nennt man die Differenzialgleichung

$$x' = f(t,x) = A(t)x + b(t) \tag{3.1}$$

ein **lineares System** (von Differenzialgleichungen) oder kurz **lineare Differenzialgleichung** (man beachte dabei: $f : D \to \mathbb{K}^d$ ist stetig). Die Gleichung

$$x' = A(t)x \tag{3.2}$$

heißt **zugehörige homogene Gleichung**. Ist $b = 0$, so heißt (3.1) **homogen**. Meist betrachten wir auch jetzt wieder Anfangswertprobleme der Form

$$x' = A(t)x + b(t)\,, \qquad x(u) = v \tag{3.3}$$

für $u \in I, v \in \mathbb{K}^d$. Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes erhalten wir unmittelbar

Satz 3.1 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig. Dann ist für jedes $(u,v) \in I \times \mathbb{K}^d$ das Anfangswertproblem (3.3) global eindeutig lösbar mit $I(u,v) = I$.*

Beweis. Für $f : D = I \times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$ mit $f(t,x) := A(t)x + b(t)$ gilt

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |A(t)(x-y)| \le ||A(t)||\,|x-y| \qquad (t \in I, x, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Ist $J \subset I$ kompakt, so existiert

$$L := \max_{t\in J} ||A(t)||\,.$$

Also gilt

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y| \qquad (t \in J,\, x, y \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Insbesondere ist damit $f \in C^+(D, \mathbb{K}^d)$, also nach der globalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf (S. 2.12) jedes Anfangswertproblem (3.3) global eindeutig lösbar. Zudem ergibt sich mit $M := \max_{t\in J} |b(t)|$ wegen $f(t,0) = b(t)$

$$|f(t,x)| \le |f(t,x) - f(t,0)| + |f(t,0)| \le L|x| + M \quad (t \in J,\, x \in \mathbb{K}^d)\,.$$

Aus S. 2.16 folgt $I(u,v) = I$. □

Wir wollen uns nun die Struktur der Lösungsmenge von (3.1) genauer anschauen. Dazu betonen wir die Abhängigkeit von der Inhomogenität b und schreiben $\varphi_b(\cdot, u, v)$ für die maximale Lösung von (3.3). Außerdem setzen wir

$$L_b := \{\psi : \psi \text{ löst (3.1) auf } I\}\,,$$

also insbesondere
$$L_0 = \{\psi : \psi \,\text{löst (3.2) auf } I\}\,.$$
Ist $u \in I$, so gilt wegen $\psi = \varphi_b(\cdot, u, \psi(u))$ für alle $\psi \in L_b$
$$L_b = \{\varphi_b(\cdot, u, v) : v \in \mathbb{K}^d\}$$
und insbesondere
$$L_0 := \{\varphi_0(\cdot, u, v) : v \in \mathbb{K}^d\}\ .$$
Weiter erhalten wir

Satz 3.2 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}, b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig.*

1. *Für jedes $u \in I$ ist $T_u : \mathbb{K}^d \to C(I, \mathbb{K}^d)$ mit $T_u v := \varphi_0(\cdot, u, v)$ linear und injektiv.*
2. *L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$ und für $\psi_b \in L_b$ gilt*
$$L_b = \psi_b + L_0,$$
d. h. L_b ist ein d-dimensionaler affiner Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$.

Beweis. 1. Wir schreiben kurz $T = T_u$. Sind $v, w \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt
$$(\lambda Tv + Tw)' = \lambda(Tv)' + (Tw)' = \lambda ATv + ATw = A(\lambda Tv + Tw)$$
auf I und
$$(\lambda Tv + Tw)(u) = \lambda\varphi_0(u, u, v) + \varphi_0(u, u, w) = \lambda v + w\,.$$
Wegen der Eindeutigkeit der maximalen Lösung von (3.3) ist folglich
$$\lambda Tv + Tw = \varphi_0(\cdot, u, \lambda v + w),$$
also $\lambda Tv + Tw = T(\lambda v + w)$. Damit ist T linear. Ist $Tv = 0$, so gilt
$$0 = Tv(u) = \varphi_0(u, u, v) = v.$$
Also ist T injektiv.
2. Aus 1. folgt, dass $L_0 = \text{Bild}(T)$ isomorph zu $\mathbb{K}^d$ ist. Damit ist L_0 ein d-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K}^d)$. Es bleibt zu zeigen, dass $L_b = \psi_b + L_0$ gilt.
$\supset$: Es sei $\psi \in \psi_b + L_0$, d. h. $\psi = \psi_b + \psi_0$ für ein $\psi_0 \in L_0$. Dann ist
$$\psi' = A\psi_b + b + A\psi_0 = A(\psi_b + \psi_0) + b = A\psi + b$$
auf I. Also ist $\psi \in L_b$.
$\subset$: Es sei $\psi \in L_b$, d. h. $\psi' = A\psi + b$ auf I. Dann gilt $(\psi - \psi_b)' = A(\psi - \psi_b)$, also $\psi - \psi_b \in L_0$. Damit ist $\psi = \psi_b + (\psi - \psi_b) \in \psi_b + L_0$. □

Satz 3.2.2 zeigt, dass sich die Bestimmung einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems $x' = A(t)x + b(t)$ auf die Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Basis des Lösungsraumes L_0 der zugehörigen inhomogenen Gleichung reduziert. Wir befassen uns zunächst mit homogenen Gleichungen (und schreiben meist wieder φ statt φ_0).

Bemerkung und Definition 3.3 1. Da nach Satz 3.2.2 der Lösungsraum L_0 der homogenen Gleichung $x' = A(t)x$ ein d-dimensionaler linearer Raum ist, reicht es, zur Bestimmung einer beliebigen Lösung ein linear unabhängiges System $(\psi_1, \ldots, \psi_d)$ von Lösungen zu kennen. Eine solches System nennt man ein **Fundamentalsystem** der Gleichung (3.2). Die lineare Unabhängigkeit von Lösungen ist nach Satz 3.2.1 äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Anfangswerte.
2. Sind $\psi_1, \ldots, \psi_d \in C(I, \mathbb{K}^d)$ und ist

$$\Phi := (\psi_1, \ldots, \psi_d) = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \ldots & \psi_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{d,1} & \ldots & \psi_{d,d} \end{pmatrix},$$

wobei $\psi_{j,k}$ die j-te Komponentenfunktion von ψ_k bezeichnet, so sind $\psi_1, \ldots, \psi_d$ Lösungen von $x' = A(t)x$ auf I genau dann, wenn Φ Lösung der Matrix-Differenzialgleichung

$$X' = A(t)X$$

ist, also $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ für $t \in I$ gilt ([Ü]).[11]
3. Sind $\psi_1, \ldots, \psi_d$ Lösungen von $x' = A(t)x$ auf I, so heißt

$$W(t) := W(\psi_1, ..., \psi_d; t) := \det \Phi(t)$$

die **Wronski-Determinante** von $\psi_1, ..., \psi_d$ an der Stelle $t \in I$. Wegen $\psi_k = \varphi(\cdot, u, \psi_k(u))$ sind nach Satz 3.2 äquivalent:

a) $\psi_1, ..., \psi_d$ ist ein Fundamentalsystem.

b) $W(u) \neq 0$ für ein $u \in I$.

c) $W(u) \neq 0$ für alle $u \in I$.

Bilden $\psi_1, ..., \psi_d$ ein Fundamentalsystem, so heißt die Funktion $\Phi : I \to \mathbb{K}^{d \times d}$ eine **Fundamentalmatrix** der Gleichung $x' = A(t)x$.

Bemerkung 3.4 Es seien I ein offenes Intervall und $a = (a_1, a_2)^\top \in C(I, \mathbb{R}^2)$. Dann ist $\varphi : I \to \mathbb{C}$ Lösung von

$$x' = (a_1(t) + ia_2(t))\, x$$

genau dann, wenn $(\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi)$ Lösung von

$$x' = \begin{pmatrix} a_1(t) & -a_2(t) \\ a_2(t) & a_1(t) \end{pmatrix} x$$

[11] Wir verwenden hier die Definition der Differenzierbarkeit für Funktionen $bA : I \to \mathbb{K}^{m \times d}$ als Abbildungen in den Banachraum $(\mathbb{K}^{m \times d}, \|\cdot\|)$ versehen mit der Operatornorm. Dabei ist $\Phi = (\psi_{j,k})$ differenzierbar an $a \in I$ genau dann, wenn alle $\psi_{j,k}$ an a differenzierbar sind, und in dem Fall ist $\Phi'(a) = (\psi'_{j,k}(a))$.

([Ü]). Ist etwa $I = (0, \infty)$ und

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1/t^2 \\ -1/t^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (t > 0)\,,$$

so ist $a_1(t) = 0$ und $a_2(t) = -1/t^2$. Aus Satz 1.3 ergibt sich für $v = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ (vgl. Beispiel 2.14.3)

$$\varphi(t, 1/\pi, v_1 + iv_2) = -(v_1 + iv_2)e^{i/t} \qquad (t > 0).$$

Insbesondere erhält man mit $v = (-1, 0)$ und $v = (0, 1)$ die Lösungen

$$\psi_1(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(e^{i/t}) \\ \mathrm{Im}(e^{i/t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1/t) \\ \sin(1/t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_2(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(-ie^{i/t}) \\ \mathrm{Im}(-ie^{i/t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ -\cos(1/t) \end{pmatrix}$$

von $x' = A(t)x$ auf $(0, \infty)$. Mit

$$\Phi = (\psi_1, \psi_2) = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1/\cdot) & \sin(1/\cdot) \\ \sin(1/\cdot) & -\cos(1/\cdot) \end{pmatrix}$$

ist $W(1/\pi) = \det \Phi(1/\pi) = -1$ und damit Φ eine Fundamentalmatrix.

Satz 3.5 *Ist Φ eine Fundamentalmatrix von $x' = A(t)x$, so gilt für alle $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^d$*

$$\varphi(t, u, v) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(u) \cdot v \qquad (t \in I)$$

d. h. die allgemeine Lösung der Gleichung ergibt sich als Produkt der matrixwertigen Funktion Φ mit dem Vektor $\Phi^{-1}(u)v$.

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 3.3 ist $\Phi(u)$ für alle $u \in I$ invertierbar (da $W(u) = \det \Phi(u) \neq 0$). Für jedes $v \in \mathbb{K}^d$ ist $\psi := \Phi\Phi^{-1}(u)v$ eine Linearkombination der Spalten $\psi_1, ..., \psi_d$ von Φ, also eine Lösung von $x' = A(t)x$. Außerdem gilt

$$\psi(u) = \Phi(u)\Phi^{-1}(u)v = v\,,$$

d. h. auch die Anfangsbedingung ist erfüllt. Folglich ist $\psi = \varphi(\cdot, u, v)$. □

Beispiel 3.6 Es seien A und Φ wie in Bemerkung 3.4. Dann gilt

$$\Phi(1/\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\Phi^{-1}(1/\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x$, $x(1/\pi) = v$ gegeben durch

$$\varphi(t, 1/\pi, v) = \Phi(t)\begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1\cos(1/t) + v_2\sin(1/t) \\ -v_1\sin(1/t) - v_2\cos(1/t) \end{pmatrix} = -v_1\psi_1(t) + v_2\psi_2(t)\,.$$

Wir betrachten nun sehr spezielle lineare Systeme, für die wir in gewisser Weise explizite Fundamentalsystme angeben können. Es sei

$$x'(t) = Ax(t)\,, \tag{3.4}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine feste Matrix ist (also unabhängig von t). Eine solche Gleichung heißt **lineares System mit konstanten Koeffizienten**.

Bemerkung 3.7 Wir erweitern verschiedene Begriffe der Analysis in natürlicher Weise.
1. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Man kann leicht zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe in E auch konvergiert ([Ü]).[12] Ist (c_k) eine Folge in E, so heißt

$$R := \sup\{r \geq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} r^k \|c_k\| < \infty\}$$

Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} h^k c_k$. Die Potenzreihe ist dann konvergent in E für alle h mit $|h| < R$. Ist $a \in \mathbb{K}$ und ist $f : U_R(a) \to E$ definiert durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k c_k,$$

so ist f differenzierbar auf $U_R(a)$ mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k (k+1) c_{k+1}\ .$$

2. Es sei nun $(E, ||\cdot||)$ spezieller eine unitale Banachalgebra, d. h. es existiert zusätzlich eine Abbildung $\cdot : E \times E \to E$ so, dass $(E, +, \cdot)$ ein Ring ist und dass zudem für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $a, b \in E$ gilt

$$\lambda(a\cdot b) = \lambda a \cdot b = a \cdot \lambda b \quad \text{und} \quad ||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b||.$$

Dann ist für jede konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ in E und $a \in E$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot c_k = a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot a = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\Big) \cdot a\,,$$

In unitalen Banachalgebren ist a^k (mit $a^0 := 1$) für $a \in E$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert. Ist $a \in E$, so folgt aus $||a^k|| \leq ||a||^k$, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k/k!$ (absolut) konvergiert. Definiert man

$$e^a := \exp(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad (a \in E),$$

so gilt für feste $a \in E$ und $u \in \mathbb{R}$ nach obigen Bemerkungen

$$(e^{(\cdot\,-u)a})' = a \cdot e^{(\cdot\,-u)a} = e^{(\cdot\,-u)a} \cdot a. \tag{3.5}$$

[12] Tatsächlich sind Banachräume durch diese Eigenschaft charakterisiert.

Vertauschen $a, b \in E$, gilt also $ab = ba$, so sieht man wie im skalaren Fall: Aus der Gültigkeit der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

ergibt sich die Funktionalgleichung

$$e^a e^b = e^{a+b} \,.$$

Insbesondere gilt damit $e^{(x+y)a} = e^{xa}e^{ya}$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$ [13] und $e^a e^{-a} = e^0 = 1$, d. h. e^a ist stets invertierbar mit

$$(e^a)^{-1} = e^{-a}.$$

Bemerkung 3.8 Wir betrachten wieder $E = \mathbb{K}^{d\times d}$ versehen mit der Operatornorm. Da die Operatornorm submultiplikativ ist, ist $(\mathbb{K}^{d\times d}, ||\cdot||)$ eine unitale Banachalgebra mit der d-dimensionalen Einheitsmatrix $I = I_d$ als Einselement.
Sind nun $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $u \in \mathbb{R}$, so ist nach Bemerkung 3.3.2 und (3.5) ist die Abbildung $t \mapsto e^{(t-u)A}$ eine Fundamentalmatrix für (3.4). Zudem ist nach Satz 3.5 für alle $v \in \mathbb{K}^d$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = Ax(t)\,, \qquad x(u) = v$$

gegeben durch

$$\varphi(t, u, v) = e^{(t-u)A} \cdot v \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Wegen $(e^{\,\cdot\, A}C)' = (e^{\,\cdot\, A})'C$ für $C \in \mathbb{K}^{d\times d}$ ([Ü]) ist nach dem Determinantenmultiplikationssatz im Fall invertierbarer C auch $e^{tA}C$ eine Fundamentalmatrix.

Im Prinzip haben wir also Fundamentalmatrizen für (3.4) gefunden, nämlich $e^{tA}C$ für beliebige invertierbare C. Es stellt sich dabei die Frage, ob und ggfs. wie man $e^{tA}C$ auf skalare Exponentialfunktionen reduzieren kann.

Satz 3.9 *Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$.*

1. *Ist C invertierbar mit $A = CBC^{-1}$,[14] so ist*
$$e^{tA}C = Ce^{tB} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. *Hat A Blockdiagonalform*
$$A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_m) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{A_m} \end{pmatrix},$$
mit $A_k \in \mathbb{K}^{d_k\times d_k}$ für $k = 1, \ldots, m$, so gilt $e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, ..., e^{tA_m})$ für $t \in \mathbb{R}$.

[13] Wichtig zu beachten: Die Gleichung $e^a e^b = e^{a+b}$ gilt im Allgemeinen nicht für beliebige $a, b \in E$.
[14] Existiert eine solche Matrix C, so nennt man die Matrizen A, B ähnlich.

Beweis. 1. Per Induktion sieht man, dass

$$A^k = (CBC^{-1})^k = CB^kC^{-1} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

gilt. Also erhalten wir

$$Ce^{tB}C^{-1} = C\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}t^\nu B^\nu\right)C^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}t^\nu CB^\nu C^{-1} = e^{tA}\,.$$

2. Ist $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_m)$, so ist nach Definition der Matrixmultiplikation auch

$$A^\nu = \operatorname{diag}(A_1^\nu, \ldots, A_m^\nu)$$

für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Damit ergibt sich 2. aus der Tatsache, dass für beliebige Matrizen $A_\nu = (a_{jk}^{(\nu)})$ Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$ in $\mathbb{K}^{d\times d}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz aller Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{jk}^{(\nu)}$ in $\mathbb{K}$ ist, und dass dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{jk}^{(\nu)}\right)$ gilt. □

Bemerkung 3.10 Es sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ diagonalisierbar, d. h. es existieren – nicht notwendig paarweise verschiedene – Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ von A und eine Basis $c_1, \ldots, c_d$ aus zugehörigen Eigenvektoren. Dann ist mit $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ und $C := (c_1, \ldots, c_d)$

$$AC = (Ac_1, \ldots, Ac_d) = (\lambda_1 c_1, \ldots, \lambda_d c_d) = C\Lambda$$

und damit auch $A = C\Lambda C^{-1}$. Nach Satz 3.9 ist durch

$$e^{tA}C = Ce^{t\Lambda} = C\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_d t}) = \left(e^{\lambda_1 t}c_1, \ldots, e^{\lambda_d t}c_d\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine Fundamentalmatrix von (3.4) gegeben.

Beispiel 3.11 1. Wir betrachten die (symmetrische) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$. Weiter rechnet man nach, dass $c_1 = (1, 0, 1)^\top$ und $c_2 = (0, 1, 1)^\top$ (linear unabhängige) Eigenvektoren zu 1 sind, und dass $c_3 = (-1, -1, 1)^\top$ Eigenvektor zu -2 ist. Also ist mit $C = (c_1, c_2, c_3)$ nach Bemerkung 3.10

$$e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ein Fundamentalystem. Mit

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$e^{tA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{-2t} & -e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ -e^t + e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} & e^t - e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & e^t - e^{-2t} & 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

2. Wir betrachten

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \subset \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)\,,$$

also haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$. Zugehörige Eigenvektoren sind $c_1 = (1,0,0)^\top$, $c_2 = (3-4i, i, 1)^\top$ und $c_3 = \overline{c_2}$. Damit bilden etwa

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 3-4i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 3+4i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $x' = Ax$ (als Gleichung über $\mathbb{C}$ betrachtet). Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man die zweite und dritte Lösung $e^{(1\pm i)t}c_2$ und $e^{(1-i)t}\overline{c_2}$ durch $\mathrm{Re}(e^{(1+i)t}c_2)$ und $\mathrm{Im}(e^{(1+i)t}c_2)$ ersetzt ([Ü]).

Schwieriger wird die Berechnung eines Fundamentalsystems naturgemäß dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{N}$ ist die **Jordan-Matrix** $J(\lambda) \in \mathbb{K}^{r\times r}$ definiert durch

$$J(\lambda) := J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r\times r}$$

falls $r > 1$ und $J(\lambda) := J_1(\lambda) := (\lambda)$ für $r = 1$. Aus der Linearen Algebra verwenden wir, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ (die natürlich auch rein reelle Einträge haben kann) ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix der Form

$$B = \mathrm{diag}(J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_m}(\lambda_m))$$

ist, also $A = CBC^{-1}$ für eine Matrix C mit $\det(C) \neq 0$ gilt.[15] Nach Satz 3.9 reduziert sich die Bestimmung der Fundamentalmatrix $e^{tA}C$ auf die Bestimmung der Matrizen C und $e^{tJ_{r_k}(\lambda_k)}$ für $k = 1, \ldots, m$. Aus Sicht der Analysis stellt sich damit insbesondere die Frage nach dem Aussehen von $e^{tJ(\lambda)}$ für $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir schreiben kurz

$$N := N_r := J_r(0)$$

Dann ist $J(\lambda) = \lambda I + N$.

Satz 3.12 *Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} e^{tN}$ mit*

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Man rechnet nach, dass (mit dem Kroneckersymbol δ)

$$N^\nu = (\delta_{j,k-\nu})_{j,k=1,\ldots,r} \qquad (\nu = 0, \ldots, r-1)$$

und $N^\nu = 0$ für $\nu \geq r$ gilt. Hieraus folgt

$$e^{tN} = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu N^\nu = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Da λI und N vertauschen, gilt zudem $e^{tJ(\lambda)} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{t\lambda} I e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}$. □

Beispiel 3.13 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

also $A = \operatorname{diag}(J_2(-1), J_1(2))$. Dann ist nach Satz 3.9.2 und Satz 3.12

$$e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{tJ_2(-1)}, e^{tJ_1(2)}) = \operatorname{diag}(e^{-t} e^{tN_2}, e^{2t} e^{tN_1}) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

und damit $e^{-t}\mathrm{e}_1$, $e^{-t}(t\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2)$, $e^{2t}\mathrm{e}_3$ ein Fundamentalsystem.

[15] Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A. Die Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke.

Mit Satz 3.12 und den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich folgendes Ergebnis über die Struktur des Lösungsraumes von $x'(t) = Ax(t)$.

Satz 3.14 *Es sei* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *mit* $A = C\mathrm{diag}\big(J_{r_1}(\lambda_1), \dots, J_{r_m}(\lambda_m)\big)C^{-1}$. *Sind* $c_1, \dots, c_d$ *die Spalten vion* C, *so ist für* $k = 1, \dots, m$ *und* $\ell = 1, \dots, r_k$ *mit* $s_k := \sum_{j=1}^{k-1} r_j$ *die* $(\ell + s_k)$*-te Spalte* $e^{tA}c_{\ell+s_k}$ *der Fundamentalmatrix* $e^{tA}C$ *von der Form*

$$e^{tA}c_{\ell+s_k} = e^{\lambda_k t}P_{k,\ell}(t),$$

wobei die Funktionen $P_{k,\ell}$ *Polynome vom Grad* $\leq \ell - 1$ *mit Koeffizienten in* $\mathbb{C}^d$ *sind.*[16]

Beweis. Es gilt

$$e^{tA}C = (c_1, ..., c_{r_1}, \dots, c_{1+s_k}, ..., c_{r_k+s_k}, \dots, c_{1+s_m}, ..., c_d)\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}e^{tN_{r_1}}, \dots, e^{\lambda_m t}e^{tN_{r_m}})\,.$$

Für $k = 1, \dots, m$ haben die Spalten $1 + s_k, \dots, r_k + s_k$ die Form

$$e^{\lambda_k t}c_{1+s_k}, e^{\lambda_k t}(tc_{1+r_k} + c_{2+r_k}), \dots, e^{\lambda_k t}\Big(\frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!}c_{1+r_k} + \frac{t^{r_k-2}}{(r_k-2)!}c_{2+r_k} + \dots + c_{s_k+r_k}\Big).$$

□

Wir kommen zum Abschluss des Abschnitts zurück zum inhomogenen System (3.1). Ist Φ eine beliebige Fundamentalmatrix, so gilt nach Satz 3.2 und Satz 3.5 für $u \in I$ und $v \in \mathbb{K}^d$

$$\varphi_b(\cdot, u, v) = \varphi_b(\cdot, u, 0) + \varphi_0(\cdot, u, v) = \varphi_b(\cdot, u, 0) + \Phi(\cdot)\Phi^{-1}(u)v\,.$$

Per Integration lässt sich aus Φ auch die spezielle Lösung $\varphi_b(\cdot, u, 0)$ der inhomogenen Gleichung bestimmen:

Satz 3.15 (Variation der Konstanten)
Es sei Φ *eine Fundamentalmatrix von* (3.2). *Dann ist für* $u \in I$

$$\varphi_b(t, u, 0) = \Phi(t)\int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \qquad (t \in I).$$

Beweis. Da Φ eine Fundamentalmatrix ist, gilt $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ für $t \in I$. Mit

$$\psi(t) := \Phi(t)\int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \quad (t \in I)$$

ergibt sich nach der Produktregel für matrixwertige Funktionen ([Ü]) und dem Hauptsatz über Integralfunktionen

$$\psi'(t) = \Phi'(t)\int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) = A(t)\Phi(t)\int_u^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + b(t)$$

für $t \in I$. Also ist ψ Lösung von (3.1) auf I mit $\psi(u) = 0$, d. h. $\psi = \varphi_b(\cdot, u, 0)$. □

[16] Genauer ist $P_{k,\ell}(t) = \sum_{\mu=1}^{\ell} \frac{t^{\ell-\mu}}{(\ell-\mu)!}c_{\mu+s_k}$.

Beispiel 3.16 Wir betrachten wieder $I = (0, \infty)$ und A aus Beispiel 3.6. Weiter sei

$$b(t) = \begin{pmatrix} 1/t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t > 0)\,.$$

Für

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(1/t) & \sin(1/t) \\ \sin(1/t) & -\cos(1/t) \end{pmatrix} \qquad (t > 0)$$

aus Beispiel 3.6 ist $\Phi^{-1} = \Phi$, also

$$\int_{1/\pi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds = \int_{1/\pi}^{t} \begin{pmatrix} \cos(1/s)/s^2 \\ \sin(1/s)/s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.15 ist

$$\varphi_b\Big(t, 1/\pi, 0\Big) = \Phi(t) \int_{1/\pi}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds = \Phi(t) \begin{pmatrix} -\sin(1/t) \\ \cos(1/t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(1/t) \\ -1 - \cos(1/t) \end{pmatrix}.$$

4 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Wir wollen nun die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung anwenden: Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetig, so heißt eine Gleichung der Form

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t) \tag{4.1}$$

eine (skalare) **lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung**. Die Gleichung

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} \tag{4.2}$$

heißt **zugehörige homogene** Gleichung. Entsprechende Anfangswertprobleme sind von der Form

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + b(t), \qquad x^{(k)}(u) = v_k \quad (k = 0, ..., n-1) \tag{4.3}$$

mit $u \in I, v := (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Bemerkung 4.1 In Bemerkung 1.12 hatten wir gesehen, dass man Gleichungen n-ter Ordnung bzw. Anfangswertprobleme in Systeme 1. Ordnung umschreiben kann. Hier ist das entsprechende System

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

linear. Nach Bemerkung 1.12 lassen sich sämliche Ergebnisse über Lösungen des Systems (4.4) in Ergebnisse über die Lösungen von (4.1) übertragen. Insbesondere erhalten wir aus Satz 3.1: Für jedes $(u, v) \in I \times \mathbb{K}^n$ hat das Anfangswertproblem (4.3) genau eine Lösung auf I und jede weitere Lösung ist Einschränkung dieser Lösung. Wir schreiben für diese (maximale) Lösung wieder

$$\varphi(\cdot, u, (v_0, \ldots, v_{n-1})) = \varphi(\cdot, u, v)$$

und auch φ_b statt φ, falls die Abhängigkeit von b hervorgehoben werden soll. Wir bezeichnen die Lösungsmenge des linearen Systems (4.4) wieder mit L_b und setzen

$$M_0 := \{\psi : \psi \text{ löst (4.2) auf } I\} \quad \text{sowie} \quad M_b := \{\psi : \psi \text{ löst (4.1) auf } I\}.$$

Da die Abbildung $j = j_b : M_b \to L_b$ mit

$$j(\psi) = (\psi, \psi', \ldots, \psi^{(n-1)})^\top \qquad (\psi \in M_b)$$

bijektiv und im Falle $b = 0$ linear ist, erhält man durch Anwendung von j aus den entsprechenden Ergebnissen für (4.4) aus Satz 3.2 und Bemerkung 3.3:

1. M_0 ist ein n-dimensionaler Unterraum von $C(I, \mathbb{K})$ und für $u \in I$ gilt

$$M_0 = \{\varphi_0(\cdot, u, v) : v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\}.$$

   Eine Basis von M_0 heißt wieder ein **Fundamentalsystem** der homogenen Gleichung.

2. Für jedes $\psi_b \in M_b$ ist $M_b = \psi_b + M_0$.

3. Sind $\psi_1, \dots, \psi_n \in M_0$, so sind $\psi_1, \dots, \psi_n$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die **Wronski-Determinante** $W(u) := \det \Phi(u)$, wobei

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \dots & \dots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \dots & \dots & \psi_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

   für ein $u \in I$ nicht verschwindet. der In diesem Fall ist schon $W(u) \neq 0$ für alle $u \in I$. Zur Abkürzung schreiben wir noch

$$W_j := \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_{j-1} & \psi_{j+1} & \dots & \psi_n \\ \psi_1' & & \psi_{j-1}' & \psi_{j+1}' & & \psi_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)} & \dots & \psi_{j-1}^{(n-2)} & \psi_{j+1}^{(n-2)} & \dots & \psi_n^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

   für die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus Φ durch Streichen der letzten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Satz 4.2 (Variation der Konstanten)
Ist $\psi_1, \dots, \psi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (4.2), so ist für jedes $u \in I$ [17]

$$\varphi_b(t, u, 0) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)(-1)^{n+j} \int_u^t \frac{b(s)W_j(s)}{W(s)} ds \qquad (t \in I). \tag{4.5}$$

Beweis. Da $(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ die erste Zeile von $\Phi(t)$ und die Inhomogenität hier $b(t)\mathrm{e}_n$ ist, folgt aus Satz 3.15

$$\varphi_b(t, u, 0) = \big(\psi_1(t) \dots, \psi_n(t)\big) \cdot \int_u^t b(s)\Phi^{-1}(s)\mathrm{e}_n \, ds \qquad (t \in I).$$

[17] Diese Darstellung erklärt den Namen „Variation der Konstanten“: Während jede Lösung der homogenen Gleichung von der Form $\sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_j(t)$ ist, erhält man

$$\varphi_b(t, u, 0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\psi_j(t),$$

als Linearkombination der $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ mit Koeffizienten $\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)$, die mit t variieren.

Um die letzte Spalte $\Phi^{-1}(s)\mathrm{e}_n$ von $\Phi^{-1}(s)$ zu bestimmen hat man hat das lineare Gleichungssystem

$$\Phi(s)c = \mathrm{e_n}$$

in der Variablen $c = (c_1, \dots, c_n)$ zu lösen. Mit der Cramerschen Regel ergibt sich

$$W(s)c_j = \det \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_{j-1} & 0 & \psi_{j+1} & \dots & \psi_n \\ \psi_1' & & \psi_{j-1}' & 0 & \psi_{j+1}' & & \psi_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} & \dots & \psi_{j-1}^{(n-1)} & 1 & \psi_{j+1}^{(n-1)} & \dots & \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(s) = (-1)^{n+j} W_j(s)\,.$$

□

Beispiel 4.3 (harmonischer Oszillator mit Anregung, vgl. Beispiel 1.11)
Für $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachten wir die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$x'' = -x + b(t)\ .$$

Man rechnet sofort nach, dass durch $\psi_1(t) = e^{it}$, $\psi_2(t) = e^{-it}$ für $t \in \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $x'' + x = 0$ gegeben ist. Also erhalten wir mit

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} = -2i$$
$$W_1(t) = \det(e^{-it}) = e^{-it}, \qquad W_2(t) = \det(e^{it}) = e^{it}$$

für den **Resonanzfall** $b(t) := e^{it}$ nach (4.5) die spezielle Lösung $\psi_b := \varphi_b(\cdot, 0, (0,0))$ als

$$\begin{aligned} \psi_b(t) &= \frac{-1}{2i}\Big(- e^{it}\int_0^t e^{is}e^{-is}ds + e^{-it}\int_0^t e^{is}e^{is}ds\Big) = \frac{1}{2i}\Big(e^{it}t - e^{-it}\frac{e^{2is}}{2i}\Big|_0^t\Big) \\ &= \frac{1}{2i}(te^{it} - \sin t)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \mathrm{Re}(b(t))$ auch

$$\varphi_{\mathrm{Re}(b)}(t, 0, (0,0)) = \mathrm{Re}\,\psi_b(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(te^{it} - \sin t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

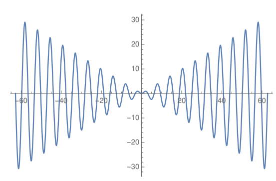

Abbildung 9: $t \mapsto t\sin(t)/2$.

Wie im Abschnitt vorher wollen wir uns auch hier gesondert mit linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigen: Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$x^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) = 0 \tag{4.6}$$

eine (homogene) **lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Im Prinzip kann man zur Berechnung eines Fundamentalsystems auf $\mathbb{R}$ so vorgehen, dass man Satz 3.14 für das entsprechende lineare System (4.4) nutzt. Wir wollen hier jedoch einen direkten Weg wählen, der uns unabhängig von der Jordanschen Normalform macht.

Bemerkung 4.4 1. Sind $P(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k$ ein Polynom und I ein Intervall, so definieren wir die lineare Abbildung $P(D) : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ durch

$$P(D)\varphi := \sum_{k=0}^{n} p_k D^k \varphi,$$

wobei $D^k\varphi := \varphi^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $D^0 := \mathrm{id}$, d. h. $D^0\varphi = \varphi$. Ist $Q(z) = \sum_{j=0}^{m} q_j z^j$ ein weiteres Polynom, so gilt für $\varphi \in C^\infty(I)$

$$\big(P(D) \circ Q(D)\big)\varphi = \sum_{k=0}^{n} p_k D^k \, \big(Q(D)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_k q_j D^{k+j}\varphi = (P \cdot Q)(D)\varphi$$

und damit $P(D)Q(D) = (PQ)(D)$.[18] Insbesondere vertauschen $P(D)$ und $Q(D)$.
2. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: Sind P vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1, $Z(P)$ die Menge der Nullstellen von P und $\alpha(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle λ, so ist $\sum_{\lambda \in Z(P)} \alpha(\lambda) = n$ und $P(z) = \prod_{\lambda \in Z(P)} (z-\lambda)^{\alpha(\lambda)}$ für $z \in \mathbb{C}$. Nach 1. gilt

$$P(D) = \prod_{\lambda \in Z(P)} (D - \lambda\,\mathrm{id})^{\alpha(\lambda)}.$$

3. Sind λ, μ in $\mathbb{C}$ und ist $e_\lambda(t) := e^{\lambda t}$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt für $g \in C^\infty(I)$

$$(D - \mu\,\mathrm{id})(e_\lambda g) = e_\lambda \cdot ((\lambda - \mu)g + Dg)$$

und insbesondere $(D - \lambda\,\mathrm{id})(e_\lambda g) = e_\lambda Dg$. Ist dabei g ein Polynom vom Grad d, so ist $(\lambda - \mu)g + Dg$ für $\mu \neq \lambda$ wegen Grad $Dg < d$ wieder ein Polynom vom Grad d.[19]

Bemerkung und Definition 4.5 Das Polynom $P(z) := z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ heißt **charakteristisches Polynom** von (4.6). Damit ist $\varphi \in C^\infty(I)$ Lösung von (4.6) auf I genau dann, wenn $P(D)\varphi = 0$ auf I gilt.

[18] Man schreibt kurz $TS := T \circ S$ für die Komposition der Operatoren T, S und zudem $T^n := T^{\circ n}$.
[19] Dabei ist der Grad des Nullpolynoms auf $-\infty < 0$ gesetzt.

Satz 4.6 *Es sei P das charakteristische Polynom von (4.6). Dann ist durch*

$$t \mapsto e^{\lambda t} t^{\ell} \qquad (\lambda \in Z(P),\ \ell = 0, \ldots, \alpha(\lambda) - 1)$$

ein Fundamentalsystem von (4.6) auf $\mathbb{R}$ gegeben.

Beweis. 1. Wir schreiben $g_\ell(t) := t^\ell$ für $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Sind $\lambda \in Z(P)$ und $\ell \in L_\lambda := \{0, \ldots, \alpha(\lambda) - 1\}$, so folgt wegen $D^{\alpha(\lambda)} g_\ell = 0$ aus Bemerkung 4.4.3 (induktiv angewandt)

$$(D - \lambda\,\mathrm{id})^{\alpha(\lambda)}(e_\lambda g_\ell) = e_\lambda D^{\alpha(\lambda)} g_\ell = 0.$$

Damit ist nach Bemerkung 4.4.2 auch $P(D)(e_\lambda g_\ell) = 0$. Also sind die Funktionen $e_\lambda g_\ell$ für $\ell \in L_\lambda$ und $\lambda \in Z(P)$ Lösungen von (4.6) auf $\mathbb{R}$.
2. Da der Lösungsraum M_0 von (4.6) n-dimensional ist und da $\sum\limits_{\lambda \in Z(P)} \alpha(\lambda) = n$ gilt, reicht es, zu zeigen: $\{g_\ell\, e_\lambda : \ell \in L_\lambda, \lambda \in Z(P)\}$ ist linear unabhängig in $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dazu seien $c_{\lambda,\ell} \in \mathbb{C}$ mit

$$0 = \sum_{\lambda \in Z(P)} \sum_{\ell \in L_\lambda} c_{\lambda,\ell}\, g_\ell\, e_\lambda \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wir haben zu zeigen: $c_{\lambda,\ell} = 0$ für $\lambda \in Z(P), \ell \in L_\lambda$. Mit $Q_\lambda := \sum\limits_{\ell \in L_\lambda} c_{\lambda,\ell} g_\ell$ gilt

$$0 = \sum_{\lambda \in Z(P)} e_\lambda Q_\lambda \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der g_ℓ reicht es also, zu zeigen: $Q_\lambda = 0$ für $\lambda \in Z(P)$. Es sei dazu $\lambda \in Z(P)$ fest. Ist

$$P_\lambda(z) = P(z)/(z - \lambda)^{\alpha(\lambda)} = \prod_{Z(P) \ni \mu \neq \lambda} (z - \mu)^{\alpha(\mu)}\ ,$$

so folgt aus 1. (angewandt mit P_λ statt P)

$$P_\lambda(D)(e_\mu Q_\mu) = 0 \quad (\mu \in Z(P),\ \mu \neq \lambda)\,.$$

Nach Bemerkung 4.4.2 und 3. ist zudem $P_\lambda(D)(e_\lambda Q_\lambda) = e_\lambda R$ mit einem Polynom $R = R_\lambda$ vom gleichen Grad wie Q_λ. Aus

$$0 = P_\lambda(D)0 = P_\lambda(D)\Big(\sum_{\mu \in Z(P)} e_\mu Q_\mu\Big) = P_\lambda(D)(e_\lambda Q_\lambda) = e_\lambda R$$

folgt $R = 0$, also $\deg(R) = -\infty$ und damit auch $\deg(Q_\lambda) = -\infty$, d. h. $Q_\lambda = 0$. □

Bemerkung 4.7 Ist P reell, d. h. sind $a_0, \ldots, a_{n-1}$ reell und ist $\lambda = \mu + i\sigma$ eine nichtreelle α-fache Nullstelle von P, so ist auch $\overline{\lambda} = \mu - i\sigma$ eine α-fache Nullstelle von P. In diesem Fall haben wir also die 2α Lösungen

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{i\sigma t} t^\ell \\ e^{\overline{\lambda} t} t^\ell &= e^{\mu t} e^{-i\sigma t} t^\ell \end{aligned} \qquad (\ell = 0, \ldots, \alpha - 1)\,.$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man dann, indem man für alle solchen Nullstellen diese Lösungen ersetzt durch ([Ü])

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{\lambda t}t^\ell) &= e^{\mu t}\cos(\sigma t)t^\ell \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t}t^\ell) &= e^{\mu t}\sin(\sigma t)t^\ell \end{aligned} \qquad (\ell = 0, ..., \alpha - 1)\,.$$

Beispiel 4.8 (gedämpfte Schwingung) Wir betrachten die Gleichung

$$x'' + 2ax' + \omega^2 x = 0$$

mit $\omega, a > 0$. Dabei bezeichnet a den Dämpfungsparameter. Hier ist

$$P(z) = z^2 + 2az + \omega^2.$$

Also sind die Nullstellen $z_{1,2}$ mit $\Delta := a^2 - \omega^2$ gegeben durch

$$z_{1,2} = \begin{cases} -a \pm \sqrt{\Delta}, & \text{falls } \Delta \geq 0 \\ -a \pm i\sqrt{-\Delta}, & \text{falls } \Delta < 0 \end{cases}.$$

Nach Satz 4.6 und Bemerkung 4.7 ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\psi_{1,2}(t) := \begin{cases} e^{(-a\pm\sqrt{\Delta})t}, & \text{falls } \Delta > 0 \\ e^{-at},\, te^{-at}, & \text{falls } \Delta = 0 \\ e^{-at}\cos(\sqrt{-\Delta}\,t),\, e^{-at}\sin(\sqrt{-\Delta}\,t), & \text{falls } \Delta < 0 \end{cases}.$$

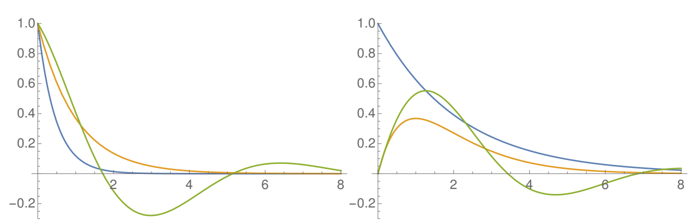

Abbildung 10: ψ_1 (links) und ψ_2 (rechts) für $\omega = 1$ und $a = 1.3$, $a = 1$, $a = 0.4$

Wir betrachten zum Abschluss kurz den Fall nichtkonstanter Koeffizienten und beschränken uns dabei auf den Fall $n = 2$. In gewissen Fällen ist es möglich, Lösungen der Differenzialgleichung (4.2) durch einen sogenannten Potenzreihenansatz zu gewinnen.

Satz 4.9 (Potenzreihenansatz) *Es seien $r > 0$ und*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\,, \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Potenzreihen mit Konvergenzradius $\geq r$. Ist $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\geq r$, so gilt

$$z\varphi''(z) = p(z)\varphi'(z) + q(z)\varphi(z) \qquad (|z| < r).$$

genau dann, wenn

$$(k+1)(k-p_0)a_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} (j\, p_{k+1-j} + q_{k-j})a_j \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{4.7}$$

erfüllt ist.[20]

Beweis. Für $|z| < r$ gilt

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} z^k \quad \text{ und } \quad z\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} z^k .$$

Also erhalten wir mit Hilfe des Cauchy-Produktes[21] für $|z| < r$

$$\begin{aligned} p(z)\varphi'(z) + q(z)\varphi(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} z^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Big(\sum_{j=0}^{k} (j+1)p_{k-j}a_{j+1}\Big) + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Big((k+1)p_0 a_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} (j\, p_{k+1-j} + q_{k-j})a_j\Big) \end{aligned}$$

Diese Potenzreihe stimmt genau dann mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)k\, a_{k+1} z^k$ überein, wenn die a_k die Bedingung (4.7) erfüllen.[22] □

Bemerkung 4.10 Insbesondere ist unter den Bedingungen des vorhergehenden Satzes φ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$x'' = (p(t)/t)x' + (q(t)/t)x$$

auf $(0, r)$ und auf $(-r, 0)$. Gilt $p_0 \notin \mathbb{N}_0$, so ergeben sich mit beliebigem Startwert $a_0 \in \mathbb{K}$ die weiteren Koeffizienten rekursiv aus (4.7). Gilt $p_0 = q_0 = 0$, so kann man die Werte a_0 und a_1 wählen und (4.7) ergibt dann eine Rekursionsformel für $k \in \mathbb{N}$.

[20] Man kann zeigen, dass die Potenzreihe φ stets Konvergenzradius $\geq r$ hat, falls die a_k die Formel erfüllen. Wir verzichten auf den mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln etwas aufwändigen Beweis. In den Beispielen ist die Konvergenz typischerweise direkt zu sehen.

[21] siehe etwa `https://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Produktformel`

[22] Wichtig: Zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius stimmen genau dann überein, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen.

Beispiel 4.11 Für $\nu \in \mathbb{C}$ heißt die lineare Gleichung zweiter Ordnung

$$z^2 x''(z) + z x'(z) + (z^2 - \nu^2) x = 0$$

Bessel-Gleichung. Wir betrachten den Fall $\nu = 0$ und damit die Gleichung

$$x'' = -x'/t - x \tag{4.8}$$

Hier sind $p(t) = -1$, $q(t) = -t$, also $p_0 = -1 \neq 0$, $p_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, $q_1 = -1$ und $q_k = 0$ für $k \neq 1$. Wegen $q_{k-j} = -\delta_{j,k-1}$ lautet (4.7) hier

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+1)} \sum_{j=0}^{k} (j p_{k+1-j} + q_{k-j}) a_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } k = 0 \\ -a_{k-1}/(k+1)^2, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Wählt man $a_0 = 1$, so erhält man induktiv $a_{2m+1} = 0$ für $m \in \mathbb{N}$ und

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Die Funktion $J_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$J_0(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **Bessel-Funktion** der Ordnung 0. Nach Bemerkung 4.10 ist $J_0|_{(0,\infty)}$ eine Lösung der Gleichung (4.8).

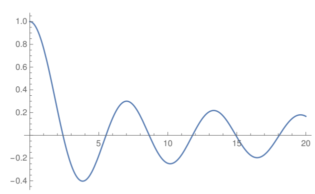

Abbildung 11: Bessel-Funktion J_0.

Kennt man bereits eine nichtverschwindende Lösung einer linearen Differenzialgleichung der Ordnung 2, so lässt sich dies nutzen um ein zweite, linear unabhängige Lösung zu bestimmen. Man spricht dann von Reduktion der Ordnung.

Satz 4.12 (Reduktion der Ordnung) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a_0, a_1 : I \to \mathbb{K}$ stetig und α eine Stammfunktion zu a_1. Weiter seien $J \subset I$ ein offenes Intervall und (φ, J) eine Lösung der Differenzialgleichung*

$$x'' = a_1(t) x' + a_0(t) x \tag{4.9}$$

mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Ist $\psi(t) := \varphi^{-2}(t) e^{\alpha(t)}$ und ist Ψ eine Stammfunktion zu ψ, so bilden $\varphi, \varphi\Psi$ ein Fundamentalsytem zu (4.9) auf J.[23]

[23] ψ löst die lineare Gleichung erster Ordnung $x' = (a_1(t) - 2\varphi'(t)/\varphi(t))x$. Daher der Name Reduktion der Ordnung.

Beweis. Wegen $\psi = e^{\alpha - 2\ln\varphi}$ ist $\psi' = (a_1 - 2\varphi'/\varphi)\psi$. Mit $\varphi'' = a_1\varphi' + a_0\varphi$ erhält man

$$(\varphi\Psi)'' - a_1(\varphi\Psi)' = (a_1\varphi' + a_0\varphi)\Psi + 2\varphi'\psi + \varphi(a_1 - 2\varphi'/\varphi)\psi - a_1\varphi'\Psi - a_1\varphi\psi = a_0\varphi\Psi.$$

Damit ist $\varphi\Psi$ Lösung von (4.9) auf J. Da Ψ nicht konstant auf J ist, sind φ und $\varphi\Psi$ linear unabhängige Lösungen. □

Beispiel 4.13 Wir betrachten wieder die Bessel-Gleichung (4.8), also

$$x'' = -x'/t - x$$

Durch $t \mapsto -\ln(t)$ ist eine Stammfunktion zu $a_1(t) = -1/t$ auf $(0,\infty)$ gegeben. In Beispiel 4.11 haben wir gesehen, dass die Bessel-Funktion J_0 eine Lösung der Gleichung auf $(0,\infty)$ ist. Wegen $J_0(0) = 1$ ist $J_0(t) \neq 0$ für kleine t. Ist $T := \inf\{t > 0 : J_0(t) = 0\}$ und ist Ψ eine Stammfunktion zu

$$\psi(t) = J_0^{-2}(t)e^{-\ln(t)} = 1/(tJ_0^2(t)) \qquad (t \in (0,T))\ ,$$

so bilden J_0, $J_0\Psi$ ein Fundmentalsystem der Bessel-Gleichung auf $(0,T)$. Mit einer geeigneten Konstante c ist $J_0\Psi + cJ_0 = (\pi/2)Y_0$, wobei Y_0 die **Bessel-Funktion zweiter Gattung** der Ordnung 0 bezeichnet.[24]

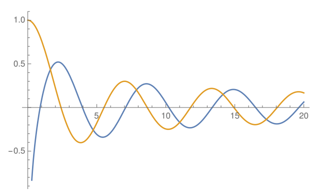

Abbildung 12: Bessel-Funktionen Y_0 (blau) und J_0.

[24]siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung

5 Stabilität

Ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand bei Differenzialgleichungen ist die Frage nach dem Verhalten von Lösungen wenn t sich einem der Randpunkte des maximalen Lösungsintervalls nähert. Wir beschränken uns auf **autonome Systeme**, also Differenzialgleichungen der Form

$$x' = g(x),$$

wobei $G \subset \mathbb{K}^d$ offen und $g \in C(G, \mathbb{K}^d)$ ist (d. h. hier ist $f(t,x) = g(x)$ auf $D = \mathbb{R} \times G$). Ist g lokal Lipschitz-stetig auf G, d. h. existieren für alle $v \in G$ eine Umgebung U von v in G und ein $L = L(U) \geq 0$ mit

$$\big|g(x) - g(y)\big| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in U),$$

so existiert nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (Satz 2.12) genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, 0, v) =: \varphi(\cdot, v)$ des Anfangswertproblems

$$x' = g(x), \qquad x(0) = v \in G$$

auf $I(0, v) =: I(v)$.[25] Weiter schreiben wir $I(v) =: (t^-(v), t^+(v))$, d. h. $t^-(v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ bzw. $t^+(v) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind linker bzw. rechter Randpunkt von $I(v)$.
Wir betrachten zunächst sehr speziell lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten. Hier interessiert also das Verhalten für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$. Wir beschränken uns auf den Fall $t \to \infty$. Ist $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ linear, so schreiben wir $\sigma(T)$ für die Menge der Eigenwerte von T und

$$\gamma(T) := \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Ist $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$, so schreiben wir wie üblich (Identifikation von A mit $x \mapsto Ax$) auch $\sigma(A)$ und $\gamma(A)$. Als Anwendung des Satzes 3.14 ergibt sich

Satz 5.1 (Stabilitätskriterium)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Ist $\mu > \gamma(A)$, so existiert ein $M > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Me^{\mu t}$ für $t \geq 0$. Außerdem sind die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) *Es existieren $M, \alpha > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Me^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*

b) *Für alle Lösungen ψ von $x'(t) = Ax(t)$ auf $\mathbb{R}$ gilt $\psi(t) \to 0$ $(t \to \infty)$.*[26]

c) $\gamma(A) < 0$.

Beweis. 1. Es sei $B = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{K}^{d \times d}$. Dann gilt $||B|| \leq \sum_{k=1}^{d} |b_k|$ wegen

$$|Bx| \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k| \cdot |b_k| \leq \sum_{k=1}^{d} |b_k| \qquad (x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k \in B_1(0)).$$

[25] Bei autonomen Gleichungen kann man sich auf den Fall $u = 0$ beschränken, da sich die Lösung für allgemeines u durch eine Verschiebung im Argument aus dem Spezialfall ergibt; genauer ist $\varphi(t, u, v) = \varphi(t - u, 0, v)$ für $t - u \in I(v)$.

[26] Dann auch mit exponentieller Rate.

Ist C wie in Satz 3.14, so ist die k-te Spalte $e^{tA}c_k$ von $e^{tA}C$ von der Form $t \mapsto e^{\lambda_k t}P_k(t)$ mit $\lambda_k \in \sigma(A)$ und einem Polynom P_k. Wegen $\mu - \mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ existiert eine Konstante $M_k > 0$ mit $|P_k(t)| \leq M_k e^{(\mu - \mathrm{Re}\,\lambda_k)t}$ und damit $|e^{t\lambda_k}P_k(t)| = e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_k}|P_k(t)| \leq e^{\mu t}M_k$ für $t \geq 0$. Also folgt

$$||e^{tA}|| \leq ||e^{tA}C|| \cdot ||C^{-1}|| \leq |C^{-1}|| \cdot \sum_{k=1}^{d} |e^{tA}c_k| \leq e^{\mu t}||C^{-1}|| \sum_{k=1}^{d} M_k \ .$$

2. a) $\Rightarrow$ b): Ist $\psi(0) = v$, so ist $\psi(t) = \varphi_0(t,v) = e^{tA}v$, also $|\psi(t)| \leq ||e^{tA}|| \cdot |v| \to 0$ $(t \to \infty)$.
b) $\Rightarrow$ c): Angenommen, es existiert ein Eigenwert λ von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Ist $c \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist $\psi(t) = e^{\lambda t}c$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$|\psi(t)| = e^{t\mathrm{Re}\lambda}|c| \geq |c| \quad (t \to \infty).$$

Widerspruch zu $\psi(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
c) $\Rightarrow$ a): Aus 1. folgt $||e^{tA}|| \leq Me^{t\gamma(A)/2}$ für $t \geq 0$. Also ist $\alpha := -\gamma(A)/2$ geeignet. □

Bemerkung 5.2 Hat man ein (inhomogenes) lineares System mit konstanter Koeffizientenmatrix A, also

$$x' = Ax + b(t)$$

mit $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $b : I \to \mathbb{K}^d$ stetig, so erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nach Satz 3.15 durch

$$\varphi_b(t,u,0) = e^{tA}\int_u^t e^{-sA}b(s)ds \ .$$

Ist auch die rechte Seite b unabhängig von t, also $b(t) = b$ auf $I = \mathbb{R}$, so ist die Gleichung autonom. Falls A invertierbar ist, erhält wegen $(e^{-tA}A^{-1})' = -Ae^{-tA}A^{-1} = -e^{tA}$ nach den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung[27]

$$\varphi_b(t,0) = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\,ds \cdot b = e^{tA}(-e^{-tA}A^{-1} + A^{-1})b = e^{tA}A^{-1}b - A^{-1}b \ .$$

Ist also $\gamma(A) < 0$, so gilt mit Satz 5.1 für jedes $v \in \mathbb{K}^d$

$$\varphi_b(t,v) = \varphi_0(t,v) + \varphi_b(t,0) = e^{tA}(v + A^{-1}b) - A^{-1}b \to -A^{-1}b \quad (t \to \infty).$$

Wir betrachten jetzt nichtlineare Gleichungen. Wir werden sehen, dass man unter geeigneten Voraussetzungen an die rechte Seite g gegebenenfalls Aussagen über das asymptotische Verhalten von Lösungen $\varphi(\cdot,v)$ machen kann ohne die Lösungen explizit zu kennen.

Bemerkung und Definition 5.3 Sind $g \in C(G,\mathbb{K}^d)$ und $p \in G$ mit $g(p) = 0$, so ist $\varphi(t,p) = p$ für $t \in I(p) = \mathbb{R}$. Nullstellen von g nennt man **stationäre Punkte** der Gleichung $x' = g(x)$. Entsprechend heißen die konstanten Lösungen **stationär**. Weiter heißt p

[27] Integrale über matrixwertige Funktionen sind eintragsweise definiert

1. **attraktiv**, falls ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(v) = \infty$ und $\varphi(t, v) \to p$ für $t \to \infty$ und $v \in U_\delta(p)$ gilt,[28]
2. **stabil**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $t^+(v) = \infty$ und $\varphi(t, v) \in U_\varepsilon(p)$ für alle $v \in U_\delta(p), t \geq 0$,
3. **asymptotisch stabil**, falls p attraktiv und stabil ist.

Satz 5.4 (linearisierte asymptotische Stabilität)
Es seien $G \subset \mathbb{R}^d$ offen und $g \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$. Weiter sei p ein stationärer Punkt von $x' = g(x)$ mit $\gamma(Jg(p)) < 0$.[29] Ist $0 < \alpha < -\gamma(Jg(p))$, so existieren eine Umgebung U von p und ein $M \geq 0$ mit $t^+(v) = \infty$ für alle $v \in U$ und

$$|\varphi(t, v) - p| \leq M|v - p|e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0,\, v \in U). \tag{5.1}$$

Insbesondere ist p asymptotisch stabil.

Beweis. 1. Ohne Einschränkung sei $p = 0$. Wir setzen $A := Jg(0)$. Da g differenzierbar an $p = 0$ ist, gilt

$$g(x) = A \cdot x + r(x)$$

mit $r(x)/|x| \to 0$ $(x \to 0)$. Es sei $\delta > 0$ so, dass $\alpha + \delta < -\gamma(A)$, also $\mu := -(\alpha + \delta) > \gamma(A)$. Nach Satz 5.1 existiert ein $M > 0$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{\mu t} \qquad (t \geq 0)\ .$$

Weiter existiert ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(0) \subset G$ und

$$|r(x)| < (\delta/M)|x| \qquad (|x| < \rho).$$

Für $v \in U_\rho(0)$ definieren wir

$$\tau(v) := \sup\big\{t \in \big[0, t^+(v)\big) : \big|\varphi(s, v)\big| < \rho \text{ für alle } s \in [0, t)\big\}$$

und zeigen, dass (5.1) für $t \in [0, \tau(v))$ erfüllt ist: Zunächst gilt

$$\varphi'(t, v) = g(\varphi(t, v)) = A\varphi(t, v) + r\big(\varphi(t, v)\big) \qquad \big(t \in I(v)\big).$$

Also ist $\varphi(\cdot, v)$ Lösung des *linearen* Systems $x' = Ax + b(t)$ mit $b(t) := r\big(\varphi(t, v)\big)$ für $t \in I(v)$. Mit Bemerkung 5.2 ergibt sich

$$\varphi(t, v) = \varphi_0(t, v) + \varphi_b(t, 0) = e^{tA}v + \int_0^t e^{(t-s)A} r\big(\varphi(s, v)\big) ds \qquad \big(t \in I(v)\big).$$

Ist $t \in \big[0, \tau(v)\big)$, so gilt $|r(\varphi(s, v))| \leq (\delta/M)|\varphi(s, v)|$ und $\|e^{(t-s)A}\| \leq Me^{\mu(t-s)}$ für $s \in [0, t]$ und damit

$$|\varphi(t, v)| \leq Me^{\mu t}|v| + e^{\mu t}\delta \int_0^t e^{-\mu s}|\varphi(s, v)|\, ds.$$

[28] Lösungen, die genügend nahe an p starten, werden von p für $t \to \infty$ angezogen.

[29] Wenn wir von Eigenwerten sprechen, fassen wir die Jacobi-Matrix $Jg(x)$ an x als Matrix in $\mathbb{C}^{d \times d}$ auf.

Mit $\psi(t) := e^{-\mu t}|\varphi(t,v)| = e^{(\alpha+\delta)t}|\varphi(t,v)|$ ist also

$$\psi(t) \le M|v| + \delta \int_0^t \psi(s)\,ds \qquad \big(t \in \big[0,\tau(v)\big)\big).$$

Aus dem Gronwall-Lemma (Satz 2.15) erhält man

$$e^{\delta t} e^{\alpha t} \big|\varphi(t,v)\big| = \psi(t) \le M|v|e^{\delta t} \qquad \big(t \in \big[0,\tau(v)\big)\big)$$

und damit $|\varphi(t,v)| \le M|v|e^{-\alpha t}$ für $t \in [0,\tau(v))$.
2. Nach 1. ist insbesondere $\big|\varphi(t,v)\big| \le M|v|$ für alle $t \in \big[0,\tau(v)\big)$ und $v \in U_\rho(0)$. Ist also

$$v \in U := U_{\rho/(2M+1)}(0) \subset U_\rho(0),$$

so ist $\big|\varphi(t,v)\big| \le \rho/2$ für $t \in [0,\tau(v))$. Hieraus folgt $\tau(v) = t^+(v)$, denn sonst wäre $\big|\varphi(\tau(v),v)\big| \ge \rho$, was der Stetigkeit von $\varphi(\cdot,v)$ an $\tau(v)$ widerspräche. Da $B_{\rho/2}(0) \subset G$ kompakt ist, ergibt sich aus dem globalen Satz von Picard-Lindelöf (Satz 2.12) mit $D = \mathbb{R} \times G$ dann auch $\tau(v) = t^+(v) = \infty$. Nach 1. gilt (5.1) also für alle $v \in U$ und $t \in [0,\infty)$. □

Beispiel 5.5 1. (logistische Gleichung) Wir betrachten wieder $g(x) = x(1-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.8.2). Hier sind 0 und 1 die stationären Punkte. Dabei gilt $g'(0) = 1$ und $g'(1) = -1$. Also ist $p = 1$ nach Satz 5.4 asymptotisch stabil. Man sieht: Für die maximale Lösung

$$\varphi(t,v) = \frac{v}{v + e^{-t}(1-v)} \qquad \big(t \in I(v)\big)$$

des Anfangswertproblems mit $x(0) = v$ gilt hier $t^+(v) = \infty$ für $v \in (0,\infty)$ und $\varphi(t,v) \to 1$ für $t \to \infty$ mit exponentieller Geschwindigkeit.
2. Es seien $\sigma, \rho, \beta > 0$. Dann heißt das nichtlineare System $x' = g(x)$, wobei

$$g(x) = g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_1x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}^3),$$

Lorenz-System mit den Parametern σ, ρ, β.[30] Offensichtlich ist $p = (0,0,0)$ ein stationärer Punkt. Weiter gilt

$$(Jg)(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

und damit

$$P(\lambda) := \det(Jg(0) - \lambda I) = -(\lambda + \beta)(\lambda^2 + \lambda(\sigma+1) + \sigma(1-\rho))\,.$$

[30]Das System ist in den 1960er Jahren von Edward Lorenz, einem Mathematiker und Meteorologen, im Zusammenhang mit der Frage nach Modellen für die Wettervorhersage untersucht worden; siehe etwa https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system. Der in diesem Zusammenhang auftretende Lorenz-Attraktor ist später zu einer Ikone der Chaostheorie geworden.

Die Nullstellen von P sind $\lambda_3 = -\beta < 0$ und

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 - \sigma(1-\rho)}\,.$$

Ist dabei $\rho < 1$, so gilt $\lambda_{1,2,3} < 0$. Nach Satz 5.4 ist $p = 0$ asymptotisch stabil. Man kann zeigen, dass der Nullpunkt im Fall $\rho < 1$ sogar global attraktiv ist, d. h. für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\varphi(t,v) \to 0$ für $t \to \infty$. Das Verhalten der Lösungen wird deutlich komplizierter für $\rho > 1$.

6 Mannigfaltigkeiten

Im Zusammenhang mit partiellen Differenzialgleichungen, also Differenzialgleichungen, bei denen partielle Ableitungen auftauchen, spielen Integralsätze eine wesentliche Rolle. Ohne auf die Theorie partieller Differenzialgleichungen einzugehen, geben wir eine kurze Einführung in Mannigfaltigkeiten und Integralsätze.

Definition 6.1 Es seien $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq k$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt k-dimensionale **Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^d$ oder kurz k-dimensionale **Mannigfaltigkeit** in $\mathbb{R}^d$, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von p und eine Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{d-k})$ gibt[31] mit

1. $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$,
2. p ist eine reguläre Stelle von f, d. h. die lineare Abbildung $f'(p)$ ist surjektiv beziehungsweise, äquivalent, die Jacobi-Matrix $Jf(p)$ hat vollen Rang $d-k$.

Ist speziell $k = d-1$, also $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, so heißt M **Hyperfläche** in $\mathbb{R}^d$. In diesem Fall ist p genau dann regulär wenn $\nabla f(p) \neq 0$ ist.

Beispiel 6.2 1. Es seien $r > 0$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^2 - r^2 = x^\top x - r^2$. Dann ist

$$M_r := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = r\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0\},$$

wegen $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ für $x \neq 0$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$. Speziell ist $\mathbb{S}^{d-1} := M_1$ die $(d-1)$-dimensionale **Einheitssphäre** und damit $M_r = r\mathbb{S}^{d-1}$.

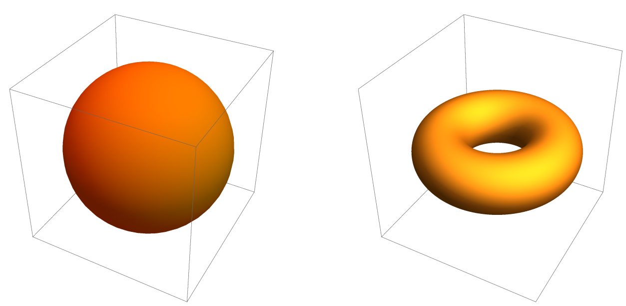

Abbildung 13: $\mathbb{S}^2 = M_1$ und Torus $T_{0.5,1}$.

2. Für $0 < r < R$ sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2)$$

Dann ist

$$T := T_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$$

[31] Dabei ist $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ der Nullraum.

und T eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ ([Ü]). Man nennt T einen **Torus**.[32]

Bemerkung 6.3 1. Sind $d > k$, $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g \in C^1(S, \mathbb{R}^{d-k})$, so ist

$$\mathrm{graph}(g) = \big\{(s, g(s)) : s \in S\big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$.

> Denn: Betrachtet man $f : U := S \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$ mit $f(x) = f(s, y) = y - g(s)$, wobei $x = (s, y)$ mit $s \in S$, $y \in \mathbb{R}^{d-k}$, so ist $\mathrm{graph}(g) = \{x \in U : f(x) = 0\}$ und $Jf(x) = (-Jg(s), I_{d-k})$ hat vollen Rang $d - k$ für alle $x \in U$.

2. Nicht jede Untermannigfaltigkeit der Dimension $k < d$ ist Graph *einer* C^1-Funktion von k reellen Variablen,[33] aber es gilt trotzdem folgende lokale Aussage, die nichts anderes als eine Interpretation des Hauptsatzes über implizite Funktionen darstellt: Sind $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so gibt es nach eventueller „Umnummerierung der Koordinaten“ $s = (x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\alpha(k)})$, $y = (x_{\alpha(k+1)}, \ldots, x_{\alpha(d)})$ mit einer Permutation α von $\{1, \ldots, d\}$ so, dass $f(a, \cdot)'(p) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{d-k})$ für $p =: (a, b) \in M$ gilt[34], offene Umgebungen V von a und W von b und eine Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R}^{d-k})$ mit

$$M \cap (V \times W) = \big\{\big(s, g(s)\big) : s \in V\big\}.$$

Bemerkung und Definition 6.4 1. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\varphi : X \to Y$ bijektiv. Dann heißt φ ein **Homöomorphismus** von X nach Y, falls sowohl φ als auch φ^{-1} stetig sind. Die Stetigkeit von φ^{-1} ist äquivalent zur Offenheit von φ ([Ü]).[35]
2. Es seien $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $d \geq k$. Eine Abbildung $\varphi \in C^1(S, \mathbb{R}^d)$ heißt **Immersion**, falls $\varphi'(s)$ injektiv für alle $s \in S$ ist.[36] Ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$ und ist eine Immersion $\varphi : S \to M$ ein Homöomorphismus auf das Bild $\varphi(S) \subset M$, so nennt man φ eine **glatte Einbettung** von S in M.
3. Ist g wie in Bemerkung 6.3.2., so ist $\varphi : V \to M \cap (V \times W)$ mit $\varphi(s) := \big(s, g(s)\big)^\top$ für $s \in V$ bijektiv. Da $J\varphi(s)$ für alle s vollen Rang k hat, ist φ eine Immersion. Außerdem ist φ^{-1} als Einschränkung der Projektion $(s, y) \mapsto s$ stetig. Also ist φ eine glatte Einbettung von V in M.

Beispiel 6.5 1. (Polarkoordinaten) Es sei $S = \mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definiert. Wegen $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t ist φ eine Immersion. Man beachte, dass φ nicht injektiv ist, dass aber für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ etwa $\varphi|_V$ mit

[32] $T_{r,R}$ entsteht durch Rotation der Kreises $\{R, 0, 0\} + \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = r^2\}$ um die x_3-Ebene.
[33] etwa $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
[34] $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$ bezeichnet die linearen und bijektiven Abbildungen auf $\mathbb{R}^m$
[35] $\varphi : X \to Y$ heißt offen, falls $\varphi(U)$ offen in Y ist für alle offenen Mengen $U \subset X$.
[36] Anders ausgedrückt, falls $J\varphi(s)$ für alle s vollen Rang k hat

$V = (\tau - \pi, \tau + \pi)$ eine glatte Einbettung von V in $\mathbb{S}^1$ ist. In diesem Fall unterscheiden sich $\varphi(V)$ und $\mathbb{S}^1$ durch einen Punkt.
2. (Kugelkoordinaten; sphärische Polarkoordinaten) Durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin t \\ \sin s \cdot \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s,t) \in \mathbb{R}^2\big).$$

ist eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ definiert.

> Denn: Die Inklusion $\varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{S}^2$ ergibt sich sofort aus $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ist $x \in \mathbb{S}^2$ und $u := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, so ist $u^2 + x_3^2 = 1$. Also existieren zunächst ein $t \in [0, \pi]$ mit $x_3 = \cos t$, $u = \sin t$ und dann ein $s \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = \sin t \cos s$, $x_2 = \sin t \sin s$.[37]

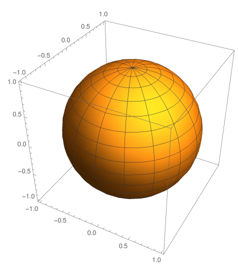

Abbildung 14: $\mathbb{S}^2$ mit Längen- und Breitengraden.

Weiter ist

$$J\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t & \cos s \cos t \\ \cos s \sin t & \sin s \cos t \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Damit hat $J\varphi(s,t)$ vollen Rang 2 genau dann, wenn $\sin t \neq 0$ ist. Also ist etwa $\varphi|_S$, wobei $S := \mathbb{R} \times (0, \pi)$, eine Immersion. Wieder ist $\varphi|_S$ nicht injektiv. Ist jedoch $(\sigma, \tau) \in S$ und betrachtet man etwa $V = (\sigma - \pi, \sigma + \pi) \times (0, \pi)$, so kann man sich überlegen, dass $\varphi|_V$ eine glatte Einbettung von V in $\mathbb{S}^2$ ist. Hier unterscheiden sich $\varphi(V)$ und $\mathbb{S}^2$ durch einen Meridian.

Bemerkung und Definition 6.6 Sind $X, Y \subset \mathbb{R}^k$ offen, so heißt eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to Y$ ein **Diffeomorphismus**, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind. In diesem Falle sind nach der Kettenregel $\varphi'(x) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$ und $(\varphi^{-1})'(y) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$ für alle $x \in X$ bzw. $y \in Y$. Nach dem Hauptsatz über lokale Umkehrbarkeit impliziert $\varphi'(x) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$ für alle x schon $(\varphi^{-1})'(y) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$ für alle y.

Satz 6.7 *Es seien $d > k$, $S \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : S \to \mathbb{R}^d$ eine Immersion. Dann existiert zu jedem $\sigma \in S$ eine offene Umgebung V von σ so, dass $\varphi : V \to \varphi(V)$ ein Homöomorphismus und $\varphi(V)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist.*

[37] Man kann s als eine Art Längengrad und t als eine Art Breitengrad ansehen.

Beweis. Wir können nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten, falls nötig, wieder davon ausgehen, dass φ von der Form $\varphi = (h, g)^\top$ mit $\det Jh(\sigma) \neq 0$ ist, wobei $h := (\varphi_{\alpha(1)}, \dots, \varphi_{\alpha(k)})$ und $g = (\varphi_{\alpha(k+1)}, \dots, \varphi_{\alpha(d)})$ für eine Permutation α. Nach dem Hauptsatz über lokale Umkehrbarkeit existiert eine offene Umgebung V von σ so, dass $h : V \to V' := h(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Setzt man $U := V' \times \mathbb{R}^{d-k}$, so definiert

$$\Phi(s, y) := \begin{pmatrix} h(s) \\ g(s) + y \end{pmatrix} \qquad ((s, y) \in V \times \mathbb{R}^{d-k})$$

einen Diffeomorphismus $\Phi : V \times \mathbb{R}^{d-k} \to U$, denn zum einen sieht man leicht, dass Φ bijektiv ist, und zum anderen gilt wegen

$$\det J\Phi(s, y) = \begin{vmatrix} Jh(s) & 0 \\ Jg(s) & I_{d-k} \end{vmatrix} = \det Jh(s) \neq 0$$

nach Bemerkung 6.6 auch $(\Phi^{-1})'(x) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^d)$ für $x \in U$. Weiter folgt aus

$$\Phi(s, 0) = \begin{pmatrix} h(s) \\ g(s) \end{pmatrix} = \varphi(s) \qquad (s \in V),$$

dass $\varphi : V \to \varphi(V)$ injektiv (und damit bijektiv) ist mit stetiger Umkehrfunktion. Für $f := (\Phi_{k+1}^{-1}, \dots, \Phi_d^{-1})$ ergibt sich

$$\varphi(V) = \Phi(V \times \{0\}) = \left\{x \in U : \Phi_{k+1}^{-1}(x) = \ldots = \Phi_d^{-1}(x) = 0\right\} = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Wegen $\det J\Phi^{-1}(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ hat die Jacobi-Matrix

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} (\nabla\Phi_{k+1}^{-1})^T(x) \\ \vdots \\ (\nabla\Phi_d^{-1})^T(x) \end{pmatrix}$$

vollen Rang ($= d - k$) für alle $x \in U$. □

Damit erhalten wir eine Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten, die von zentraler Bedeutung ist:

Satz 6.8 *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ mit $d > k$ und $M \subset \mathbb{R}^d$. Dann ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ genau dann, wenn zu jedem $p \in M$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und eine glatte Einbettung $\varphi : V \to M$ mit $p \in \varphi(V)$ existieren.*

Beweis. Die Aussage $\Rightarrow$ ergibt sich aus Bemerkung und Definition 6.4.3. Umgekehrt folgt $\Leftarrow$ aus Satz 6.7, da Untermannigfaltigkeiten lokal definiert sind. □

Definition 6.9 Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, so heißt jede Abbildung φ wie in Satz 6.8 eine **lokale Parametrisierung** von M am Punkt p oder auch eine **Karte** von

M bzgl. p. Ist A eine Menge von Karten mit $\bigcup_{\varphi\in A}\varphi(V)=M$, so nennt man A einen **Atlas** von M.[38]

Beispiel 6.10 (vgl. Beispiel 6.5) Für $\tau\in\mathbb{R}$ sei $\varphi_\tau:(\tau-\pi,\tau+\pi)\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi_\tau(t)=(\cos t,\sin t)$. Dann ist durch $\{\varphi_0,\varphi_\pi\}$ ein Atlas von $\mathbb{S}^1$ gegeben.

Definition 6.11 Es sei $M\subset\mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist $p\in M$, so heißt $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$ ein **Tangentialvektor** an M in p, falls ein offenes Intervall I mit $0\in I$ und eine Funktion $\gamma\in C^1(I,\mathbb{R}^d)$ existieren mit $\gamma(I)\subset M$, $\gamma(0)=p$ und $\gamma'(0)=\mathbf{v}$. Die Menge

$$T_pM:=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d:\mathbf{v}\text{ Tangentialvektor an }M\text{ in }p\}$$

heißt **Tangentialraum** von M in p.

Satz 6.12 *Es sei $M\subset\mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei $p\in M$. Dann gilt:*

1. *T_pM ist ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^d$.*
2. *Ist $\varphi:V\to M$ eine glatte Einbettung mit $\varphi(\sigma)=p$, so ist $\{\partial_j\varphi(\sigma),j=1,\dots k\}$ eine Basis von T_pM.*
3. *Sind $U\subset\mathbb{R}^d$ eine offene Umgebung von p und $f\in C^1(U,\mathbb{R}^{d-k})$ mit $M\cap U=f^{-1}(\{0\})$ und so, dass p regulär ist, so gilt $T_pM=\left\{\nabla f_j(p):j=1,\dots,d-k\right\}^\perp$.*

Beweis. Wir setzen

$$T_1:=\operatorname{span}\{\partial_1\varphi(\sigma),\dots,\partial_k\varphi(\sigma)\}\quad\text{und}\quad T_2:=\{\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_{d-k}(p)\}^\perp.$$

Da φ eine Immersion ist und p ein regulärer Punkt von f ist, sind T_1 und T_2 beide k-dimensional. Also genügt es, $T_1\subset T_pM\subset T_2$ zu zeigen.
$T_1\subset T_pM$: Es sei

$$\mathbf{v}=\sum_{j=1}^k\lambda_j\partial_j\varphi(\sigma)=J\varphi(\sigma)\lambda\in T_1.$$

Ist $\varepsilon>0$ so klein, dass $\sigma+t\lambda\in V$ für $|t|<\varepsilon$ gilt, so ist $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ mit $\gamma(t):=\varphi(\sigma+t\lambda)$ stetig differenzierbar und es gilt $\gamma(0)=\varphi(\sigma)=p$ sowie

$$\gamma'(0)=J\varphi(\sigma)\cdot\lambda=\mathbf{v}$$

nach der Kettenregel.

[38] Oft bezeichnet man die Umkehrabbildung $\psi=\varphi^{-1}:\varphi(V)\to V$ als Karte von M bzgl. p und dann auch die Menge $\{\varphi^{-1}:\varphi\in A\}$ im Fall $\bigcup_{\varphi\in A}\varphi(V)=M$ als einen Atlas vom M.

$T_pM \subset T_2$: Es sei $\gamma \in C^1(I, M)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\gamma\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big) \subset M \cap U$, also $f\big(\gamma(t)\big) = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Mit der Kettenregel folgt

$$0 = (f_j \circ \gamma)'(0) = (\nabla f_j)^\top(p) \cdot \gamma'(0)$$

für $j = 1, \dots, d-k$, d. h. $\gamma'(0) \in T_2$. □

Bemerkung und Definition 6.13 Es seien $d > k$ und $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$. Für $p \in M$ setzen wir $N_pM := (T_pM)^\perp$. Die Vektoren $\mathbf{w} \in N_pM \setminus \{0\}$ heißen **Normalenvektoren** von M an p. Ist f wie in Definition 6.1, so ist $\{\nabla f_j(p), j = 1, \dots, d-k\}$ nach Satz 6.12 eine Basis von N_pM.

Bemerkung und Definition 6.14 Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ nennen wir **orientierbar berandet**, falls zu jedem $p \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ von p und ein $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ existieren mit

1. $A \cap U = f^{-1}((-\infty, 0])$,
2. $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \in U$.

Dann gilt auch $U \cap \partial A = f^{-1}(\{0\})$. Insbesondere ist ∂A eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$.

> Denn: $\subset$: Ist $x \in U \cap A$ mit $f(x) < 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x') < 0$ für $x' \in U_\delta(x)$, also $U_\delta(x) \subset A$. Damit ist $x \in A^\circ$.
> $\supset$: Ist $x \in A \cap U$ mit $f(x) = 0$, so ist $x \in \partial A$, denn sonst wäre $x \in A^\circ \cap U$ eine Maximalstelle von f, also $\nabla f(x) = 0$.

Satz 6.15 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ orientierbar berandet. Dann ist* $\dim N_p(\partial A) = 1$ *für alle $p \in \partial A$ und es gibt genau einen Vektor $\mathbf{n}(p) \in N_p(\partial A)$ mit $\big|\mathbf{n}(p)\big| = 1$ und $p + t\,\mathbf{n}(p) \notin A$ für $t > 0$ genügend klein. Außerdem ist die Abbildung $\mathbf{n} : \partial A \to \mathbb{S}^{d-1}$ stetig.*

Beweis. Es seien $p \in \partial A$ und f wie in Bemerkung und Definition 6.14. Da ∂A eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ ist, ist $\dim T_p(\partial A) = d - 1$, also $\dim N_p(\partial A) = 1$ und $N_p(\partial A) = \operatorname{span}\big\{\nabla f(p)\big\}$ nach Bemerkung und Definition 6.13. Wir setzen

$$\mathbf{n}(p) := \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}.$$

Da $\mathbf{n}(p)$ Anstiegsrichtung und $-\mathbf{n}(p)$ Abstiegsrichtung von f ist, ist $\mathbf{n}(p)$ der einzige Vektor in $\mathbb{S}^{d-1} \cap N_p(\partial A)$, der die Bedingung aus dem Satz erfüllt. Weiterhin ist auch $\mathbf{n}(x) = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ für alle $x \in U \cap \partial A$ und damit ist $\mathbf{n}$ insbesondere stetig. □

Bemerkung und Definition 6.16 In der Situation von Satz 6.15 nennt man $\mathbf{n}(p)$ den **äußeren Einheitsnormalenvektor** von A in p und $\mathbf{n} : \partial A \to \mathbb{S}^{d-1}$ **äußeres Einheitsnormalenfeld**. Ist f wie in Bemerkung und Definition 6.14, so ist

$$\mathbf{n}(x) = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$$

für $x \in U \cap \partial A$.

Beispiel 6.17 Es seien $r > 0$ und $A := B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r in $\mathbb{R}^d$. Dann ist $\partial A = r\mathbb{S}^{d-1}$. Wählt man etwa $U := \mathbb{R}^d \setminus U_{r/2}(0)$ und $f(x) = |x|^2 - r^2$ für $x \in U$, so gilt $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ sowie

$$A \cap U = A \setminus U_{r/2}(0) = f^{-1}(-\infty, 0]).$$

Also ist A orientierbar berandet (man beachte, dass U Umgebung aller $p \in \partial A$ ist) . Hier ist

$$\mathbf{n}(x) = x/|x| = x/r$$

für $x \in r\mathbb{S}^{d-1}$.

Bemerkung 6.18 Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ orientierbar berandet. Ist $p \in \partial A$ so können wir nach geeigneter Permuation der Variablen davon ausgehen, dass ∂A lokal Graph einer Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ ist (vgl. Bemerkung 6.3.2 und beachte $d - k = 1$ hier), d. h.

$$(\partial A) \cap U = \big\{(s, g(s)) : s \in V\big\}$$

für eine offene Umgebung $U = V \times I$ von p, wobei I ein offenes Intervall ist. Da A orientierbar berandet ist, kann man sich mit Satz 6.15 überlegen, dass U so gewählt werden kann, dass entweder

$$A \cap U = \big\{(s, y) \in U : y \leq g(s)\big\}$$

oder

$$A \cap U = \big\{(s, y) \in U : y \geq g(s)\big\}$$

gilt. Also ist $f : U \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) = f(s, y) := y - g(s)$ im ersten bzw. $f(x) := g(s) - y$ im zweiten Fall wie in Bemerkung und Definition 6.14. Für $s \in V$ ist im ersten Fall damit

$$\mathbf{n}(s, g(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(s)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im zweiten Fall

$$\mathbf{n}(s, g(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(s)|^2}} \begin{pmatrix} \nabla g(s) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7 Oberflächenintegrale und Gaußscher Integralsatz

Wir wollen nun Oberflächenmaße und Oberflächenintegrale für Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten definieren. Dabei verwenden wir einige wenige Bezeichnungen und Ergebnisse der Maß- und Integrationstheorie, die im Anhang zu finden sind. Wesentliches erstes Ziel ist die Herleitung die Formel (7.4), die zeigt, wie man Oberflächenintegrale über Parametrisierungen berechnen kann. Unser Zugang zu Oberfächenintegralen erfolgt über Hausdorff-Maße.

Bemerkung und Definition 7.1 Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Für $p \geq 0$ und $\delta > 0$ setzen wir mit $\inf \varnothing := \infty$ und $\operatorname{diam}(\varnothing) := 0$

$$H_{p,\delta}(B) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_j))^p : B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,\, \operatorname{diam}(B_j) \leq \delta\Big\} \in [0,\infty] \quad (B \subset X)$$

und

$$H_p^*(B) = \sup_{\delta>0} H_{p,\delta}(B) = \lim_{\delta\to 0} H_{p,\delta}(B) \in [0,\infty] \quad (B \subset X).$$

Man kann zeigen, dass H_p^* ein metrisches äußeres Maß ist, genannt das **p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß** auf der Potenzmenge $\operatorname{Pot}(X)$ von X.[39] Weiter sieht man leicht: Sind S eine Menge, $C \geq 0$ und $f, g : S \to X$ mit $d_X(f(u), f(v)) \leq C d_X(g(u), g(v))$, so ist

$$H_p^*(f(A)) \leq C^p (H_p^*(g(A)) \quad (A \subset S). \tag{7.1}$$

Insbesondere ist H_p^* invariant unter Isometrien.[40]

Bemerkung und Definition 7.2 Nach Bemerkung und Definition A.3 und Bemerkung und Definition7.1 ist $H_p := H_p^*|_{\mathscr{B}(X)}$ ein Maß, genannt das **p-dimensionale Hausdorff-Maß** auf $\mathscr{B}(X)$ bzw. X.
Es sei nun $k \in \mathbb{N}$. Sind $d, d' \geq k$ und $H_{k,d}$ das k-dimensionale Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^d$, so ist

$$H_{k,d}(B) = H_{k,d'}(B \times \{0\})$$

falls $d' > d$ und $B \in \mathscr{B}_d$. Daher spielt es keine Rolle, bezüglich welches $d \geq k$ wir $H_{k,d}$ betrachten. Man schreibt daher wieder kurz H_k. Außerdem ist H_k nach Bemerkung und Definition 7.1 invariant unter Bewegungen, d. h. Isometrien auf $\mathbb{R}^d$, und damit insbesondere translationsinvariant. Da $0 < H_d([0,1]^d) < \infty$ ist ([Ü]), existiert nach Bemerkung und Definition A.2 eine Konstante $\omega_d > 0$ [41] mit

$$\omega_d H_d(B) = \lambda_d(B) \qquad (B \in \mathscr{B}_d). \tag{7.2}$$

[39] H_0^* ist das Zählmaß auf $\operatorname{Pot}(X)$.

[40] Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt Isometrie, falls $d_X(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

[41] Man kann zeigen, dass $\omega_d = \lambda(B_{1/2}(0)) = \pi^{d/2}/(2^d\Gamma(d/2+1))$ gilt, was wir nicht brauchen. Einen Beweis findet man etwa in J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer, 2011, Kapitel V, Satz 1.16.

Bemerkung 7.3 Ist $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ linear und T^* der adjungierte Operator,[42] so ist der lineare Operator $T^*T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ positiv semidefinit und daher existiert genau ein positiv semidefiniter Operator $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $S^2 = T^*T$ (siehe lineare Algebra). Man schreibt kurz $S =: |T|$ und nennt $\det |T|$ die **Gramsche Determinante** von T. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist

$$\det |T| = \sqrt{\det(T^*T)}$$

und im Falle $k = d$ auch

$$\det |T| = |\det T|.$$

Man kann damit zeigen: Ist $k \leq d$, so gilt

$$H_k(T(A)) = \det |T| \cdot H_k(A) \quad (A \in \mathscr{B}_k).$$

Der Beweis[43] beruht im Wesentlichen auf der entsprechenden Aussage für das Lebesgue-Maß (siehe A.2).

Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $M \in \mathscr{B}_d$[44] und (mit $\omega_0 := 1$) durch

$$m(B) := \omega_k H_k(B) \qquad (B \in \mathscr{B}(M))$$

ein Maß $m = m_M$ auf $\mathscr{B}(M) = \{B \in \mathscr{B}_d : B \subset M\}$ definiert, genannt das **Oberflächenmaß** von M.[45] Damit gilt folgender für die Integration auf Mannigfaltigkeiten zentrale Satz:

Satz 7.4 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : S \to M$ eine injektive Immersion. Dann ist $\varphi(A) \in \mathscr{B}(M)$ für $A \in \mathscr{B}(S)$ mit* [46]

$$m(\varphi(A)) = \int_A \det |\varphi'| \,. \tag{7.3}$$

Ist $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar bzgl. m, so gilt

$$\int_{\varphi(S)} f\, dm = \int_S (f \circ \varphi) \det |\varphi'|. \tag{7.4}$$

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Für jedes $\alpha > 1$ existieren eine disjunkte Folge (B_j) in $\mathscr{B}(S)$ mit $S = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ und eine Folge (T_j) in $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$[47] mit

$$\alpha^{-1}|T_j h| \leq |\varphi'(x)h| \leq \alpha |T_j h| \quad (x \in B_j,\, h \in \mathbb{R}^k) \tag{7.5}$$

[42] definiert durch $x^\top(T^*y) = (Tx)^\top y$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^d$

[43] siehe etwa in G.B. Folland, Real Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1984., Proposition 10.24.

[44] Genauer ist M stets σ-kompakt, also abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

[45] m ist das Spurmaß von $\omega_k H_k$ auf M; siehe Bemerkung A.6.

[46] Wir schreiben kurz $\int_A g := \int g\, d\lambda_A$; vgl. Bemerkung A.6.

[47] Für endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W bezeichnet $L(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen von V nach W.

und

$$\alpha^{-1}|T_jx - T_jy| \le |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \alpha|T_jx - T_jy| \quad (x, y \in B_j). \tag{7.6}$$

Denn: Wir wählen $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ und $1 < \beta < \alpha - \varepsilon$ so, dass $\alpha^{-1} + \varepsilon < \beta^{-1}$. Weiter sei $\mathscr{T}$ eine abzählbare und in $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$ dichte Menge.[48] Für $T \in \mathscr{T}$ und $m \in N$ sei $E(T, m)$ die Menge aller $x \in S$ mit

$$\beta^{-1}|Th| \le |\varphi'(x)h| \le \beta|Th| \quad (h \in \mathbb{R}^k) \tag{7.7}$$

und

$$\alpha^{-1}|T_jx - T_jy| \le |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \alpha|T_jx - T_jy| \quad (y \in S,\ |y - x| < 1/m). \tag{7.8}$$

Die Mengen $E(T, m)$ sind Borelmengen, da man sich bei h und y jeweils auf abzählbare Mengen in $\mathbb{R}^k$ bzw. S beschränken kann. Es sei nun $x \in S$. Da φ' injektiv ist, gilt

$$\delta := \min_{h \in \mathbb{S}^{k-1}} |\varphi'(x)h| > 0.$$

Wir wählen $T \in \mathscr{T}$ mit

$$\|T - \varphi'(x)\| < \min\{(\beta - 1)\delta,\ (1 - \beta^{-1})\delta\}\,.$$

Dann gilt für $|h| = 1$

$$|Th| \le |\varphi'(x)h| + |Th - \varphi'(x)h| \le |\varphi'(x)h| + (\beta - 1)\delta \le \beta|\varphi'(x)h|$$

und entsprechend $|Th| \ge \beta^{-1}|\varphi'(x)h|$. Aus Linearitätsgrunden gelten die Abschätzungen auch für beliebige h. Damit ist (7.7) erfüllt und zudem T injektiv, also auch

$$\eta := \min_{h \in \mathbb{S}^{k-1}} |Th| > 0.$$

Da φ differenzierbar an x ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|\varphi(y) - \varphi(x) - \varphi'(x)(y - x)| \le \varepsilon\eta|y - x| \le \varepsilon|T(y - x)| \quad (|y - x| < 1/m)$$

und folglich

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \le \varepsilon|Tx - Ty| + |\varphi'(x)(y - x)| \le \varepsilon|Ty - Tx| + \beta|Ty - Tx| < \alpha|Ty - Tx|$$

für $|y - x| < 1/m$. Entsprechend sieht man $|\varphi(y) - \varphi(x)| \ge \alpha^{-1}|Ty - Tx|$. Damit ist auch (7.8) erfüllt, also $x \in E(T, m)$. Da $x \in S$ beliebig war, ist

$$S = \bigcup_{T,m} E(T, m)\,.$$

Weiter ist jede Menge $E(T, m)$ abzählbare Vereinigung von Mengen $E_\ell(T, m)$ mit Durchmesser $< 1/m$. Indem man die abzählbare Familie $\{E_\ell(T, m) : T \in \mathscr{T},\ \ell, m \in \mathbb{N}\}$ disjuktifiziert, erhält man eine Folge (B_j) wie gefordert.

[48] Eine solche existiert; man betrachte etwa die Menge der Matrizen mit rationalen Einträgen und dann die entsprechenden linearen Abbildungen.

2. Das Mengensystem $\mathscr{S}$ aller $A \subset S$ mit $\varphi(A) \in \mathscr{B}_d$ ist eine σ-Algebra. Da $S \subset \mathbb{R}^k$ offen ist, ist S eine σ-kompakte Menge, genauer kann S durch abzählbar viele kompakte Mengen ausgeschöpft werden.[49] Damit ist auch jede in S abgeschlossene Menge A eine σ-kompakte Menge. Da φ stetig ist, ist $\varphi(A)$ ebenfalls σ-kompakt, also $\varphi(A) \in \mathscr{B}_d$ und damit $A \in \mathscr{S}$. Folglich ist $\mathscr{S} \supset \mathscr{B}(S)$.

Wir zeigen nun – und nur – die Gleichung (7.3); die zweite Formel (7.4) ergibt sich daraus per Standardschuss (siehe Maßtheorie). Dazu seien $A \in \mathscr{B}(S)$ und $\alpha > 1$ gegeben. Wir wählen (B_j), (T_j) wie in 1. und setzen $A_j := A \cap B_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Aus (7.5) folgt mit (7.1)

$$\alpha^{-k} H_k(T_j(E)) \le H_k(\varphi'(x)(E)) \le \alpha^k H_k(T_j(E)) \quad (x \in A_j,\, E \in \mathscr{B}_k)$$

und nach Bemerkung 7.3 damit

$$\alpha^{-k} \det |T_j| \le \det |\varphi'(x)| \le \alpha^k \det |T_j| \qquad (x \in A_j).$$

Weiter folgt aus (7.6), wieder mit (7.1),

$$\alpha^{-k} H_k(T_j(A_j)) \le H_k(\varphi(A_j)) \le \alpha^k H_k(T_j(A_j))$$

und aus Bemerkung 7.3 zudem $H_k(T_j(A_j)) = \det |T_j|\, H_k(A_j)$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha^{-2k} H_k(\varphi(A_j)) \quad &\le \quad \alpha^{-k} \det |T_j|\, H_k(A_j) \le \int_{A_j} \det |\varphi'(x)|\, dH_k(x) \\ &\le \quad \alpha^k \det |T_j|\, H_k(A_j) \le \alpha^{2k} H_k(\varphi(A_j))\ . \end{aligned}$$

Wegen der Injektivität von φ ist $(\varphi(A_j))$ eine disjunkte Familie und damit

$$H_k(\varphi(A)) = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_k(\varphi(A_j)).$$

Also ergibt sich

$$\alpha^{-2k} H_k(\varphi(A)) \le \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{A_j} \det |\varphi'(x)|\, dH_k(x) = \int_A \det |\varphi'(x)|\, dH_k(x) \le \alpha^{2k} H_k(\varphi(A))$$

und damit (7.3) durch Grenzübergang $\alpha \to 1$, Multiplikation mit ω_k und $\omega_k H_k = \lambda_k$. □

Bemerkung 7.5 1. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ eine injektive Immersion. Dann gilt [50]

$$\det |\varphi'| = \sqrt{(J\varphi)^\top J\varphi} = \sqrt{(\varphi')^\top \varphi'} = |\varphi'|\ .$$

Ist M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ und $\varphi(S) \subset M$, so folgt mit (7.3)

$$m(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'|.$$

[49] etwa durch $K_n := \{s \in S : \operatorname{dist}(s, \partial S) \ge 1/n,\ |s| \le n\}$

[50] Hier ist $h \mapsto \varphi'(x)h$ mit dem Vektor $\varphi' = (\varphi_1', \dots, \varphi_d')$ identifiziert

In diesem Fall heißt $m(\varphi(I))$ auch die **Länge** von $\varphi(I)$.
2. Sind $S \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : S \to \mathbb{R}^d$ eine injektive Immersion, so gilt [51]

$$(J\varphi)^\top J\varphi = \begin{pmatrix} |\partial_1\varphi|^2 & \partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi \\ \partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi & |\partial_2\varphi|^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det|\varphi'| = \det|J\varphi| = \sqrt{\det((J\varphi)^\top J\varphi)} = \left(|\partial_1\varphi|^2 \cdot |\partial_2\varphi|^2 - (\partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi)^2\right)^{1/2}.$$

Beispiel 7.6 1. Sind $I = (-\pi, \pi)$ und $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, so ist φ eine injektive Immersion mit $\varphi(I) = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$. Nach Bemerkung 7.5 ist

$$m(\mathbb{S}^1) = m(\varphi(I)) = \int_{(-\pi,\pi)} (\cos^2 + \sin^2)^{1/2} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi.$$

2. Es seien $S = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$ und $\varphi : S \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \sin t \\ \sin s \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \big((s,t) \in S\big).$$

Dann ist $\varphi : S \to \mathbb{S}^2$ eine injektive Immersion (vgl. Beispiel 6.5). Hier sind

$$\partial_1\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s \sin t \\ \cos s \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \cos t \\ \sin s \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

also $|\partial_1\varphi(s,t)|^2 = \sin^2 t$, $|\partial_2\varphi(s,t)|^2 = 1$ und $\partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi = 0$. Wegen $\sin t > 0$ für $t \in (0, \pi)$ gilt nach Bemerkung 7.5

$$\det|J\varphi|(s,t) = \sin t\,.$$

Also folgt mit (7.3) und dem Satz von Fubini [52]

$$m(\varphi(S)) = \int_S \det|J\varphi| = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt \, ds = 4\pi.$$

Da das Oberflächenmaß eines Meridians verschwindet, gilt auch $m(\mathbb{S}^2) = 0$.

Bemerkung 7.7 1. (mehrdimensionale Substitutionsregel) Sind $k = d$ und $\varphi : S \to \varphi(S)$ ein Diffeomorphismus, so ist

$$\det|\varphi'| = |\det\varphi'|$$

[51] Wir schreiben im Weiteren oft kurz $x \cdot y := x^\top y$ für $x, y \in \mathbb{K}^d$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist dies das kanonische Skalarprodunkt von $x, y \in \mathbb{R}^d$.

[52] siehe A.7 und mehr etwa in Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini

und nach (7.2) sowie Satz 7.4 eine Funktion $f : \varphi(S) \to \mathbb{C}$ genau dann integrierbar auf $\varphi(S)$, wenn $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ integrierbar auf S ist, und in diesem Fall gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(S)} f = \int_S (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|.$$

2. (Gramsche Determinate für Graph) Es seien $S \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $g \in C^1(S, \mathbb{R})$ und $\varphi : S \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $\varphi(s) := \big(s, g(s)\big)$. Dann gilt

$$J\varphi = \begin{pmatrix} I_{d-1} \\ (\nabla g)^\top \end{pmatrix},$$

also

$$(J\varphi)^\top J\varphi = (I_{d-1}, \nabla g)\begin{pmatrix} I_{d-1} \\ (\nabla g)^\top \end{pmatrix} = I_{d-1} + \nabla g \cdot (\nabla g)^\top .$$

Aus $\det(I_m + ab^\top) = 1 + a^\top b$ für $a, b \in \mathbb{R}^m$ [53] folgt

$$\det|\varphi'| = \det|J\varphi| = \big(\det((J\varphi)^\top J\varphi)\big)^{1/2} = (1 + |\nabla g|^2)^{1/2}\ .$$

Wir kommen nun zum Gaußschen Integralsatz, der zeigen wird, dass Integrale über orientierbar berandete kompakte Mengen durch geeignete Randintegrale ersetzt werden können. Für orientierbar berandete $A \subset \mathbb{R}^d$ sei im Weiteren $m = m_{\partial A}$ stets das Oberflächenmaß auf ∂A. Wir beweisen zunächst eine lokale Version des Integralsatzes.
Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{K}^p)$, so schreiben wir $\operatorname{supp}(f)$ für den **Träger** von f, also den Abschluss der Menge $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ in Ω. Außerdem schreiben wir $C_c(\Omega)$ für die Menge aller $f \in C(\Omega)$ mit kompaktem Träger und $C_c^1(\Omega) := C^1(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Satz 7.8 *Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ orientierbar berandet und $U = V \times I$ so, dass $U \cap \partial A$ Graph einer Funktion $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ ist mit $A \cap U = \{(s, y) : y \leq g(s)\}$ oder $A \cap U = \{(s, y) : y \geq g(s)\}$.*[54] *Dann gilt für alle $f \in C_c^1(U)$* [55]

$$\int_{U \cap A} \nabla f = \int_{U \cap \partial A} f\mathbf{n}\, dm\ .$$

Beweis. Zunächst ist $\varphi : V \to \partial A$ mit $\varphi(s) := (s, g(s))$ eine injektive Immersion mit $\varphi(V) = U \cap \partial A$. Ohne Einschränkung sei $A \cap U = \{(s, y) : y \leq g(s)\}$. Dann gilt nach (7.4), Bemerkung 7.7.2 und Bemerkung 6.18 mit $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$

$$\int_{U \cap \partial A} f n_k\, dm = \int_V ((f n_k) \circ \varphi) \det|\varphi'| = \begin{cases} -\int_V f(s, g(s))\partial_k g(s)\, ds, & \text{falls } k < d \\ \int_V f\big(s, g(s)\big)\, ds, & \text{falls } k = d \end{cases}.$$

[53] siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_determinant_lemma
[54] gemäß Bemerkung 6.18 existiert stets eine solche Umgebung U
[55] Integrale über $\mathbb{K}^d$-wertige Funktionen sind jeweils komponentenweise definiert.

1. Fall: $k \in \{1, \ldots, d-1\}$. Wir setzen $\alpha := \inf I$ und definieren $F : U \to \mathbb{C}$ durch [56]

$$F(s, y) = \int_\alpha^y f(s, t)\, dt \qquad (s \in V, y \in I).$$

Dann folgt aus dem Hauptsatz über Integralfunktionen

$$\partial_d F(s, y)\big(= \frac{\partial F}{\partial y}(s, y)\big) = f(s, y)$$

und mit Differenziation von Parameterintegralen [57]

$$\partial_k F(s, y)\big(= \frac{\partial F}{\partial s_k}(s, y)\big) = \int_\alpha^y \partial_k f(s, t)\, dt.$$

Definiert man $h : V \to \mathbb{C}$ durch

$$h(s) := \int_\alpha^{g(s)} f(s, t)\, dt \ = F(s, g(s)) \qquad (s \in V)\,,$$

so hat auch $h \in C^1(V)$ kompakten Träger. Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ergibt sich ([Ü])

$$\int_V \partial_k h = 0.$$

Weiter folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} \partial_k h(s) &= \partial_k (F \circ \varphi)(s) = (\nabla F(\varphi(s))^\top \partial_k \varphi(s) = \partial_k F\big(s, g(s)\big) + \partial_d F\big(s, g(s)\big) \cdot \partial_k g(s) \\ &= \int_\alpha^{g(s)} \partial_k f(s, t)\, dt + f\big(s, g(s)\big)\, \partial_k g(s). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{U \cap A} \partial_k f &= \int_V \int_\alpha^{g(s)} \partial_k f(s, t)\, dt\, ds = \int_V \partial_k h(s)\, ds - \int_V f\big(s, g(s)\big)\, \partial_k g(s)\, ds \\ &= \int_{U \cap \partial A} f n_k\, dm\,. \end{aligned}$$

2. Fall: $k = d$. Da für jedes $s \in V$ die Funktion $y \mapsto f(s, y)$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von I verschwindet, folgt aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_\alpha^{g(s)} \partial_d f(s, t)\, dt = f(s, t)\big|_{t=\alpha}^{g(s)} = f\big(s, g(s)\big).$$

Also folgt wieder mit dem Satz von Fubini

$$\int_{A \cap U} \partial_d f = \int_V \int_\alpha^{g(s)} \partial_d f(s, t)\, dt\, ds = \int_V f\big(s, g(s)\big)\, ds = \int_{U \cap \partial A} f n_d\, dm$$

und damit die Behauptung auch im Fall $k = d$. □

[56] Man beachte: Da $f \in C_c^1(U)$ ist, also $f = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U = V \times I$ verschwindet, ist das Integral nicht uneigentlich.

[57] siehe etwa https://www.math.uni-trier.de//~mueller/EinfMathe/Analysis_SoS2021.pdf, Satz 3.22.

Bemerkung und Definition 7.9 Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und es sei $(U_\iota)_{\iota \in J}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert aufgrund der Überdeckungskompaktheit von M eine endliche Menge $E \subset J$ so, dass $\bigcup_{\iota \in E} M \cap U_\iota = M$. Weiter existiert eine der Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in E}$ untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_\iota)_{\iota \in E}$ der Eins auf M, d. h. eine Familie von Funktionen $\tau_\iota \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ mit folgenden Eigenschaften:[58]

- Für jedes ι ist $0 \le \tau_\iota \le 1$ und $\operatorname{supp} \tau_\iota \subset U_\iota$ kompakt.
- $\sum\limits_{\iota \in E} \tau_\iota|_M = 1$.

Es sei nun $M \subset \mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit und $(\varphi_\iota)_{\iota \in E}$ eine endliche Familie lokaler Parametrisierungen $\varphi_\iota : V_\iota \to M$ mit $\varphi_\iota(V_\iota) = M \cap U_\iota$ und $\bigcup_{\iota \in E} M \cap U_\iota = M$, wobei die $U_\iota \subset \mathbb{R}^d$ offen sind.[59] Wir wählen eine der Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in E}$ von M untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_\iota)_{\iota \in E}$ der Eins. Ist f integierbar bzgl. $m = m_M$, so gilt nach (7.4)

$$\int_M f\, dm = \sum_{\iota \in E} \int_{M \cap U_\iota} f \tau_\iota \, dm = \sum_{\iota \in E} \int_{V_\iota} ((f\tau_\iota) \circ \varphi_\iota) \det |\varphi_\iota'| \,. \tag{7.9}$$

Definition 7.10 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^d)$, so nennt man

$$\operatorname{div} F := \sum_{k=1}^d \partial_k F_k$$

Divergenz von F.

Satz 7.11 (Gaußscher Integralsatz)
Es seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und orientierbar berandet sowie $\Omega \supset A$ offen. Dann gilt

$$\int_A \nabla f = \int_{\partial A} f \mathbf{n}\, dm \qquad (f \in C^1(\Omega))$$

und

$$\int_A \operatorname{div} F = \int_{\partial A} F \cdot \mathbf{n}\, dm \qquad (F \in C^1(\Omega, \mathbb{K}^d)).$$

Beweis. 1. Es sei $x \in \partial A$. Dann existieren nach Bemerkung 6.3 eine Permutation der Variablen sowie offene Mengen V_x, I_x und $g_x \in C^1(V_x, \mathbb{R})$ wie in Bemerkung 6.18. Wir setzen $U_x := V_x \times I_x$. Ist $x \in A^\circ$, so setzen wir $U_x := x + (-\varepsilon, \varepsilon)^d$, wobei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_x \subset A^\circ$. Ist $h \in C_c^1(U_x)$, so gilt im ersten Fall nach Satz 7.8 und im zweiten nach [Ü]

$$\int_{A \cap U_x} \nabla h = \begin{cases} \int_{U_x \cap \partial A} h \mathbf{n}\, dm, & \text{falls } x \in \partial A \\ \int_{U_x} \nabla h = 0, & \text{falls } x \in A^\circ \end{cases}.$$

[58] Siehe etwa https://de.wikipedia.org/wiki/Zerlegung_der_Eins. Einen Beweis der Existenz findet man zum Beispiel in J. Pöschl, Noch mehr Analysis, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015, Abschnitt 2.2.

[59] eine solche existiert aufgrund der Überdeckungskompaktheit und der Tatsache, dass relativ offene Mengen in M von der Form $M \cap U$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ sind

Nach Definition ist $(U_x)_{x\in A}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existiert eine endliche Menge $E \subset A$ so, dass $A \subset \bigcup_{x\in E} U_x$. Wir wählen eine der Überdeckung $(U_x)_{x\in E}$ untergeordnete, glatte Zerlegung $(\tau_x)_{x\in E}$ der Eins auf A. Da $f\tau_x|_{U_x} \in C_c^1(U_x)$ gilt, ergibt sich

$$\int_{A\cap U_x} \nabla(f\tau_x) = \begin{cases} \int_{U_x\cap\partial A} f\tau_x \mathbf{n}\, dm, & \text{falls } x \in E\cap\partial A \\ 0, & \text{falls } x\in E\cap A^\circ \end{cases} .$$

Nach (7.9), angewandt auf $\partial_k f$ für $k=1,\dots,d$, erhalten wir wegen $\sum\limits_{x\in E} \tau_x|_A = 1$

$$\int_{\partial A} f\mathbf{n}\, dm = \sum_{x\in E\cap\partial A} \int_{U_x\cap\partial A} f\tau_x \mathbf{n}\, dm = \sum_{x\in E} \int_{A\cap U_x} \nabla(f\tau_x) = \int_A \nabla f.$$

2. Nach 1. gilt

$$\int_A \mathrm{div} F = \sum_{k=1}^d \int_A \partial_k F_k = \sum_{k=1}^d \int_{\partial A} F_k n_k\, dm = \int_{\partial A} (F\cdot\mathbf{n})\, dm.$$

□

Bemerkung 7.12 1. Im Falle $d=1$ und $A=[a,b]$ ergibt sich wegen $\mathbf{n}(b)=1$ und $\mathbf{n}(a)=-1$ für offene Obermengen Ω von A

$$\int_a^b f' = f(b)-f(a) \qquad (f\in C^1(\Omega)).$$

Also erhalten wir die Aussage des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.
2. Ist $A\subset\mathbb{R}^d$ kompakt und orientierbar berandet, so gilt mit $\mathrm{div}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} = d$ nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial A} x\cdot\mathbf{n}(x)\, dm(x) = \int_A \mathrm{div}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} = d\cdot\lambda(A)\ .$$

Im Falle $A=\mathbb{B}_d := B_1(0)$ ergibt sich $\partial A = \mathbb{S}^{d-1}$ und $\mathbf{n}(x)=x$ für $x\in\mathbb{S}^{d-1}$, also $x\cdot\mathbf{n}(x)=1$ für $x\in\mathbb{S}^{d-1}$, und damit

$$m(\mathbb{S}^{d-1}) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} 1\, dm(x) = d\cdot\lambda(\mathbb{B}_d)\,.$$

Definition 7.13 Für $u\in C^2(\Omega)$ nennt man den linearen Operator $\Delta: C^2(\Omega)\to C(\Omega)$, definiert durch

$$\Delta u := \sum_{k=1}^d \partial_k^2 u = \mathrm{div}(\nabla u) \qquad (u\in C^2(\Omega)),$$

den **Laplace-Operator** auf Ω. Damit heißt u **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ auf Ω ist. Weiter schreiben wir $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u\cdot\mathbf{n}$ für die Richtungsableitung von u in Richtung $\mathbf{n}$.

Satz 7.14 (Greensche Formeln)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und orientierbar berandet. Sind $u, v \in C^2(\Omega)$ auf einer offenen Obermenge Ω von A, so gilt

$$\int_A v\Delta u + \int_A \nabla v \cdot \nabla u = \int_{\partial A} v\, \partial_{\mathbf{n}} u \, dm$$

und

$$\int_A (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial A} (v\, \partial_{\mathbf{n}} u - u\, \partial_{\mathbf{n}} v)\, dm.$$

Beweis. Die erste Gleichung ergibt sich wegen

$$\operatorname{div}(v\nabla u) = \sum_{k=1}^{d} \partial_k (v \partial_k u) = \sum_{k=1}^{d} \big((\partial_k v)(\partial_k u) + v\partial_k^2 u\big) = \nabla v \cdot \nabla u + v \cdot \Delta u$$

aus dem Gaußschen Integralsatz, angewandt auf $F := v\nabla u \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^d)$. Die zweite Gleichung ergibt sich aus der ersten durch Differenzbildung. □

Bemerkung 7.15 Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und orientierbar berandet und ist u harmonisch auf einer offenen Obermenge von A, so folgt mit $v = 1$ aus der ersten Greenschen Formel

$$\int_{\partial A} \partial_{\mathbf{n}} u \, dm = 0.$$

A Maße und Integrale

Wir stellen einige Grundbegriffe und Ergebnisse der Maßtheorie zusammen, die in entsprechenden Einführungen zu finden sind. Für $x \in [0, \infty]$ sei dabei $\infty + x = \infty$ und für Familien $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in $[0, \infty]$ zudem

$$\sum_{\iota \in I} x_\iota := \sup_{F \subset I \text{ endlich}} \sum_{\iota \in F} x_\iota.$$

Definition A.1 Es sei $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge.
1. Ist $\Sigma \subset \operatorname{Pot}(\Omega)$, so heißt Σ eine **σ-Algebra** (in Ω), falls gilt

(σ1) $\varnothing \in \Sigma$.

(σ2) Mit $A \in \Sigma$ ist auch $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(σ3) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n \in N}$ eine Familie in Σ, so ist $\bigcup_{n \in N} A_n \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) nennt man einen **Messraum**.
2. Ist Σ eine σ-Algebra, so heißt eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ **Maß** (auf Σ), falls

(M1) $\mu(\varnothing) = 0$.

(M2) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n \in N}$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen in Σ, so ist

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in N} A_n\Big) = \sum_{n \in N} \mu(A_n).$$

In diesem Fall nennt man (Ω, Σ, μ) einen **Maßraum**.

Bemerkung und Definition A.2 Ist (X, d_X) ein metrischer Raum, so heißt die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, die **Borel-σ-Algebra** bezüglich (X, d_X). Wir schreiben dafür $\mathscr{B}(X, d_X)$ oder kurz $\mathscr{B}(X)$. Ist speziell $(X, d_X) = (\mathbb{R}^d, d_{|\cdot|})$, so existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_d$ auf $\mathscr{B}_d := \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lambda\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$$

für alle Rechtecke $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$. Man nennt λ_d das d-dimensionale **Lebesgue-Maß**. Man sieht leicht, dass λ_d translationsivariant ist, d. h.

$$\lambda_d(A + b) = \lambda_d(A) \qquad (A \in \mathscr{B}_d).$$

Weiter kann man zeigen: Jedes translationsinvariante Maß auf $\mathscr{B}_d$, das auf kompakten Mengen endlich ist, stimmt bis auf Skalierung mit dem d-dimensionalen Lebesgue-Maß λ_d überein. Für uns ist insbesondere wichtig, wie sich das Lebesgue-Maß einer Menge unter linearen Abbildungen ändert: Ist $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, so ist $T(A) \in \mathscr{B}_d$ für jede Menge $A \in \mathscr{B}_d$ und es gilt[60]

$$\lambda_d(T(A)) = |\det T|\lambda_d(A).$$

Insbesondere ist λ_d bewegungsinvariant. Außerdem gilt

$$\lambda_d(rA) = r^d\lambda_d(A) \quad (A \in \mathscr{B}_d,\, r \geq 0).$$

Bemerkung und Definition A.3 Es seien $\Omega \neq \varnothing$ eine Menge und $\mu^* : \mathrm{Pot}(\Omega) \to [0, \infty]$. Dann heißt μ^* **äußeres Maß**, falls

(a1) $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(a2) Ist N abzählbar und $(A_n)_{n\in N}$ eine Familie in $\mathrm{Pot}(\Omega)$, so ist

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) \leq \sum_{n\in N} \mu^*(A_n)$$

(a3) Sind $A, B \subset \Omega$ mit $A \subset B$, so ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sind d_Ω eine Metrik auf Ω und μ^* ein äußeres Maß, so heißt μ^* **metrisch**, falls für alle $A, B \subset \Omega$ mit $\mathrm{dist}(A, B) > 0$

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

gilt. Man kann damit zeigen: Ist μ^* ein metrisches äußeres Maß, so ist $\mu = \mu^*|_{\mathscr{B}(\Omega)}$ ein Maß.[61]

Bemerkung und Definition A.4 Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so heißt f **messbar**, falls $f^{-1}(U) \in \Sigma$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ gilt. Weiter heißt f **einfach** (bzw. **Elementarfunktion**), falls f messbar und $f(\Omega)$ endlich ist. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, so existiert eine Folge (φ_n) einfacher Funktionen mit $\varphi_n \to f$ punktweise auf Ω und $|\varphi_n| \leq |f|$.

Bemerkung und Definition A.5 Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.
1. Ist φ einfach mit $\varphi \geq 0$ oder $\mu(\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) < \infty$, so setzen wir mit $0 \cdot \infty := 0$

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{\alpha\in\varphi(\Omega)} \alpha \cdot \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\})) \begin{cases} \in [0, \infty], & \text{falls } \varphi \geq 0 \\ \in \mathbb{C}, & \text{falls } \mu(\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) < \infty \end{cases} .$$

2. Ist g messbar und $g \geq 0$, so setzen wir

$$\int g \, d\mu := \sup \Big\{ \int \varphi \, d\mu : \varphi \text{ einfach}, 0 \leq \varphi \leq f \Big\} \in [0, \infty] \, .$$

[60] einen Bewies findet man etwa in J. Elstodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer, Berlin, 2011, Kapitel III, Satz 2.5. und in J. Wengenroth, Wahrscheinlichkeitstheorie, de Gruyter, Berlin, 2008.

[61] siehe etwa in J. Elstodt, Maß- und Integrationstheorie, Springer, Berlin, 2011, Kapitel II, Satz 9.3.

3. Ist f messbar, so heißt f **integrierbar** (bzgl. μ), falls $\int |f|\, d\mu < \infty$ gilt. Wir setzen

$$\mathscr{L}(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ integrierbar}\}.$$

Damit ist durch

$$\int f\, d\mu := \int f(\omega)\, d\mu(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, d\mu \in \mathbb{C}\,,$$

wobei (φ_n) eine beliebige Folge wie in Bemerkung und Definition A.4 ist, eine lineare Abbildung $\mathscr{L}(\mu) \ni f \mapsto \int f\, d\mu \to \mathbb{C}$ (wohl-)definiert mit $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$ falls $f \leq g$ und

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Man nennt $\int f\, d\mu$ das μ-**Integral** von f.
4. Ist $M \in \Sigma$, so ist mit f auch $1_M f \in \mathscr{L}(\mu)$. Man schreibt dann auch

$$\int_M f\, d\mu := \int f 1_M\, d\mu\,.$$

Die Schreibweise verwendet man auch im Fall messbarer Funktionen $f \geq 0$.

Bemerkung A.6 Ist μ ein Maß auf Σ und ist $M \in \Sigma$, so ist

$$\Sigma_M := \{A \in \Sigma : A \subset M\}$$

eine σ-Algebra und durch

$$\mu_M(A) := \mu(A) \quad (A \in \Sigma_M)$$

ein Maß auf Σ_M definiert, genannt das **Spurmaß** von μ auf M. Im Falle $\mu = \lambda_d$ und $M \in \mathscr{B}_d$ setzen wir $\mathscr{L}(M) := \mathscr{L}(\lambda_M)$. Für $f \in \mathscr{L}(M)$ sagen wir kurz f sein integrierbar auf M und schreiben dann

$$\int_M f(x)\, dx := \int_M f := \int f\, d\lambda_M = \int_M f_0\, d\lambda\,,$$

wobei f_0 die durch 0 auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzte Funktion bezeichnet, und für $M = \mathbb{R}^d$ noch kürzer

$$\int f := \int f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^d} f\ .$$

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktionen, so gilt damit

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Bemerkung A.7 (Satz von Fubini für Lebesgue-Maße) Sind $d, k \in \mathbb{N}$ mit $d > k$ und $A \in \mathscr{B}_k$, $B \in \mathscr{B}_{k-d}$, so gilt für $f \in \mathscr{L}(A \times B)$

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d(x,y) = \int_B \int_A f(x,y)\, dx\, dy = \int_A \int_B f(x,y)\, dy\, dx\,.$$

Index

σ-Algebra, 63
p-dimensionale Hausdorff-Maß, 53
p-dimensionale äußere Hausdorff-Maß, 53
äußeren Einheitsnormalenvektor, 52
äußeres Einheitsnormalenfeld, 52
äußeres Maß, 64

asymptotisch stabil, 43
attraktiv, 43
Einschränkung, 15
Fortsetzung, 15
lokal eindeutig lösbar, 15
maximal, 15
stabil, 43

Abschluss, 13
Abstand, 13
Anfangsbedingung, 4
Anfangswertproblem, 4, 9
Atlas, 50
autonom, 6
autonome Systeme, 41

Bessel-Funktion, 39
Bessel-Funktion zweiter Gattung, 40
Bessel-Gleichung, 39
Borel-σ-Algebra, 63

charakteristisches Polynom, 35

Diffeomorphismus, 48
Divergenz, 60

echt, 15
einfach, 64
Einheitssphäre, 46
Elementarfunktion, 64
endliche Entweichzeit, 7

Fundamentalmatrix, 23
Fundamentalsystem, 23, 33

glatte Einbettung, 47
gleichgradig Lipschitz-stetig, 10
global eindeutig lösbar, 15
Gramsche Determinante, 54

harmonisch, 61
harmonischer Oszillator, 9
Homöomorphismus, 47
homogen, 21
homogenen Gleichung, 4
Hyperfläche, 46

Immersion, 47
Innere, 13
Integral, 65
integrierbar, 65

Jordan-Matrix, 28

Karte, 49

Länge, 57
Laplace-Operator, 61
Lebesgue-Maß, 63
Lemma von Gronwall, 19
lineare Differenzialgleichung, 21
lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung, 32
lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, 35
lineare Differenzialgleichung (1. Ordnung), 4
lineares System, 21
lineares System mit konstanten Koeffizienten, 25
Lipschitz-stetig, 10
logistische Gleichung, 7
lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Variablen, 10
lokale Parametrisierung, 49
Lorenz-System, 44

Mannigfaltigkeit, 46
maximales Lösungsintervall, 15

Maß, 63
Maßraum, 63
messbar, 64
Messraum, 63
metrisch, 64
Minkowski-Summe, 13

Normalenvektoren, 51

Oberflächenmaß, 54
orientierbar berandet, 51

Rand, 13
Resonanzfall, 34

separierbaren Differenzialgleichung, 6
skalaren Differenzialgleichung, 3
Spurmaß, 65
stationär, 42
stationäre, 6
stationäre Punkte, 42

Tangentialraum, 50
Tangentialvektor, 50
Torus, 47
Träger, 58
triviale, 6

Untermannigfaltigkeit, 46

Verzweigungspunkt, 8

Wronski-Determinante, 23, 33