Jürgen Müller

Dynamische Systeme

Skriptum zur Vorlesung
Sommersemester 2016

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Dank an Elke Gawronski für die Mithilfe bei der Erstellung

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Beispiel 1.1 (kontinuierlich)
Für $\lambda \in \mathbb{K}$ betrachten wir das Anfangswertproblem (AWP)

$$x'(t) = \lambda x(t), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{K}.$$

Bekanntlich hat das AWP genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$, nämlich

$$\varphi(t) = \varphi(t, x_0) = x_0 e^{\lambda t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Setzt man für $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_t(x) := \varphi(t, x) = x e^{\lambda t} \qquad (x \in \mathbb{K}),$$

so gilt offenbar für $x \in \mathbb{K}, t, s \in \mathbb{R}$

$$\phi_0(x) = x$$

und

$$\phi_{t+s}(x) = x e^{\lambda t} e^{\lambda s} = \phi_t\big(\phi_s(x)\big),$$

d. h.

$$\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}} \qquad \text{und} \qquad \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Aus

$$\mathrm{id}_{\mathbb{K}} = \phi_0 = \phi_{t-t} = \phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t\,,$$

folgt zudem

$$\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}\,.$$

Also ist $\phi_t : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ein Homöomorphismus.

Beispiel 1.2 (diskret)
Oft sind Folgen rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \phi(x_n)\,,$$

wobei $\phi : X \to X$ ($X \neq \emptyset$ eine Menge) und x_0 ein „Startwert" ist. So ist etwa im Falle des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ (mit $f'(x) \neq 0$)

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

mit

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (x \in \mathbb{K})\,.$$

Definiert man für $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n := \phi^n := \underbrace{\phi \circ \ldots \circ \phi}_{n-mal}$$

und $\phi_0 = \mathrm{id}_X$, so ergibt sich wieder für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\phi_{n+m} = \phi^{n+m} = \phi^n \circ \phi^m = \phi_n \circ \phi_m\,.$$

Allgemein werden dynamische Systeme über eine entsprechende Eigenschaft definiert:

Definition 1.3 Es seien $T \subset \mathbb{R}$ ein additives Monoid (tatsächlich betrachten wir stets $T \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\}$) und (X, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $(\phi_t)_{t \in T}$ eine Familie stetiger Funktionen $\phi_t : X \to X$. Dann heißt $\Phi := (\phi_t)_{t \in T}$ ein **dynamisches System** (dS) (auf X), falls

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \qquad (s, t \in T) \tag{1.1}$$

(sogenannte Kozyklus-Eigenschaft) und

$$\phi_0 = \mathrm{id}_X \,.$$

Im Falle $T \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ spricht man von einem **(zeit-)diskreten** dS und im Falle $T \in \{\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\}$ von einem **kontinuierlichen** dS.

Bemerkung 1.4 1. Ist $T \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$, so erhalten wir aus D.1.3

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0 = \mathrm{id}_X.$$

Damit ist ϕ_t für alle t ein Homöomorphismus auf X.
2. Ist $T = \mathbb{N}_0$, so ergibt sich aus (1.1) induktiv $\phi_n = \phi_1^n = \phi^n$ mit $\phi := \phi_1$, wobei

$$\phi^n := \underbrace{\phi \circ \ldots \circ \phi}_{n-mal}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $\phi^0 := \mathrm{id}_X$. Da $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in diesem Falle vollständig durch $\phi = \phi_1$ (die sogenannte Zeitpunkt-1-Funktion) beschrieben ist, spricht man auch kurz vom dynamischen System $\phi = (\phi, X)$. Jede stetige Selbstabbidung $\phi : X \to X$ definiert umgekehrt vermittels $\phi_n := \phi^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ ein dS mit $T = \mathbb{N}_0$.
Ist ϕ ein Homöomorphismus, so kann man auch das zweiseitige diskrete System $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\phi_{-n} := (\phi^{-1})^n$ $(n \in \mathbb{N})$ betrachten.

Definition 1.5 Es sei $(\phi_t)_{t \in T}$ ein dS auf X, und es sei $x \in X$. Dann heißt

1. $\gamma(x) := \{\phi_t(x) : t \in T\}$ **Orbit** von x.
2. $\gamma^+(x) := \{\phi_t(x) : t \in T, t \geq 0\}$ **Vorwärtsorbit** von x.
3. $\gamma^-(x) := \{\phi_t(x) : t \in T, t \leq 0\}$ **Rückwärtsorbit** von x (in Falle $T \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$).
4. x **Gleichgewichtspunkt** (GGP), falls $\gamma(x) = \{x\}$ gilt (d. h. $\phi_t(x) \equiv x$).
5. x **periodischer Punkt**, falls $0 < s_0 := \inf\{0 < s \in T : \phi_s(x) = x\} < \infty$ gilt. Jedes $s > 0$ mit $\phi_s(x) = x$ heißt dann eine **Periode** von x.

Bemerkung 1.6 1. Ist x periodischer Punkt von $(\phi_t)_{t\in T}$ mit Periode s, so gilt mit (1.1) für alle $y = \phi_t(x) \in \gamma(x)$

$$\phi_s(y) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_t\big(\phi_s(x)\big) = \phi_t(x) = y.$$

Also ist jedes $y \in \gamma(x)$ ebenfalls periodisch mit Periode s. Daher spricht man dann auch von einem periodischen Orbit und von einer Periode des Orbits.
2. Ist $\phi : X \to X$ und ist x ein Fixpunkt von ϕ, so ist x ein periodischer Punkt mit Periode 1 des diskreten dS (ϕ, X). Außerdem ist x dann auch ein GGP des Systems.

Beispiele 1.7 1. Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\phi_t(z) = ze^{\lambda t}$ $(t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C})$ (siehe B.1.1). Dann ist $z = 0$ ein GGP von $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Außerdem ist im Falle $\lambda = i\alpha \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jeder Punkt $z \neq 0$ periodisch mit Periode $2\pi/\alpha$ und (periodischem) Orbit $\gamma(z) = |z|\mathbb{S}$, wobei

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

2. Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\phi(z) = az$ $(z \in \mathbb{C})$. Dann ist $z = 0$ Fixpunkt von ϕ, also periodisch mit Periode 1 und ein GGP des diskreten Systems $(\phi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ist a eine k-te Einheitswurzel, d. h. $a^k = 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist jedes z periodisch mit Periode k.

Wir werden uns in dieser Vorlesung insbesondere mit der Frage des Langzeitverhaltens eines dS befassen, d. h. mit der Frage, wie sich ϕ_t für $t \to \infty$ (oder auch $t \to -\infty$) verhält.

Definition 1.8 Es sei $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X, und es sei $p \in X$ ein GGP. Dann heißt p **stabil**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $\gamma^+(x) \subset U_\varepsilon(p)$ für alle $x \in U_\delta(p)$. Andernfalls heißt p **instabil**. Wir setzen

$$W^s(p) := \{x \in X : \phi_t(x) \to p \ (t \to \infty)\}$$

(**stabile Menge** oder **Attraktionsbereich** von p). Damit heißt p **attraktiv** (bzw. **anziehend**), falls $W^s(p)$ eine Umgebung von p ist, d. h. falls ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subset W^s(p)$ existiert. Schließlich heißt p **asymptotisch stabil**, falls p stabil und attraktiv ist.
Im zweiseitigen Fall $T \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ setzen wir auch

$$W^u(p) := \{x \in X : \phi_t(x) \to p \ (t \to -\infty)\}$$

(**instabile Menge** von p).

Beispiel 1.9 Es sei wieder $\phi_t(z) = ze^{\lambda t}$ $(t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C})$. Im Falle $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ist der GGP $p = 0$ asymptotisch stabil mit $W^s(p) = \mathbb{C}$, im Falle $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ ist er instabil mit $W^u(p) = \mathbb{C}$ und im Falle $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ stabil, aber nicht attraktiv ([Ü]).

Eine sehr einfache hinreichende Bedingung für die Attraktivität eines Fixpunktes im diskreten und skalaren Fall $X \subset \mathbb{K}$ liefert:

Satz 1.10 *Es sei $X \subset \mathbb{K}$ und es sei $\phi : X \to X$. Ist p ein Fixpunkt von ϕ und ist ϕ differenzierbar an p mit $\left|\phi'(p)\right| < 1$, so ist p asymptotisch stabil.*

Beweis. Nach der Zerlegungsformel existiert eine Funktion $\varepsilon : X \to \mathbb{C}$ so, dass $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to p)$ und

$$\phi(x) - p = \phi(x) - \phi(p) = \phi'(p)(x-p) + \varepsilon(x)|x-p|.$$

Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\left|\varepsilon(x)\right| < (1 - |\phi'(p)|)/2$ für $|x-p| < \delta$ und deshalb gilt mit $c := (|\phi'(p)| + 1)/2$

$$|\phi(x) - p| \leq \left(\left|\phi'(p)\right| + |\varepsilon(x)|\right)|x-p| \leq c|x-p| \qquad (|x-p| < \delta).$$

Induktiv erhält man

$$|\phi^n(x) - p| \leq c^n|x-p| \qquad (n \in \mathbb{N}, |x-p| < \delta).$$

Aus $1 > c^n \to 0$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.11 Es seien

$$L(\mathbb{R}^d) := \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d : A \text{ linear}\}$$

und $||\cdot||$ die Operatornorm auf $L(\mathbb{R}^d)$ bezüglich einer (beliebigen) Norm auf $\mathbb{R}^d$. Der Beweis zu S.1.10 zeigt, dass eine entsprechende Aussage auch im Falle $X \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : X \to X$ differenzierbar mit $||(D\phi)(p)|| < 1$ gilt.

Beispiel 1.12 (logistische Abbildung)
Es sei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\phi = \phi_\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(z) := \mu z(1-z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Dann ist $\phi(p) = p$ genau dann, wenn $p = 0$ oder $p = 1 - 1/\mu$. Außerdem gilt $\phi'(z) = \mu(1-2z)$, also $\phi'(0) = \mu$ und $\phi'(1 - 1/\mu) = 2 - \mu$. Nach S.1.10 ist $p = 0$ asymptotisch stabil für $|\mu| < 1$ und $p = 1 - 1/\mu$ asyptotisch stabil für $|\mu - 2| < 1$.

Bemerkung und Definition 1.13 Es sei $\Phi = (\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X. Eine Menge $M \subset X$ heißt **invariant** (unter Φ), falls $\gamma(x) \subset M$ für alle $x \in M$. Weiter heißt M **positiv invariant** (oder auch **vorwärts invariant**), falls $\gamma^+(x) \subset M$ für alle $x \in M$. Im Fall $T = \mathbb{N}_0$ ist beides gleichbedeutend damit, dass $\phi(M) \subset M$ gilt.
Wichtig dabei: Ist M invariant, so ist $(\phi_t|_M)_{t\in T}$ ebenfalls ein dS, d. h. man kann das System auf M eingeschränkt betrachten.

Beispiel 1.14 Wir betrachten wieder die logistische Abbildung ϕ aus B.1.12. Ist $0 < \mu \leq 4$, so gilt $\phi([0,1]) \subset [0,1]$. Also ist dann auch $(\phi, [0,1])$ ein dS.
Wie man leicht sieht ([Ü]), gilt im Falle $0 < \mu \leq 1$

$$\phi^n(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

für alle $x \in [0,1]$, d.h., für den Fixpunkt $p = 0$ gilt

$$W^s(0) = [0,1].$$

Weiter kann man zeigen: Für $1 < \mu < 3$ ist

$$W^s(1 - 1/\mu) = (0,1)$$

(und $W^s(0) = \{0,1\}$).
Soweit erweist sich die Dynamik der logistischen Abbildung $(\phi, [0,1])$ als sehr übersichtlich. Die Situation wird jedoch zunehmend komplizierter, wenn man mit dem Parameter μ über 3 hinausgeht. Wir werden im folgenden Abschnitt dieses Beispiel in verschiedener Hinsicht nutzen, um allgemeine Konzepte der Theorie dynamischer Systeme zu erläutern und zu illustrieren.

Definition 1.15 Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, und es seien $\Phi = (\phi_t)_{t \in T}$ und $\Psi = (\psi_t)_{t \in T}$ dynamische Systeme auf X bzw. Y. Existiert eine stetige Abbildung $h : Y \to X$ mit dichtem Bild und mit

$$h \circ \psi_t = \phi_t \circ h \quad (t \in T), \tag{1.2}$$

so sagt man Φ sei ein (**topologischer**) **Faktor** von Ψ. Ist dabei h ein Homöomorphismus, so heißen Φ und Ψ (**topologisch**) **konjugiert**. Weiter sagt man im ersten Fall auch, Φ und Ψ seien **quasikonjugiert vermittels** h und im zweiten Fall **konjugiert vermittels** h.

Bemerkung 1.16 1. Sind (ϕ, X), (ψ, Y) diskrete dSe und gilt (1.2) nur für $t = 1$, so gilt (1.2) schon für beliebiges $t \in \mathbb{N}_0$. Wir verwenden die obigen Begriffe daher im Fall $T = \mathbb{N}_0$ auch für ϕ und ψ statt Φ und Ψ.
2. Ist Φ ein Faktor von Ψ, so überträgt sich die Dynamik in vielerlei Hinsicht von Ψ auf Φ. Ist etwa y ein periodischer Punkt von Ψ mit Periode s, so ist $x = h(y)$ ein periodischer Punkt von Φ mit Periode s (oder ein GGP).

Beispiel 1.17 Es sei $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ definiert durch $\sigma(z) = z^2$ und $\psi : [-1,1] \to [-1,1]$ durch

$$\psi(x) := 2x^2 - 1 \qquad \big(x \in [-1,1]\big).$$

Dann gilt mit $g(z) := \mathrm{Re}(z)$ $(z \in \mathbb{S})$

$$(g \circ \sigma)(z) = \mathrm{Re}\, z^2 \underset{z=x+iy}{=} x^2 - y^2 \underset{y^2=1-x^2}{=} 2x^2 - 1 = 2\,\mathrm{Re}^2 z - 1 = (\psi \circ g)(z).$$

Da $g : \mathbb{S} \to [-1,1]$ surjektiv (und natürlich stetig) ist, ist damit $(\psi, [-1,1])$ ein Faktor von $(\sigma, \mathbb{S})$.
Vermittels $h(x) := (1-x)/2$ ist weiter ψ konjugiert zur logistischen Funktion $\phi = \phi_4 : [0,1] \to [0,1]$, da

$$(h \circ \psi)(x) = \frac{1}{2}\,(1 - 2x^2 + 1) = 1 - x^2 = 4\,\frac{1-x}{2}\Big(1 - \frac{1-x}{2}\Big) = (\phi \circ h)(x).$$

Damit ist $(\phi_4, [0,1])$ ein Faktor von $(\sigma, \mathbb{S})$.

2 Transitivität, Grenzmengen und Chaos

Wir werden jetzt (einfache) Systeme untersuchen, deren Dynamik sich als überraschend kompliziert erweist.

Definition 2.1 Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, I eine beliebige nichtleere Menge und $\phi_\iota : X \to Y$ stetig ($\iota \in I$). Dann heißt die Familie $(\phi_\iota)_{\iota \in I}$ **(topologisch) transitiv**, falls für alle offenen, nichtleeren Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ ein $\iota \in I$ existiert mit

$$\phi_\iota(U) \cap V \neq \emptyset$$

(bzw. $U \cap \phi_\iota^{-1}(V) \neq \emptyset$), mit anderen Worten, falls $\bigcup\limits_{\iota \in I} \phi_\iota^{-1}(V)$ dicht in X ist für alle offenen und nichtleeren $V \subset Y$.

Eine Basis eines metrischen Raumes ist ein System $\mathcal{B}$ offener, nichtleerer Mengen so, dass jede offene, nichtleere Menge O die Vereinigung aller $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subset O$ ist. Separable metrische Räume haben eine abzählbare Basis ([Ü]). Wir verwenden im Weiteren den Satz von Baire in folgender Version ([Ü]):

> Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist für jede Folge (M_n) dichter G_δ-Mengen in X auch $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n$ dicht in X.

Satz 2.2 *(Transitivitätssatz; Grosse-Erdmann)*
Es seien (X, d_X) ein metrischer Raum und (Y, d_Y) ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis. Weiter sei $(\phi_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen von X nach Y. Ist M die Menge der $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass $\gamma(x) := \{\phi_\iota(x) : \iota \in I\}$ dicht in Y ist, so gilt

1. *M ist eine G_δ-Menge,*
2. *Ist M dicht in X, so ist $(\phi_\iota)_{\iota \in I}$ topologisch transitiv.*
3. *Ist X vollständig und $(\phi_\iota)_{\iota \in I}$ topologisch transitiv, so ist M dicht in X.*

Beweis. 1. Es sei $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von (Y, d_Y). Dann ist

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\iota \in I} \phi_\iota^{-1}(V_n) =: L.$$

(Denn: Es sei $x \in M$, also $\gamma(x)$ dicht in Y. Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $\iota \in I$ mit $\phi_\iota(x) \in V_n$, d. h. $x \in \phi_\iota^{-1}(V_n)$. Also ist $x \in L$. Ist umgekehrt $x \in L$ und ist $V \subset Y$ offen, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n \subset V$. Da $x \in \bigcup\limits_{\iota \in I} \phi_\iota^{-1}(V_n)$ gilt, existiert ein $\iota \in I$ mit $\phi_\iota(x) \in V_n (\subset V)$. Damit ist $\gamma(x) \cap V \neq \emptyset$, also $\gamma(x)$ dicht in Y.)

Da ϕ_ι stetig ist, ist $\phi_\iota^{-1}(V_n)$ offen in X ($\iota \in I$) und damit $M = L$ eine G_δ-Menge.
2. Ist M dicht, so auch $\bigcup_{\iota\in I} \phi_\iota^{-1}(V_n)$ für alle n und damit $\bigcup_{\iota\in I} \phi_\iota^{-1}(V)$ für alle offenen, nichtleeren V.
3. Nach Voraussetzung ist $\bigcup_{\iota\in I} \phi_\iota^{-1}(V_n)$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist nach dem Satz von Baire auch M dicht in X. □

Bemerkung und Definition 2.3 Es sei $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X. Dann nennen wir das das System **transitiv an** ∞, falls $(\phi_s)_{T\ni s\geq t}$ für alle $t \geq 0$ transitiv ist. Weiter heißt das System **mischend an** ∞, falls $(\phi_s)_{s\in S}$ für alle nach oben unbeschränkten $S \subset T$ transitiv ist. Nach Definition ist jedes an ∞ mischende System auch transitiv an ∞. Im Falle $T \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ nennen wir das System transitiv an $-\infty$ (bzw. mischend an $-\infty$), falls $(\phi_s)_{T\ni s\leq t}$ für alle $t \leq 0$ (bzw. $(\phi_s)_{s\in S}$ für alle nach unten unbeschränkten $S \subset T$) transitiv ist.

Beispiel 2.4 Es sei $(X, d) = (\mathbb{S}, d_{|\cdot|})$. Dann ist die Menge aller Bögen

$$B = B_{\vartheta_1,\vartheta_2} := \{e^{i\vartheta} : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\}$$

mit (rationalen) $\vartheta_1 < \vartheta_2$ eine (abzählbare) Basis von $\mathbb{S}$. Ist $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ mit

$$\sigma(z) = z^2 \qquad (z \in \mathbb{S})$$

und $\emptyset \neq U \subset \mathbb{S}$ offen, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sigma^n(U) = \mathbb{S} \qquad (n \geq N).$$

(Denn: Ist $z = e^{i\vartheta}$, so gilt $\sigma(z) = e^{2i\vartheta}$, d. h. σ bewirkt eine ,,Winkelverdopplung". Ist also $U \subset \mathbb{S}$ offen und nichtleer, so enthält U insbesondere einen Bogen B wie oben. Damit gilt $\sigma^n(B) = \{e^{i2^n\vartheta} : \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\} = \{e^{i\tau} : 2^n\vartheta_1 < \tau < 2^n\vartheta_2\}$. Ist N so, dass $2^N\vartheta_2 - 2^N\vartheta_1 > 2\pi$, so gilt

$$\mathbb{S} = \sigma^n(B) = \sigma^n(U) \qquad (n \geq N).)$$

Insbesondere ist damit $(\sigma, \mathbb{S})$ mischend an ∞, also auch transitiv an ∞.

Definition 2.5 Es seien $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X und $x \in X$. Dann heißt

$$\omega(x) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma^+\big(\phi_t(x)\big)} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{\phi_s(x) : s \geq t\}}$$

ω-Grenzmenge von x. Im Falle $T \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ heißt zudem

$$\alpha(x) := \bigcap_{t\leq 0} \overline{\gamma^-\big(\phi_t(x)\big)} = \bigcap_{t\leq 0} \overline{\{\phi_s(x) : s \leq t\}}$$

α-Grenzmenge von x.

Bemerkung 2.6 1. Die ω-Grenzmenge ist die Menge aller $y \in X$, für die eine Folge (t_k) in T mit $t_k \to \infty$ und $\phi_{t_k}(x) \to y$ $(k \to \infty)$ existiert.
2. Ist p ein GGP, so ist $\omega(x) = \{p\}$ für alle $x \in W^s(p)$. Ist $(\phi_t)_{t\in T}$ ein (Halb-)Fluss (siehe [Ü]) oder diskret und ist x periodisch, so ist $\gamma(x)$ kompakt mit $\omega(x) = \gamma(x)(= \alpha(x))$.

Satz 2.7 *Es seien $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X und $x \in X$. Dann gilt*

1. *$\omega(x)$ ist abgeschlossen und invariant.*
2. *Ist $\gamma^+(x)$ relativ kompakt in X, so ist $\omega(x) \neq \emptyset$ und kompakt, und es gilt*
$$\operatorname{dist}\bigl(\phi_t(x), \omega(x)\bigr) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Entsprechendes gilt für $\alpha(x)$ im Falle $T \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$.

Beweis. 1. Zunächst ist $\omega(x)$ abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen. Ist $\omega(x) \neq \emptyset$ und $y \in \omega(x)$, so existiert nach B.2.6.1 eine Folge (t_k) in T mit $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ und
$$\phi_{t_k}(x) \to y \qquad (k \to \infty).$$
Es sei $s \in T$ fest. Dann gilt, da ϕ_s stetig ist,
$$\phi_{t_k+s}(x) = \phi_s\bigl(\phi_{t_k}(x)\bigr) \to \phi_s(y) \qquad (k \to \infty).$$
Also ist $\phi_s(y) \in \omega(x)$ wieder nach B.2.6.1. Damit ist $\gamma(y) \subset \omega(x)$.
2. Ist (t_k) eine Folge in T mit $t_k \to \infty$, so hat die Folge $\bigl(\phi_{t_k}(x)\bigr)_k$ eine konvergente Teilfolge in X. Also ist $\omega(x) \neq \emptyset$ nach B.2.6.1. Außerdem ist $\omega(x)$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt. Beweis der Zusatzaussage: [Ü]. $\square$

Bemerkung 2.8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis, und es sei $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X. Dann ist die Menge M aller $x \in X$ mit $\omega(x) = X$ eine G_δ-Menge in X. Außerdem gilt:

1. Ist M dicht in X, so ist das dS transitiv an ∞. [1]
2. Ist X vollständig und das dS transitiv an ∞, so ist M dicht in X.

(Denn: Es sei (t_n) eine Folge in T mit $t_n \to \infty$. Dann ist $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$, wobei M_n die Menge aller $x \in X$ mit $\overline{\gamma^+(\phi_{t_n}(x))} = X$ bezeichnet. Nach dem Transitivitätssatz ist M_n eine G_δ-Menge in X, also auch M. Aus dem Transitivitätssatz folgt auch:
Ist M dicht in X, so auch alle M_n und damit ist das dS transitiv an ∞, und ist X vollständig und das dS transitiv an ∞, so ist M_n dicht für alle n und damit nach dem Satz von Baire auch M.)

[1] Da $\omega(y) = \omega(x)$ für alle $y \in \gamma(x)$ gilt, ist übrigens die Menge M schon dicht, wenn sie nichtleer ist!

Definition 2.9 Es seien X unendlich, d eine Metrik auf X und $\phi : X \to X$ stetig. Dann heißt (ϕ, X) **(Devaney-)chaotisch**, falls $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ transitiv an ∞ ist und zudem eine dichte Menge periodischer Punkte existiert.

Beispiel 2.10 Es sei wieder $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ mit

$$\sigma(z) = z^2 \qquad (z \in \mathbb{S}).$$

Dann gibt es eine dichte Menge periodischer Orbits, denn es gilt

$$\sigma^n(z) = z^{2^n} = z, \quad \text{d. h.} \quad z^{2^n-1} = 1$$

genau dann, wenn z eine (2^n-1)-te Einheitswurzel ist. Die Menge der Einheitswurzeln

$$\{z \in \mathbb{S} : z^{2^n-1} = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

ist dicht in $\mathbb{S}$. Zusammen mit B.2.4 ergibt sich, dass $(\sigma, \mathbb{S})$ chaotisch ist.

Bemerkung 2.11 Es seien Φ und Ψ dynamische Systeme auf X bzw. Y und es sei Φ ein Faktor von Ψ. Da Bilder dichter Mengen unter stetigen Abbildungen mit dichtem Bild dicht sind ([Ü]), übertragen sich sowohl Transitivität an ∞ als auch Chaotizität (im Fall $T = \mathbb{N}_0$) von Ψ auf Φ.

Beispiel 2.12 (Chaosparabel)
Es sei $\phi = \phi_4 : [0, 1] \to [0, 1]$, also

$$\phi(x) = 4x(1-x) \quad (x \in [0, 1]).$$

Da ϕ_4 ein Faktor von σ ist, ist ϕ nach B. 2.10 und B.2.11 chaotisch.

Definition 2.13 Es sei $(\phi_t)_{t\in T}$ ein dS auf X. Ist $x \in X$, so sagt man, das dS habe **sensitive Abhängigkeit vom Anfangswert** x, falls es ein $R > 0$ so gibt, dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in U_\delta(x)$ existiert mit

$$\sup_{t\geq 0} d\big(\phi_t(y), \phi_t(x)\big) \geq R$$

(im Falle eines GGP x ist dies nichts Anderes als die Instabilität).
Existiert eine Konstante $R > 0$ so, dass die Bedingung für alle $x \in X$ erfüllt ist, so sagt man, das System habe **sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten**.

Satz 2.14 *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum mit abzählbarer Basis und ist (ϕ, X) ein chaotsches dS auf X, so existiert eine Konstante $R > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in X$ und alle $\delta > 0$ gibt es ein $y \in U_\delta(x)$ mit*

$$\limsup_{n\to\infty} d\big(\phi^n(y), \phi^n(x)\big) \geq R\,.$$

Insbesondere hat (ϕ, X) sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst: Es existiert ein $R_0 > 0$ so, dass für alle $x \in X$ ein periodischer Punkt p existiert mit $\operatorname{dist}(\gamma(p), x) \geq R_0$.
Dazu seien p, q periodische Punkte mit $\gamma(p) \cap \gamma(q) = \emptyset$ (existieren, da X unendlich ist). Dann gilt

$$R_0 := \frac{1}{2}\operatorname{dist}\big((\gamma(p), \gamma(q)\big) > 0$$

und damit für alle $x \in X, n, m \in \mathbb{N}_0$

$$2R_0 \leq d\big(\phi^n(p), \phi^m(q)\big) \leq d(\phi^n(p), x) + d(\phi^m(q), x).$$

Ist also $d(\phi^m(q), x) < R_0$ für ein m, so ist $d(\phi^n(p), x) \geq R_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Wir setzen $R := R_0/4$.
Sind $x \in X$ und $\delta \in (0, R)$ gegeben, so existiert nach 1. ein periodischer Punkt p mit

$$\operatorname{dist}(\gamma(p), x) \geq 4R$$

und nach Voraussetzung ein periodischer Punkt $q \in U_\delta(x)$ (mit Periode k). Die Menge

$$V := \bigcap_{j=0}^{k} \phi^{-j}\Big(U_R\big(\phi^j(p)\big)\Big) \ \Big(= \big\{y \in X : d\big(\phi^j(y), \phi^j(p)\big) < R \quad \text{für } j = 0, \ldots, k\big\}\Big)$$

ist offen mit $p \in V$. Aus der Transitivität an ∞ folgt die Existenz eines $y \in U_\delta(x)$ und einer unendlichen Menge $M \subset \mathbb{N}$ mit $\phi^m(y) \to p$ ($m \to \infty$, $m \in M$). Ist $N \in \mathbb{N}$ gegeben, so existiert also ein $m \geq N$ mit $\phi^m(y) \in V$. Weiter wählen wir $j \in \mathbb{N}$ so, dass

$$m \leq kj \leq k + m;.$$

Wir zeigen: Es gilt

$$d\big(\phi^{kj}(q), \phi^{kj}(x)\big) > R \quad \text{oder} \quad d\big(\phi^{kj}(x), \phi^{kj}(y)\big) > R. \tag{2.1}$$

Damit ist $d(\phi^n(q), \phi^n(x)) > R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ oder $d(\phi^n(y), \phi^n(x)) > R$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Aus $q, y \in U_\delta(x)$ folgt also die Behauptung.
Zu (2.1): Aus $\phi^m(y) \in V$ und erhält man

$$d\big(\phi^{kj}(y), \phi^{kj-m}(p)\big) = d\big(\phi^{kj-m}(\phi^m(y)), \phi^{kj-m}(p)\big) < R,$$

also

$$4R \leq d\big(x, \phi^{kj-m}(p)\big) \leq \underbrace{d(x,q)}_{<\delta<R} + d\big(q, \phi^{kj}(y)\big) + \underbrace{d\big(\phi^{kj}(y), \phi^{kj-m}(p)\big)}_{<R}$$

und damit

$$2R < d\big(q, \phi^{kj}(y)\big) = d\big(\phi^{kj}(q), \phi^{kj}(y)\big).$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich die Behauptung. □

S. 2.14 zeigt insbesondere, dass der Raum X im Falle der Existenz eines chaotischen Systems keine isolierten Punkte hat.

Definition 2.15 1. Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Dann heißt X **perfekt**, falls X keine isolierten Punkte hat.
2. Eine Menge $C \subset \mathbb{R}$ heißt eine **Cantor-Menge**, falls C perfekt ist und keine inneren Punkte (in $\mathbb{R}$) hat.

Wir untersuchen jetzt die logistische Funktion ϕ für Parameter $\mu > 4$. In diesem Fall ist ϕ ist keine Selbstabbildung auf $[0, 1]$. Wir müssen den Definitionsbereich geeignet einschränken. Dazu setzen wir $I := [0, 1]$ und (mit $\phi(x) = \mu x(1 - x)$ für $x \in I$)

$$\phi^{-1}(I) = I_0 \cup I_1 ,$$

wobei I_0, I_1 disjunkte Intervalle mit $0 \in I_0, 1 \in I_1$. Weiter setzen wir für $n \in \mathbb{N}$ und $(\iota_0, \ldots, \iota_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$

$$I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}} := \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(I_{\iota_k}) \ \Big(= \big\{x \in I : \phi^k(x) \in I_{\iota_k} \ (k = 0, \ldots, n-1)\big\}\Big)$$

Ist dabei $(\iota_0, \ldots, \iota_{n-1}) \neq (\iota'_0, \ldots, \iota'_{n-1})$, so gilt

$$I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}} \cap I_{\iota'_0,\ldots,\iota'_{n-1}} = \emptyset.$$

Damit ist

$$S_n := \bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-(k+1)}(I) = \phi^{-n}(I) = \bigcup_{(\iota_0,\ldots,\iota_{n-1})\in\{0,1\}^n} I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}$$

mit 2^n paarweise disjunkten Mengen auf der rechten Seite. Mit $I_\emptyset := I$ ergibt sich

Satz 2.16 *Für $n \in \mathbb{N}$ und $(\iota_0, \ldots, \iota_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ gilt: ϕ bildet $I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}$ homöomorph auf $I_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}$ ab und $I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}$ ist ein kompaktes Intervall. Außerdem ist*

$$I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-2}} \cap S_n = I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-2},0} \cup I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-2},1} .$$

Beweis. 1. $\phi|_{[0,1/2]}$ ist streng monoton wachsend und $\phi|_{[1/2,1]}$ streng monoton fallend. Insbesondere sind $\phi|_{I_0}$ und $\phi|_{I_1}$ injektiv. Damit gilt (da $I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}} \subset I_{\iota_0}$)

$$\phi(I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}) = \phi\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(I_{\iota_k})\Big) \overset{\text{inj.}}{=} \bigcap_{k=0}^{n-1} \underbrace{\phi\big(\phi^{-k}(I_{\iota_k})\big)}_{\underset{\text{inj.}}{=} \phi^{-(k-1)}(I_{\iota_k})} = \bigcap_{k=0}^{n-2} \phi^{-k}(I_{\iota_{k+1}}) = I_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}$$

Also ist $\phi|_{I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}} : I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}} \to I_{\iota_1,\ldots,\iota_{n-1}}$ homöomorph. Da Urbilder kompakter Intervalle unter homöomorphen Abbildungen wieder kompakte Intervalle sind, ergibt sich per Induktion nach n, dass $I_{\iota_0,\ldots,\iota_{n-1}}$ ein kompaktes Intervall ist.
2. (Induktion nach n) Für $n = 1$ ist $I_\emptyset \cap S_1 = I \cap S_1 = I_0 \cup I_1$.

$n \to (n+1)$: Es sei $(\iota_0, \dots, \iota_{n-1}) \in \{0,1\}^n$. Nach Beweisschritt 1 ist

$$\phi^{-1}(I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1}}) \cap I_{\iota_0} = I_{\iota_0,\dots,\iota_{n-1}} .$$

Also folgt (da $\phi^{-1}(S_n) = S_{n+1}$)

$$\begin{aligned} I_{\iota_0,\dots,\iota_{n-1}} \cap S_{n+1} &= I_{\iota_0} \cap \phi^{-1}(I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1}} \cap S_n) \\ &\underset{\text{I.A.}}{=} I_{\iota_0} \cap \phi^{-1}\big(I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1},0} \cup I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1},1}\big) \\ &= \big(\phi^{-1}(I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1},0}) \cap I_{\iota_0}\big) \cup \big(\phi^{-1}(I_{\iota_1,\dots,\iota_{n-1},1}) \cap I_{\iota_0}\big) \\ &= I_{\iota_0,\dots,\iota_{n-1},0} \cup I_{\iota_0,\dots,\iota_{n-1},1} . \end{aligned}$$

□

Wir setzen

$$C = C_\mu := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{x \in I : \phi^n(x) \in I \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dann ist C invariant, also (ϕ, C) ein dS. Weiter gilt

Satz 2.17 *Für $\mu > 4$ ist C_μ eine Cantor-Menge.*

Beweis. 1. Wir bezeichnen mit $\lambda(J)$ die Länge eines Intervalls J. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes (angewandt auf $(\phi|_{I_0})^{-1}$ bzw. $(\phi|_{I_1})^{-1}$) kann man induktiv zeigen: Ist

$$\varrho := \min_{S_1} \big|\phi'(x)\big|,$$

so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $(\iota_0, \dots, \iota_{n-1}) \in \{0,1\}^n$

$$\lambda(I_{\iota_0,\dots,\iota_{n-1}}) \le \frac{1}{\varrho^n} \tag{2.2}$$

Weiter gilt $\varrho > 1$ genau dann, wenn $\mu > 2 + \sqrt{5}$ ist.
Denn: Es gilt $\phi'(x) = \mu(1-2x)$ $(x \in I)$. Aus Symmetriegründen und aufgrund der Konkavität von ϕ ist $\varrho = \big|\phi'(x_{1,2})\big|$, wobei $\phi(x_{1,2}) = 1$, d. h.

$$x_{1,2} = \big(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}\big)/(2\mu) .$$

Damit ist

$$\varrho = \big|\phi'(x_{1,2})\big| = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1 \Leftrightarrow \mu > 2 + \sqrt{5} .$$

2. Wir führen den Beweis des Satzes nur für $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Da S_n als endliche Vereinigung kompakter Intervalle kompakt ist, ist C kompakt. Weiter liegen nach Konstruktion alle Anfangs- und Endpunkte der Intervalle $I_{\iota_0,\ldots,\iota_n}$ in C.
Wir zeigen: C hat keine inneren Punkte und jeder Punkt ist Häufungspunkt.
Dazu sei $x \in C$ gegeben. Dann existiert eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\{0,1\}$ mit

$$\phi^k(x) \in I_{s_k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

(was äquivalent ist zu

$$x \in I_{s_0,\ldots,s_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)).$$

Nach S.2.16 ist

$$I_{s_0,\ldots,s_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{s_0,\ldots,s_{n-1},0} \cup I_{s_0,\ldots,s_{n-1},1}\,.$$

Wir wählen für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in I_{s_0,\ldots,s_{n-1}} \setminus S_{n+1}$ (in der Lücke). Dann ist $y_n \notin C$ mit $y_n \to x$ $(n \to \infty)$ nach (2.2). Also ist x kein innerer Punkt von C.
Ferner sei q_n der Endpunkt von $I_{s_0,\ldots,s_{n-1},s'_n}$, wobei $s'_n \neq s_n$. Dann gilt wieder $q_n \to x$ $(n \to \infty)$ nach (2.2), wobei $q_n \neq x$ und $q_n \in C$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit ist x Häufungspunkt von C. □

Wir wollen nun zeigen, dass die Dynamik von ϕ auf C beschrieben werden kann im Raum der $\{0,1\}$-Folgen.

Definition 2.18 Es sei A eine mindestens zweielementige, endliche Menge (A nennt man in diesem Kontext auch Alphabet). Wir setzen

$$\Sigma_A := A^{\mathbb{N}_0} := \left\{(s_k)_{k=0}^{\infty} : s_k \in A \ (k \in \mathbb{N}_0)\right\}$$

und

$$d(s,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(s_k,t_k)}{3^k} \qquad (s = (s_k), t = (t_k) \in \Sigma_A),$$

wobei δ die diskrete Metrik auf A bezeichnet.

Bemerkung 2.19 Man rechnet leicht nach, dass durch d eine Matrik auf Σ_A definiert ist[2]. Dabei gilt für $s \in \Sigma_A$

$$U_{1/3^n}(s) = \{t \in \Sigma_A : t_k = s_k \text{ für } k = 0,\ldots,n\}\,.$$

(Denn: Ist t in der rechten Seite, so gilt

$$d(t,s) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}\,.$$

Ist umgekehrt $d(t,s) < 1/3^n$, so gilt notwendig $t_k = s_k$ für $k = 0,\ldots,n$.)
Damit ergibt sich insbesondere, dass der Raum keine isolierten Punkte hat.

[2] Die 3 im Nenner kann durch ein beliebiges $q > 1$ ersetzt werden, wobei der Fall $q > 2$ den Vorteil hat, dass die offenen Kugeln mit Radius $1/q^n$ leicht zu beschreiben sind.

Definition 2.20 Die Abbildung $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ mit

$$\sigma\big((s_k)\big) := (s_{k+1})_{k=0}^{\infty} \quad \big(= (s_1, s_2, \ldots)\big) \qquad \big((s_k) \in \Sigma_A\big)$$

heißt **(Links-)Shift** auf Σ_A. Offenbar gilt dabei

$$d\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq 3d(s,t)$$

für alle $s, t \in \Sigma_A$, d.h., σ ist insbesondere (Lipschitz-)stetig auf Σ_A.

Wir schreiben im Weiteren $|M|$ für die Anzahl der Elemente einer Menge M.

Satz 2.21 *Für den Shift $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ gilt*

1. *Es existieren genau $|A|^n$ periodische Orbits mit Periode n und die Menge der periodischen Orbits ist dicht in Σ_A.*

2. *Es existiert ein $s^* \in \Sigma_A$ mit dichtem Orbit.*

Beweis. 1. Offenbar ist $p = (p_k) \in \Sigma_A$ genau dann periodisch mit Periode n, wenn gilt

$$p_{k+n} = p_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

(d. h. $p = (p_0, \ldots, p_{n-1}, p_0, \ldots, p_{n-1}, p_0, \ldots, p_{n-1}, \ldots)$).
Es seien $s = (s_k) \in \Sigma_A$ und $n \in \mathbb{N}$. Ist $p \in \Sigma_A$ mit

$$p = (s_0, \ldots, s_n, s_0, \ldots, s_n, s_0, \ldots, s_n, \ldots),$$

so ist p periodisch und $p \in U_{1/3^n}(s)$.
Damit ist die Menge der periodischen Punkte dicht.
2. Ohne Einschränkung sei $A = \{1, \ldots, q\}$. Wir betrachten die Folge $s^* \in \Sigma_A$ mit

$$s^* := \big(\underbrace{1, 2, \ldots, q}_{\text{1er Blöcke}}, \underbrace{1,1,1,2,\ldots,1,q,1,2,1,\ldots,2,q,\ldots,q,q}_{\text{2er Blöcke}}, \underbrace{1,1,1,\ldots,q,q,q}_{\text{3er Blöcke}}, \ldots\big),$$

d. h., s^* entsteht durch sukzessives Auflisten aller Blöcke der Länge $1, 2, 3, \ldots$ aus Zahlen aus $\{1, \ldots, q\}$ (das „Buch“ s^* enthält alle „Wörter“).
Ist $s = (s_k) \in \Sigma_A$, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma^{m_n}(s^*)$ in den ersten $(n+1)$ Folgegliedern mit s übereinstimmt. Also gilt

$$d\big(\sigma^{m_n}(s^*), s\big) < 1/3^n.$$

Damit ist der Orbit $\gamma(s^*)$ dicht in Σ_A. □

Bemerkung 2.22 Hat X keine isolierten Punkte, so exitstiert für ein dS (ϕ, X) schon dann eine dichte Menge von Punkten x mit $\omega(x) = X$, wenn ein dichter Orbit existiert ([Ü]). Damit ergibt sich aus B.2.8 und S.2.21, dass der Shift (σ, Σ_A) chaotisch ist.

Satz 2.23 *Es seien $\Sigma := \Sigma_{\{0,1\}}$ und $(\phi, C) = (\phi_\mu, C_\mu)$ für $\mu > 4$.*

1. *Vermittels $h : C_\mu \to \Sigma$, definiert durch*
$$h(x) := (s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$$
mit s_k so, dass $\phi^k(x) = I_{s_k}$, ist (ϕ, C) konjugiert zu (σ, Σ).

2. *(ϕ, C) ist chaotisch.*

Beweis. 1. Zunächst ist h wohldefiniert, denn zu jedem $x \in C$ existiert genau eine Folge $s = (s_k)$ mit $\phi^k(x) \in I_{s_k}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

- h ist surjektiv.

  Denn: Ist $s = (s_k) \in \Sigma$ gegeben, so ist $(I_{s_0,\ldots,s_n})_n$ eine fallende Folge nichtleerer kompakter Intervalle. Damit ist (Intervallschachtelungsprinzip)
$$I(s) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{s_0,\ldots,s_n} \neq \emptyset\,.$$
  Für $x \in C$ gilt nach Definition von h dabei
$$x \in I(s) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = s.$$

- h ist injektiv (Beweis mit (2.2), also nur für $\mu > 2 + \sqrt{5}$).

  Denn: Nach (2.2) ist $I(s) = h^{-1}(\{s\})$ einpunktig.

- Es gilt $h \circ \phi = \sigma \circ h$.

  Denn: Es seien $x \in C$, $s = (s_k) = h(x)$ und $t = (t_k) = h\big(\phi(x)\big)$. Dann ist
$$I_{s_{k+1}} \ni \phi^{k+1}(x) = \phi^k\big(\phi(x)\big) \in I_{t_k}\,,$$
  also $s_{k+1} = t_k$. Folglich ist $h\big(\phi(x)\big) = t = \sigma(s) = \sigma\big(h(x)\big)$.

- h ist stetig (also ein Homöomorphismus, da C kompakt ist).

  Denn: Es seien $x \in C$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/3^n < \varepsilon$. Ist $(s_k) = h(x)$ und
$$\delta := \min\left\{\mathrm{dist}(I_{\iota_0,\ldots,\iota_n}, I_{s_0,\ldots,s_n}) : (\iota_0, \ldots, \iota_n) \neq (s_0, \ldots, s_n)\right\},$$
  so gilt $y \in I_{s_0,\ldots,s_n}$, also $h(y) \in U_{1/3^n}(h(x)) \subset U_\varepsilon(h(x))$ für alle $y \in U_\delta(x)$.

2. Aus B.2.11 (angewandt auf h^{-1}), B.2.22 und 1. ergibt sich die Behauptung. □

3 Flüsse und Liapunov-Theorie

Bereits im Rahmen der gewöhnlichen Differenzialgleichungen haben wir uns mit Stabilitätsfragen im Zusammenhang mit autonomen Gleichungen der Form $x' = f(x)$ und entsprechenden Anfangswertproblemen beschäftigt. Wir fassen die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse noch einmal zusammen und liefern gleichzeitig einen dort nicht ausgeführten Beweis nach.

Bemerkung 3.1 (Picard-Lindelöf; siehe Differenzialgleichungen)
Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{K}^d$ lokal Lipschitz-stetig (kurz: $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{K}^d)$), d.h., zu jedem $x \in D$ existieren eine Umgebung U von x und ein $L \geq 0$ mit

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L|x_1 - x_2| \qquad (x_1, x_2 \in U). \tag{3.1}$$

In diesem Fall existiert zu jedem $K \Subset D$ eine Konstante $L = L_K \geq 0$ so, dass (3.1) für alle $x_1, x_2 \in K$ gilt. Weiter hat das AWP

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

genau eine maximale Lösung $\varphi(\cdot, x_0)$ auf dem (offenen) Intervall

$$I(x_0) = \big(t^-(x_0), t^+(x_0)\big).$$

Ist $t^+(x) < \infty$, so gilt dabei

$$\varphi(t, x) \to \partial D \quad (t \to t^+(x)),$$

in dem Sinne, dass für alle $K \Subset D$ ein $0 \leq t_K \in I(x_0)$ existiert mit $\varphi(t, x) \notin K$ für $t > t_K$. Eine entsprechende Aussage gilt in Fall $t^-(x_0) > -\infty$ für $t \to t^-(x_0)$.

Beispiel 3.2 (logistische Gleichung)
Es sei $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = x(1 - x)$. Hier gilt

$$\varphi(t, x) = \frac{x}{x + e^{-t}(1 - x)} \qquad \big(t \in I(x)\big),$$

wobei

$$I(x) = \big(t^-(x), t^+(x)\big) = \begin{cases} \Big(\log\Big(\dfrac{x-1}{x}\Big), \infty\Big) & , \ x > 1 \\ \mathbb{R} & , \ x \in [0, 1] \\ \Big(-\infty, \log\Big(\dfrac{x-1}{x}\Big)\Big) & , \ x < 0\,. \end{cases}$$

Satz 3.3 *Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{K}^d)$. Dann ist*

$$\Omega := \bigcup_{x \in D} (I(x) \times \{x\}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$$

offen und die Abbildung $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}^d$ ist stetig.

Beweis. 1. Es sei $K \Subset D$ und $L = L_K$ eine entsprechende Lipschitz-Konsatante. Ist $J = [u,v]$ ein kompaktes Intervall und sind $x, y \in D$ mit $J \subset I(x) \cap I(y)$ und $\varphi(J,x) \cup \varphi(J,y) \subset K$, so gilt

$$\big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big| \le \big|\varphi(u,x) - \varphi(u,y)\big|\, e^{L(t-u)} \qquad (t \in [u,v]).$$

Denn: Aus der Integraldarstellung von φ folgt

$$\begin{aligned}\big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big| &\le \big|\varphi(u,x) - \varphi(u,y)\big| + \int_u^t \big|f\big(\varphi(s,x)\big) - f\big(\varphi(s,y)\big)\big|\, ds \\ &\le \big|\varphi(u,x) - \varphi(u,y)\big| + L \int_u^t \big|\varphi(s,x) - \varphi(s,y)\big|\, ds\,.\end{aligned}$$

Mit dem Gronwall-Lemma (angewandt auf $\psi(t) = \big|\varphi(t,x) - \varphi(t,y)\big|$) ergibt sich die Behauptung.

2. Es sei $(t_0, x_0) \in \Omega$ gegeben, wobei zunächst $t_0 \ge 0$ vorausgesetzt wird.
Ist $J = [0, t_0 + \alpha] \subset I(x_0)$ mit $\alpha > 0$, so ist $\varphi(J, x_0) \Subset D$, also

$$\delta_0 := \operatorname{dist}\big(\varphi(J,x_0), \partial D\big)/2 > 0$$

(mit $\delta_0 := 1$ für $D = \mathbb{K}^d$) und damit $K := U_{\delta_0}\big[\varphi(J,x_0)\big] \Subset D$.
Ist $L = L_K$ und

$$|x - x_0| \le \delta := \delta_0 e^{-L(t_0+\alpha)},$$

so gilt $[0, t_0+\alpha] \subset I(x)$ nach 1. und dem Satz von Picard-Lindelöf (wäre $t^+(x) \le t_0+\alpha$, so wäre $\varphi(t,x) \in K$ für alle $0 \le t \in I(x)$).
Damit ist

$$[0, t_0 + \alpha] \times U_\delta[x_0] \subset \Omega$$

und es gilt für $[0, t_0 + \alpha] \times U_\delta[x_0] \ni (t,x) \to (t_0, x_0)$

$$\begin{aligned}\big|\varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0)\big| &\le \big|\varphi(t,x) - \varphi(t,x_0)\big| + \big|\varphi(t,x_0) - \varphi(t_0,x_0)\big| \\ &\le |x - x_0|\, e^{L(t_0+\alpha)} + \big|\varphi(t,x_0) - \varphi(t_0,x_0)\big| \to 0\,.\end{aligned}$$

Mit entsprechender Argumentation sieht man, dass im Falle $t_0 \le 0$

$$[t_0 - \alpha, 0] \times U_\delta[x_0] \subset \Omega$$

für geeignete $\alpha > 0$ und $\delta > 0$ gilt. Also ist Ω offen.
Außerdem gilt für $(t,x) \in [t_0 - \alpha, 0] \times U_\delta[x_0]$ dann wie oben

$$\varphi(t,x) \to \varphi(t_0,x_0) \quad ((t,x) \to (t_0,x_0)).$$

Damit ist φ stetig auf Ω. $\square$

Bemerkung 3.4 Sind $D \subset \mathbb{R}^d$ und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$, so ist $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$ und in diesem Fall ist φ sogar stetig differenzierbar auf Ω (siehe Differenzialgleichungen).

Bemerkung 3.5 Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{K}^d)$. Aus der Eindeutigkeit der maximalen Lösungen $\varphi(\cdot, x)$ ergibt sich für $x \in D$ und $s \in I(x)$ zunächst $I(\varphi(s,x)) = I(x) - s$ und damit für $t \in I(x) - s$ die Kozyklus-Eigenschaft

$$\varphi(t+s, x) = \varphi\big(t, \varphi(s,x)\big). \tag{3.2}$$

Setzt man für $t \in \mathbb{R}$

$$D_t := \{x \in D : (t,x) \in \Omega\},$$

so ist $D_t \subset \mathbb{K}^d$ offen. Für $t \in \mathbb{R}$ mit $D_t \neq \emptyset$ und

$$\phi_t(x) := \varphi(t,x) \qquad (x \in D_t).$$

ergibt sich aus der Kozyklus-Eigenschaft zudem ([Ü]): $\phi_t : D_t \to D_{-t}$ ist ein Homöomorphismus (und im Falle $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ ein Diffeomorphismus) mit

$$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}.$$

Wir verwenden auch hier die für dynamische Systeme eingeführten Notationen $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ und $\gamma^-(x)$, wobei jeweils T durch $I(x)$ ersetzt wird, und nennen φ auch **Fluss** (von f) (vgl. auch [Ü]). Weiter definieren wir

$$X_\infty := \{x \in D : t^+(x) = \infty\} = \bigcap_{t \geq 0} D_t\,,$$
$$X_{-\infty} := \{x \in D : t^-(x) = \infty\} = \bigcap_{t \leq 0} D_t\,.$$

Dann ist $(\phi_t)_{t \geq 0}$ ein dS auf X_∞ und $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein dS auf $X_\infty \cap X_{-\infty}$.
Ist schließlich $f(p) = 0$, so ist $\varphi(t,p) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir nennen p dann auch einen GGP von f (oder der Differenzialgleichung $x' = f(x)$). Weiter setzen wir

$$W^s(p) := \{x \in X_\infty : \varphi(t,x) \to p\,(t \to \infty)\}.$$

Ist dabei X_∞ eine D-Umgebung von p, so sind Stabilität, Attraktivität und asymptotische Stabilität für p wie in Abschnitt 1 definiert.

Beispiel 3.6 Für $A \in L(\mathbb{K}^d)$ ist der Fluss von

$$x' = Ax$$

gegeben durch

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x \quad ((t,x) \in \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d).$$

Wir schreiben im Weiteren

$$\sigma(A) := \{\lambda : \lambda \text{ Eigenwert von } A\} \quad \text{und} \quad \mu^*(A) := \max \operatorname{Re}(\sigma(A)),$$

wobei wir hierbei auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die lineare Abbildung A auf $\mathbb{C}^d$ betrachten, also in diesem Fall die sog. Komplexifizierung von A. Ist $||\cdot||$ eine Operatornorm auf $L(\mathbb{K}^d)$, so gilt (siehe Differenzialgleichungen)

Satz 3.7 *Es sei $A \in L(\mathbb{K}^d)$.*

1. *Ist $\mu > \mu^*(A)$, so existiert ein $C > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Ce^{\mu t}$ für $t \geq 0$.*
2. *(Stabilitätskriterium) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   a) *Es existieren $C, \alpha > 0$ mit $||e^{tA}|| \leq Ce^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*
   b) *$W^s(0) = \mathbb{K}^d$.*
   c) *$\mu^*(A) < 0$.*

Satz 3.8 *(linearisierte asymptotische Stabilität)*
Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei p ein GGP von f mit

$$\mu^* := \mu^*((Df)(p)) < 0.$$

Ist $0 < \alpha < -\mu^*$, so existieren eine D-Umgebung U von p mit $U \subset X_\infty$ und ein $C \geq 0$ so, dass

$$|\varphi(t, x) - p| \leq C|x - p|e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0,\ x \in U).$$

Insbesondere ist p asymptotisch stabil.

Beispiel 3.9 (Schwingungsgleichung)
Wir betrachten die Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 2ay' + \omega^2 \sin y = 0$$

mit $\omega > 0$ und $a \geq 0$ (a heißt Dämpfungsparameter; im Falle $a > 0$ spricht man von gedämpfter Schwingung, im Falle $a = 0$ von ungedämpfter).
Die Gleichung ist äquivalent zum System $x' = f(x)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2 \end{pmatrix}$$

(siehe Differenzialgleichungen). Hier sind $p = p_m = (m\pi, 0)$ $(m \in \mathbb{Z})$ die Gleichgewichtspunkte. Weiter ist die Jacobi-Matrix von f gegeben durch

$$(Jf)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x_1 & -2a \end{pmatrix},$$

also

$$(Jf)(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^m\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die Eigenwerte von $(Df)(p)$ im Falle m gerade

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2} & , \text{ falls } a \geq \omega \\ -a \pm i\sqrt{\omega^2 - a^2} & , \text{ falls } \omega > a \end{cases}$$

und im Falle m ungerade

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}.$$

Für $a > 0$ und m gerade ist $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, also p asymptotisch stabil nach S. 3.8.

Ein sehr eleganter Ansatz zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Flüssen φ ist die sogenannte **direkte Methode von Liapunov**. Wir führen dazu zunächst eine Bezeichnungsweise ein.
Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in \operatorname{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$ und $V \in C^1(D) := C^1(D, \mathbb{R})$. Ist $x \in D$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(t,x)) &= \nabla V(\varphi(t,x)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t,x) \\ &= \nabla V(\varphi(t,x)) \cdot f(\varphi(t,x)) \end{aligned}$$

(wobei $a \cdot b := a^T b$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet). Wir setzen

$$\dot{V} := \dot{V}_f := \nabla V \cdot f$$

(also die Richtungsableitung von V in Richtung f). Ist dabei $\dot{V} \leq 0$ auf D, so ist für jedes $x \in D$ die Funktion $t \mapsto V(\varphi(t,x))$ monoton fallend (V „fällt entlang“ der maximalen Lösung $\varphi(\cdot, x)$).

Definition 3.10 Es seien D und f wie oben. Ist $V \in C^1(D)$ mit $\dot{V} \leq 0$ auf D, so heißt V eine **Liapunov-Funktion** für f (auf D).

Bemerkung 3.11 Wir definieren Invarianz und positive Invarianz von Mengen $M \subset D$ wie in B.1.13. Als unmittelbare wichtige Folgerung aus der Monotonie von $V(\varphi(\cdot, x))$ erhält man die positive Invarianz der „Subniveaumengen“

$$\{V \leq c\} \qquad \text{und} \qquad \{V < c\}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$. Da $\gamma^+(x)$ für alle x zusammenhängend ist (als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge), ist auch jede Komponente von $\{V < c\}$ bzw. $\{V \leq c\}$ positiv invariant.

Als Konsequenz ergibt sich

Satz 3.12 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$ und V eine Liapunov-Funktion für f auf D. Ferner sei p ein GGP von f. Hat V an p ein striktes lokales Minimum, so ist p stabil.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. O. E. sei ε so klein, dass

$$U_\varepsilon[p] \subset D \quad \text{und} \quad V(p) < V(x) \qquad (x \in U_\varepsilon[p] \setminus \{p\})$$

gilt. Dann ist

$$\alpha := \min_{x \in \partial U_\varepsilon(p)} V(x) > V(p)\,.$$

Die offene Menge $\{V < \alpha\}$ hat eine Komponente U, die in $U_\varepsilon(p)$ liegt (da $p \in \{V < \alpha\}$ gilt und $\partial U_\varepsilon(p) \cap \{V < \alpha\} = \emptyset$ ist).
Da U nach B. 3.11 positiv invariant ist, gilt $\gamma^+(x) \subset U$ für alle $x \in U$, also auch $\gamma^+(x) \subset U_\varepsilon[p]$. Da $U_\varepsilon[p]$ kompakt ist, gilt $U \subset X_\infty$ und da U eine Umgebung von p ist, ist damit p stabil. □

Beispiel 3.13 (linearer harmonischer Oszillator)
Es sei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2\,.$$

Also ist V eine Liapunov-Funktion zu f auf $\mathbb{R}^2$. Offenbar ist $p = (0,0)$ ein striktes lokales Minimum von V, d.h. $p = (0,0)$ ist stabil nach S. 3.12.

Das Problem der Liapunov-Methode liegt darin, dass keine allgemeines Verfahren zur Bestimmung einer Liapunov-Funktion bekannt ist. Oft führen Funktionen, die die „Energie“ eines Systems beschreiben, auf Liapunov-Funktionen. Insbesondere existieren solche für sogenannte konservative Systeme.

Definition 3.14 Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$. Eine Funktion $H \in C(D)$ (nicht lokal konstant, also nicht konstant auf einer offenen Teilmenge von D), heißt **(globales) erstes Integral** von f (bzw. $x' = f(x)$), falls $t \mapsto H(\varphi(t,x))$ konstant auf $I(x)$ für alle $x \in D$ ist, d. h. die Lösungen von $x' = f(x)$ liegen auf Höhenlinien von H. Eine Gleichung $x' = f(x)$, für die ein erstes Integral existiert, heißt **konservativ**.

Bemerkung 3.15 Ob eine Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ erstes Integral von $x' = f(x)$ ist, lässt sich oft schon ohne Kenntnis des Flusses φ entscheiden. Ist $H \in C^1(D)$ (nicht lokal konstant) mit

$$\dot{H} = \nabla H \cdot f = 0 \quad \text{auf } D\,,$$

(also H insbesondere eine Liapunov-Funktion für $x' = f(x)$), so gilt für alle $x \in D$ und $t \in I(x)$

$$\frac{d}{dt} H(\varphi(t,x)) \equiv 0$$

und damit $H(\varphi(t,x)) \equiv \text{const}$. Also ist H erstes Integral von f.

Bemerkung und Definition 3.16 Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $H \in C^2(D)$ und $d = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Ist $x = (u,v)$ mit $p,q \in \mathbb{R}^k$, so heißt die Differenzialgleichung $x' = f(x)$ mit

$$f(x) = f_H(x) = f_H(u,v) := \left(\frac{\partial H}{\partial v_1}(u,v), \ldots, \frac{\partial H}{\partial v_k}(u,v), -\frac{\partial H}{\partial u_1}(u,v), \ldots, -\frac{\partial H}{\partial u_k}(u,v)\right)$$

ein **Hamilton-System**. Die Funktion H heißt eine zugehörige **Hamilton-Funktion**. Offenbar ist (im Falle H nicht lokal konstant) die Gleichung $x' = f_H(x)$ konservativ mit erstem Integral H.

Beispiel 3.17 Für eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + g(y) = 0\,.$$

Dann ist das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -g(u) \end{pmatrix}$$

ein Hamilton-System mit $k = 1$ und

$$H(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \int_0^u g(s)ds$$

ist eine zugehörige Hamilton-Funktion.
Im Fall $g(y) = \omega^2 \sin y$ ergibt sich die ungedämpfte Schwingung (vgl. B.3.9). Hier ist

$$H(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \omega^2 \int_0^u \sin(s)ds \;=\; \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos u + \omega^2 \qquad (u,v \in \mathbb{R})\,.$$

Wir betrachten den GGP $p = (m\pi, 0)$ für $m \in \mathbb{Z}$ gerade. Es gilt $H(p) = 0$ und $H(x) > 0$ auf $U \setminus \{p\}$ für eine Umgebung U von p, d.h. H hat an p ein striktes lokales Minimum. Also ist p stabil nach S. 3.12. Da die Gleichung konservativ ist (mit erstem Integral H), verlaufen sämtliche Lösungen $\varphi(\cdot, x)$ auf Höhenlinien von H.

Ist $x \in X_\infty$, so definieren wir die ω-Grenzmenge durch $\omega(x)$ wie in D.2.5, jetzt mit dem Abschluss in D. Man sieht leicht, dass damit die Aussagen von S.2.7 ebenfalls erfüllt sind.

Satz 3.18 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$ und V eine Liapunov-Funktion für f auf D. Ferner sei $M = M_V$ die Vereinigung aller positiv invarianten Teilmengen von $\{\dot{V} = 0\}$. Dann ist $\omega(x) \subset M$ für alle $x \in X_\infty$.*

Beweis. O.E. sei $\omega(x) \neq \emptyset$ und $y \in \omega(x)$ gegeben. Ist $\tau \geq 0$, so existiert eine Folge (t_n) in $[0, \infty)$ mit $t_n \to \infty$, $t_{n+1} > t_n + \tau$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$\varphi(t_n, x) \to y \qquad (n \to \infty).$$

Aus der Stetigkeit von φ auf Ω folgt

$$\begin{aligned} V\big(\varphi(\tau, y)\big) &= \lim_{n\to\infty} V\big(\varphi(\tau, \varphi(t_n, x)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{V\big(\varphi(\tau + t_n, x)\big)}_{\geq V\left(\varphi(t_{n+1}, x)\right)} \geq \lim_{n\to\infty} V\big(\varphi(t_{n+1}, x)\big) = V(y)\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\dot{V}(y) = \big(V \circ \varphi(\cdot, y)\big)'(0) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{V \circ \varphi(\tau, y) - V \circ \varphi(0, y)}{\tau} \geq 0.$$

Aus $\dot{V} \leq 0$ folgt $\dot{V}(y) = 0$. Damit ist $\omega(x) \subset \{\dot{V} = 0\}$, und da $\omega(x)$ positiv invariant ist, gilt auch $\omega(x) \subset M$. $\square$

Bemerkung 3.19 Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Ist $\gamma^+(x)$ relativ kompakt in D, so ist $x \subset X_\infty$ nach B.3.1. Nach S.2.7 ist $\omega(x) \neq \emptyset$ und kompakt.

Damit können wir weitere lokale Aussagen hinsichtlich der Stabilität von Gleichgewichtspunkten machen.

Satz 3.20 *Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{R}^d)$ und V eine Liapunov-Funktion für f auf D. Weiter sei p ein GGP und ein isolierter Punkt von M_V. Dann gilt*

1. *Ist p stabil, so ist p asymptotisch stabil und p ein lokales Minimum von V.*
2. *Ist p ein striktes lokales Minimum von V, so ist p asymptotisch stabil.*

Beweis. 1. Es sei $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(p, \partial D \cup (M_V \setminus \{p\}))$. Da p stabil ist, existiert eine Umgebung U von p so, dass $\gamma^+(x) \subset U_\varepsilon[p]$ für alle $x \in U$.
Es sei $x \in U$ gegeben. Dann ist insbesondere $\gamma^+(x)$ relativ kompakt in D und nach S.3.18 damit $\omega(x) \subset M_V$. Aus $\omega(x) \subset U_\varepsilon[p]$ folgt $\omega(x) = \{p\}$, also $\varphi(t,x) \to p$ $(t \to \infty)$. Damit ist p attraktiv.
Weiter gilt für $x \in U$

$$V\big(\varphi(t,x)\big) \to V(p) \qquad (t \to \infty).$$

Da $t \mapsto V\big(\varphi(t,x)\big)$ monoton fallend ist, folgt

$$V\big(\varphi(t,x)\big) \leq V\big(\varphi(0,x)\big) = V(x) \qquad (t \geq 0)$$

und somit $V(p) \leq V(x)$.
2. Nach S.3.12 ist p stabil, also nach 1. asymptotisch stabil. □

Beispiel 3.21 (gedämpfte Schwingung; vgl. B.3.9)
Wir betrachten wieder das System

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\omega, a > 0$. Für die Hamilton-Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der ungedämpften Schwingung, also

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \omega^2 \cos x_1 + \omega^2$$

(siehe B.3.17) folgt

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (\omega^2 \sin x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2 \end{pmatrix} = -2ax_2^2 \leq 0,$$

d. h. V ist eine Liapunov-Funktion des Systems. Hier ist

$$\{\dot{V} = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Sind $p_m = (m\pi, 0)$ $(m \in \mathbb{Z})$ die kritischen Punkte, so gilt für $x \in \mathbb{R} \times \{0\}$, $x \neq p_m$

$$f(x) = f(x_1, 0) = (0, -\omega^2 \sin x_1)$$

mit $\omega^2 \sin x_1 \neq 0$. Also verläuft die Lösung durch x „senkrecht“ zu $\mathbb{R} \times \{0\}$. Damit liegt x in keiner invarianten Teilmenge von $\{\dot{V} = 0\}$. Folglich ist

$$M_V = \{p_m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Insbesondere ist jeder Punkt p_m isoliert in M_V.
Da V an p_m für gerades m ein striktes lokales Minimum hat, ist p_m nach S. 3.20 asymptotisch stabil. Im Falle m ungerade ist p_m kein lokales Minimum von V. Also ist nach S. 3.20 p_m in diesem Fall instabil.

Bemerkung 3.22 Es seien D, f, V wie in S.3.18. Ist $c \in \mathbb{R}$ und ist G eine relativ kompakte Komponente von $\{V < c\}$, so ist auch $\gamma^+(x) \subset G$ und relativ kompakt für alle $x \in G$. Da $\{V \leq V(x)\}$ positiv invariant ist, folgt $\omega(x) \subset \{V \leq V(x)\}$ für alle $x \in G$, also $\omega(x) \subset G \cap M_V$ nach S.3.18.
Ist dabei p ein GGP mit $M_V \cap G = \{p\}$, so gilt genauer

$$\varphi(t, x) \to p \qquad (t \to \infty)$$

für alle $x \in G$.

Beispiel 3.23 Es seien f, V wie in B. 3.21. Wir betrachten die Komponente G von $\{V < 2\omega^2\}$, die 0 enthält. Dann ist G relativ kompakt in $D = \mathbb{R}^2$ (da beschränkt). Außerdem ist $\{0\} = M_V \cap G$ nach den Überlegungen aus B. 3.21. Also gilt

$$\varphi(t, x) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

für alle $x \in G$.

Bemerkung 3.24 Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$. Wir zeigen: Ist $x \in D$ mit relativ kompaktem Vorwärtsorbit $\gamma^+(x)$, so ist $\omega(x)$ zusammenhängend.
(Denn: Angenommen, nicht. Da $\omega(x)$ kompakt ist, existieren (siehe Analysis) kompakte, disjunkte Mengen K_1 und K_2 mit

$$\omega(x) = K_1 \cup K_2.$$

Ist $\delta := \text{dist}(K_1, K_2)/2$, so sind $U_1 := U_\delta(K_1)$ und $U_2 := U_\delta(K_2)$ offen und disjunkt. Aus $\text{dist}(\varphi(t, x), \omega(x)) \to 0$ $(t \to \infty)$ (wieder S.2.7) folgt die Existenz eines $t > 0$ mit

$$\varphi([t, \infty), x) \subset U_1 \cup U_2.$$

Ausserdem ist $\varphi([t, \infty), x) \cap U_j \neq \emptyset$ für $j = 1, 2$ nach Definition der ω-Grenzmengen. Damit ist $\varphi([t, \infty), x)$ nicht zusammenhängend. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen zusammenhängend sind.)
Also folgt unter den (zusätzlichen) Voraussetzungen aus S.3.18, dass $\omega(x)$ in einer Komponente von M_V liegt. Sind alle Komponenten einpunktig, so gilt für ein $p \in M_V$

$$\varphi(t, x) \to p \qquad (t \to \infty).$$

Wir werden uns nun genauer mit einem dreidimensionalen System befassen, das in in der Wettervorhersage auftritt und als einer der Startpunkte der Chaostheorie gilt.

Beispiel 3.25 (Lorenz-System) Es seien $\sigma, \rho, \beta > 0$. Dann heißt das (nichtlineare) System $x' = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ x_1(\rho - x_3) - x_2 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix}$$

Lorenz-System mit Parametern σ, ρ, β.
Offensichtlich ist $p = (0, 0, 0)$ ein GGP. Weiter gilt

$$(Jf)(x) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix},$$

also

$$(Jf)(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_3 = -\beta < 0$ und

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)^2 - \sigma(1 - \rho)}\,.$$

Also: Ist $\rho < 1$, so gilt $\lambda_{1,2,3} < 0$, d. h. $p = 0$ ist asymptotisch stabil nach S.3.8.
Die Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \sigma(x_2^2 + x_3^2)\right)$$

hat an $p = 0$ ein striktes (globales) Minimum und es gilt

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, \sigma x_2, \sigma x_3) \begin{pmatrix} \sigma x_2 - \sigma x_1 \\ \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 \end{pmatrix} \\ &= -\sigma\big(x_1^2 - (1 + \rho) x_1 x_2 + x_2^2 + \beta x_3^2\big). \end{aligned}$$

Also ist im Falle $\rho \leq 1$ die Funktion V eine Liapunov-Funktion des Lorenz-Systems.
Ist $\rho < 1$, so gilt $\{\dot{V} = 0\} = \{0\}$. Damit ergibt sich die asymptotische Satbilität noch einmal aus S. 3.20.2. Tatsächlich gilt hier sogar $W^s(0) = \mathbb{R}^3$, d. h. $p = 0$ ist „global attraktiv“.
(Denn: Da

$$V(x) \to \infty \qquad (|x| \to \infty)$$

gilt, sind die Subniveaumengen $\{V < c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ beschränkt. Außerdem ist natürlich

$$D = \mathbb{R}^3 = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{V < c\}.$$

Nach B. 3.22 gilt $\varphi(t,x) \to p = 0$ $(t \to \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.)
Im Falle $\rho > 1$ existieren die weiteren Gleichgewichtspunkte

$$p_{2,3} = \big(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)},\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\big).$$

Hierfür kann man zeigen: $p_{2,3}$ sind asymptotisch stabil im Falle $\sigma < \beta+1$ und im Falle

$$\sigma > \beta+1, \qquad \rho < \rho_c := \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass für beliebige Parameter alle Vorwärtsorbits $\gamma^+(x)$ relativ kompakt in $\mathbb{R}^3$ (d. h. beschränkt) sind. Damit ist $X_\infty = D = \mathbb{R}^3$ und $\omega(x)$ nach S.2.7 nichtleer und kompakt für alle $x \in \mathbb{R}^3$ (und zusammenhänged nach B.3.24).
Wir betrachten dazu $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$W(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}\big(\rho x_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3-2\rho)^2\big).$$

Hier gilt ebenfalls

$$W(x) \to \infty \qquad (|x| \to \infty),$$

d. h. die Subniveaumengen $\{W < c\}$ sind alle beschränkt. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\dot W(x) &= \big(\rho x_1, \sigma x_2, \sigma(x_3-2\rho)\big)\begin{pmatrix}\sigma x_2 - \sigma x_1\\ \rho x_1 - x_2 - x_1x_3\\ x_1x_2 - \beta x_3\end{pmatrix}\\
&= -\sigma\big(\rho x_1^2 + x_2^2 + \beta x_3^2 - 2\rho\beta x_3\big)\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\dot W(x) \to -\infty \qquad (|x| \to \infty),$$

also ist $K := \{\dot W \geq 0\}$ kompakt.
Wir zeigen: Für $c > c_K := \max W(K)$ ist $\{W < c\}$ positiv invariant. Wegen

$$\bigcup_{c>c_K} \{W < c\} = \mathbb{R}^3$$

ist damit $\gamma^+(x)$ beschränkt für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
(Denn: Es sei $c > c_K$, und es sei $x \in \{W < c\}$. Angenommen, $\gamma^+(x) \not\subset \{W < c\}$. Dann existiert

$$\tau := \min\{0 < t \in I(x) : W(\varphi(t,x)) \geq c\}.$$

Aus $W\big(\varphi(\tau,x)\big) = c > \max W(K)$ folgt $\dot W\big(\varphi(\tau,x)\big) < 0$, d. h. $t \mapsto W\big(\varphi(t,x)\big)$ fällt auf einer Umgebung von τ, im Widerspruch zur Definition von τ. Damit ist $\{W < c\}$ positiv invariant.)

Wir befassen uns zum Abschluss des Abschnitts noch einmal mit dem lokalen Verhalten von Flüssen an Gleichgewichtspunkten.

Definition 3.26 Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ und p ein GGP von $x' = f(x)$. Dann heißt p **hyperbolisch**, falls

$$\sigma((Df)(p)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

In diesem Falle heißt p

(i) **Senke**, falls $\sigma\big((Df)(p)\big) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$,

(ii) **Quelle**, falls $\sigma\big((Df)(p)\big) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$,

(iii) **Sattelpunkt**, falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma\big((Df)(p)\big)$ existieren mit $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_2$.

Ist p eine Senke, so beschreibt S.3.8 das lokale Verhalten der Lösungen in der Nähe von p. Insbesondere ist $W^s(0)$ eine Umgebung von p. Ist p eine Quelle, so ergibt sich mit S.3.8, angewandt auf $x' = -f(x)$, dass $W^u(p)$ eine Umgebung von p ist, d. h. alle Lösungen, die zum Zeitpunkt 0 genügend nahe bei p liegen, „kommen von p her“.
Wir wollen nun das lokale Verhalten im Falle eines Sattelpunktes genauer untersuchen.

Bemerkung und Definition 3.27 Wir betrachten zunaächst eine hyperbolische lineare Gleichung

$$x' = Ax,$$

also $A \in L(\mathbb{K}^d)$ mit $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Mit etwas weitergehender linearer Algebra ergibt sich[3], dass $E^s := W^s(0)$ und $E^u := W^u(0)$ (invariante) Unterräume von $\mathbb{K}^d$ sind mit

$$\mathbb{K}^d = E^s \oplus E^u.$$

Man nennt E^s den **stabilen Unterraum** von $x' = Ax$ und E^u den **instabilen Unterraum** von $x' = Ax$. Dabei ist $p = 0$ Sattelpunkt genau dann, wenn $\dim E^s$ und $\dim E^u$ positiv sind. Ist A diagonalisierbar, so gilt zudem

$$E^s = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A),\, \operatorname{Re}\lambda<0} \operatorname{Kern}(A - \lambda\,\mathrm{id})$$

und

$$E^u = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A),\, \operatorname{Re}\lambda>0} \operatorname{Kern}(A - \lambda\,\mathrm{id}).$$

Beispiel 3.28 Wir betrachten $x' = Ax$ auf $\mathbb{K}^d$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[3]Siehe etwa Hirsch/Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974

Die Eigenwerte sind
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i\,, \quad \lambda_3 = 3.$$
Also ist $p = 0$ ein Sattelpunkt mit $\dim E^s = 2$ und $\dim E^u = 1$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt außerdem

$$E^s = \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_1 \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_2 \mathrm{id}), \qquad E^u = \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_3 \mathrm{id}).$$

Im nichtlinearen Fall entspricht das lokale Verhalten der Lösungen in der Nähe eines Sattelpunktes dem der Linearisierung. Genauer gilt folgender tiefliegende Satz (mit $W^u(p) := \{x \in X_{-\infty} : \varphi(t,x) \to 0\,(t \to -\infty)\}$):

Satz 3.29 *(Stable Manifold Theorem)*
Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^k(D, \mathbb{R}^d)$ und p ein Sattelpunkt von $x' = f(x)$. Ferner sei $d_s := \dim(E^s)$, $d_u := \dim(E^u)$, wobei E^s bzw. E^u den stabilen bzw. instabilen Unterraum der Linearisierung $x' = (Df)(p)x$ bezeichnet. Dann existiert eine Umgebung U von p so, dass
$$W^s(U,p) := \{x \in W^s(p) : \gamma^+(x) \subset U\}$$
bzw.
$$W^u(U,p) := \{x \in W^u(p) : \gamma^-(x) \subset U\}$$
d_s- bzw. d_u-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^d$ sind. Dabei gilt

$$T_p W^s(U,p) = E^s \quad \text{und} \quad T_p W^u(U,p) = E^u,$$

wobei T_p die entsprechenden Tangentialräume in p bezeichnen.

Einen Beweis findet man etwa in `www.poschel.de/ds-09/pdf/ds-skript.pdf`, Abschnitt 6.

Beispiele 3.30 1. Wir betrachten noch einmal die Schwingungsgleichung (B. 3.9). Im Falle $m \in \mathbb{Z}$ ungerade ist $p = (m\pi, 0)$ ein Sattelpunkt (da $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}$). Also sind nach S. 3.29 für eine geeignete Umgebung U von p_m die Mengen $W^s(U,p)$ und $W^u(U,p)$ eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$, tangential zu den entsprechenden Unterräumen E^s, E^u der linearisierten Gleichung

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2a \end{pmatrix} x\,.$$

2. (Der Fisch) Wir betrachten die zweidimensionale Hamilton-Gleichung aus B.3.17 mit $g(u) = u^2 - u$, also
$$\binom{u}{v}' = \binom{v}{u - u^2}$$

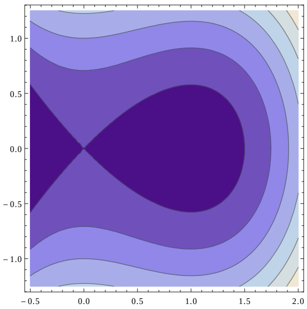

Abbildung 1: Niveaumengen von H

mit Hamilton-Funktion

$$H(u,v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3.$$

Hier sind $p = (0,0)$ und $p = (1,0)$ die GGPe und dabei ist $p = (0,0)$ ein Sattelpunkt (die zugehörigen Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind ± 1). Durch Betrachtung der Höhenlinie

$$\{H = 0\} = \{(u,v) : v = \pm u\sqrt{1 - 2u/3},\ u \leq 3/2\}$$

und Vergleich mit den stabilen bzw. instabilen Unterräumen

$$E^s = \{(u,-u) : u \in \mathbb{R}\} \quad E^u = \{(u,u) : u \in \mathbb{R}\}$$

sieht man, dass $\{H = 0\} = W^s(0) \cup W^u(0)$ gilt und dass dabei $W^s(0)$ und $W^u(0)$ keine Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind. Also gilt die Aussage des Stable Manifold

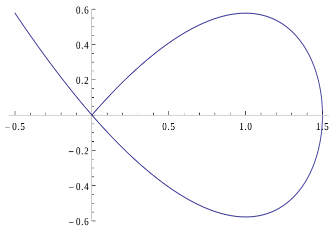

Abbildung 2: $W^s(0)$

Theorems im Allgemeinen nicht für $W^s(p)$ anstelle von $W^s(U,p)$. Hier ist übrigens $W^s(0) \cap W^u(0) = \gamma(x)$ für jedes $x \in W^s(0) \cap W^u(0)$ ein sogenannter homokliner Orbit, d. h. es gilt $\omega(x) = \alpha(x) (= \{(0,0)\})$.
3. Wir betrachten das Lorenz-System $x' = f(x)$ und dabei den GGP $p = (0,0,0)$. Ist $\rho > 1$, so gilt für die Eigenwerte der linearisierten Gleichung $x' = (Df)(p)x$ (siehe B.3.25)

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1,$$

d. h. es liegt an 0 ein Sattelpunkt vor mit $\dim(E^s) = 2$ und $\dim(E^u) = 1$.
Nach S. 3.29 existiert eine Umgebung U von 0 so, dass $W^s(U, 0)$ eine zweidimensionale und $M^u(U, 0)$ eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ sind (tangential zu den entsprechenden Unterräumen E^s bzw. E^u).

4 Der Satz von Liouville

Wir betrachten vorübergehend nichtautonome lineare Systeme der Form $x' = A(t)x$ mit $A : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ stetig.

Satz 4.1 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall,und es sei $\Phi : I \to \mathbb{K}^{d\times d}$ eine Fundamentalmatrix des Systems $x' = A(t)x$. Dann ist die Wronski-Determinante $W := \det\Phi : I \to \mathbb{K}$ Lösung der (skalaren) linearen Gleichung*

$$y' = \operatorname{spur} A(t) \cdot y.$$

Beweis. Ist $\Phi = \big(\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(d)}\big)$, so gilt nach Definition der Determinante für $t \in I$

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det\Phi)'(t) = \\ &= \sum_{j=1}^{d} \det\Big(\psi^{(1)}(t), \dots, \psi^{(j-1)}(t), \underbrace{(\psi^{(j)})'(t)}_{=A(t)\psi^{(j)}(t)}, \psi^{(j+1)}(t), \dots, \psi^{(d)}, (t)\Big)\,. \end{aligned}$$

Es sei $s \in I$ fest. Ist speziell $\Phi = \Phi_s$ so, dass $\Phi_s(s) = E_d$ gilt (wobei E_d die d-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet), so ergibt sich

$$(\det\Phi_s)'(s) = \sum_{j=1}^{d} \det\Big(e^{(1)}, \dots, e^{(j-1)}, A(s)e^{(j)}, e^{(j+1)}, \dots, e^{(d)}\Big) = \operatorname{spur} A(s)\,.$$

Ist Φ beliebig, so gilt

$$\Phi(t) = \Phi_s(t)\cdot\Phi(s) \qquad (t \in I),$$

also erhalten wir

$$W'(s) = (\det\Phi)'(s) = (\det\Phi_s)'(s)\cdot\det\Phi(s) = \operatorname{spur} A(s)\cdot W(s).$$

□

Bemerkung 4.2 Aus S. 4.1 ergibt sich unmittelbar, dass für alle $t_0 \in I$

$$W(t) = W(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{spur} A(s)ds\Big) \qquad (t \in I)$$

gilt (als Lösung der skalaren linearen Differenzialgleichung aus S.4.1).

Bemerkung 4.3 Wir hatten bereits in B.3.4 gesagt, dass für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ die allgemeine Lösung $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist. Nach B.3.5 ist weiterhin die Abbildung

$$\phi_t = \varphi(t, \cdot) : D_t \to D_{-t}$$

ein Diffeomorphismus mit $\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$. Aus der Kettenregel ergibt sich damit

$$\det J\phi_t(x) \neq 0 \qquad \big((t, x) \in \Omega\big).$$

Außerdem ist für festes $x \in D$

$$I(x) \ni t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) := J\phi_t(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

Lösung des Matrix-Anfangswertproblems

$$Z' = (Jf)\big(\varphi(t, x)\big) \cdot Z\,, \quad Z(0) = E_d$$

(siehe Differenzialgleichungen, Abschnitt 5). Insbesondere ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, x) = E_d \qquad (x \in D).$$

Bezeichnen wir mit $\lambda = \lambda_d$ das d-dimensionale Lebesgue-Maß und ist

$$\operatorname{div} f := \operatorname{spur}(Jf)$$

für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$, so gilt

Satz 4.4 *(Liouville)*
Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, und es sei $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Ferner sei $K \subset X_\infty$ kompakt. Ist $V_K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$V_K(t) := \lambda\big(\phi_t(K)\big) \qquad (t \geq 0),$$

so ist V_K differenzierbar auf $[0, \infty)$ mit

$$V_K'(t) = \int\limits_{\phi_t(K)} \operatorname{div} f \; d\lambda \qquad (t \geq 0).$$

Beweis. 1. Es sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t, x) := \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = \det J\phi_t(x) \qquad \big((t, x \in \Omega)\big).$$

Nach B. 4.3 ist g stetig auf Ω mit

$$g(t,x) \neq 0 \qquad \big((t,x) \in \Omega\big).$$

Außerdem ist

$$g(0,x) = \det \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(0,x)\big)}_{=E_d} = 1 \qquad (x \in D).$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist damit

$$g(t,x) > 0$$

für alle $(t,x) \in \Omega$, da die Strecke von $(0,x)$ nach (t,x) stets in Ω liegt. Wieder nach B.4.3 ist

$$t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x)$$

Lösung des Matrix-Systems $Z' = Jf\big(\varphi(t,x)\big) \cdot Z$, also auch eine Fundamentalmatrix zum System

$$x' = Jf\big(\varphi(t,x)\big)x.$$

Nach S.4.1 gilt für $(t,x) \in \Omega$

$$\begin{aligned} \partial_1 g(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) = \operatorname{spur}\big(Jf(\varphi(t,x)\big) \cdot \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,x) \\ &= (\operatorname{div} f)\big(\varphi(t,x)\big) \cdot g(t,x) \end{aligned}$$

und damit speziell

$$\partial_1 g(0,x) = (\operatorname{div} f)(x)\, \underbrace{g(0,x)}_{=1} = (\operatorname{div} f)(x) \quad (x \in D).$$

Es genügt also zu zeigen

$$V_K'(t) = \int\limits_{\phi_t(K)} \partial_1 g(0,\cdot)\, d\lambda \qquad (t \geq 0).$$

2. Es sei $L \Subset X_\infty$. Aus $\operatorname{dist}\big(\{0\} \times L, \partial\Omega\big) > 0$ folgt, dass

$$t^-(L) := \sup_{x \in L} t^-(x) < 0$$

ist. Damit existiert $\phi_s(L)$ für $s > t^-(L)$, also auch $V_L(s) := \lambda\big(\phi_s(L)\big)$.
Es sei $s > t^-(L)$. Da $\phi_s : D_s \to D_{-s}$ ein Diffeomorphismus ist, folgt mit der Substitutionsregel und 1.

$$V_L(s) = \lambda\big(\phi_s(L)\big) = \int\limits_{D_{-s}} 1_{\phi_s(L)}\, d\lambda = \int\limits_{D_s} 1_L |\det J\phi_s|\, d\lambda = \int\limits_L g(s,\cdot)\, d\lambda\,. \tag{4.1}$$

Es sei nun $t \geq 0$ fest. Für jedes $s > t^-(\phi_t(K))$ gilt

$$\phi_{s+t}(K) = \phi_s\big(\phi_t(K)\big).$$

Also erhält man, indem man $L = \phi_t(K)$ in (4.1) setzt,

$$W(s) := V_K(t+s) = V_{\phi_t(K)}(s) = \int\limits_{\phi_t(K)} g(s,\cdot)\, d\lambda.$$

Da $\partial_1 g$ nach 1. stetig auf Ω ist, ergibt sich (Ableitung von Parameterintegralen)

$$V_K'(t) = W'(0) = \int\limits_{\phi_t(K)} \partial_1 g(0,\cdot) d\lambda.$$

$\square$

Bemerkung 4.5 Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ **divergenzfrei** (d. h. $\operatorname{div} f = 0$ auf D), so ist $V_K' = 0$ auf $[0,\infty)$ nach S. 4.4, also V_K konstant auf $[0,\infty)$. Damit ist das dS $(\phi_t)_{t\geq 0}$ volumenerhaltend auf X_∞ in dem Sinne, dass

$$\lambda\big(\phi_t(K)\big) = \lambda(K) \qquad (t > 0)$$

für alle $K \Subset X_\infty$.

Bemerkung 4.6 Es sei $D \subset \mathbb{R}^{2k}$ ein Gebiet, und es sei $H \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann ist das Hamilton-System $x' = f_H(x)$ divergenzfrei.
(Denn: Für $x = (u, v) \in D$ gilt mit den Bezeichnungen aus B.3.16

$$\operatorname{div} f_H(x) = \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial (f_H)_j}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 H}{\partial u_j \partial v_j}(x) - \frac{\partial^2 H}{\partial v_j \partial u_j}(x) = 0.)$$

Nach B.4.5 ist der zugehörige Fluss volumenerhaltend auf X_∞. Dies gilt etwa für die ungedämpfte Schwingung (siehe B.3.17).

Beispiel 4.7 Wir betrachten ein letztes Mal das Lorenz-System (vgl. B.3.25).
Wir zeigen: Es existiert eine kompakte und invariante λ_3-Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{dist}\big(\phi_t(x), A\big) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

(A ist „global attraktiv“)[4].

[4] Genaueres zu dem Thema findet man etwa in
http://dept.math.lsa.umich.edu/~divakar/papers/Viswanath2004-LorenzFractal.pdf

Denn: Es seien W, $K = \{\dot{W} \geq 0\}$ und c_K wie in B.3.25. Wir setzen $L := \{W \leq c\}$, wobei $c > c_K$. Dann ist $K \subset L^0$ und $L \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und positiv invariant (vgl. B.3.25). Ist $t \geq 0$ fest, so gilt für alle $s \geq 0$

$$\phi_s\big(\phi_t(L)\big) = \phi_{s+t}(L) = \phi_t\underbrace{\big(\phi_s(L)\big)}_{\subset L} \subset \phi_t(L),$$

d. h. auch $\phi_t(L)$ ist positiv invariant. Wir definieren

$$A := \bigcap_{t>0} \phi_t(L).$$

Dann ist A kompakt und invariant ([Ü]). Weiter ist für alle $y \in L$

$$\omega(y) = \bigcap_{t\geq 0} \underbrace{\overline{\gamma^+\big(\phi_t(y)\big)}}_{\subset \phi_t(L)} \subset \bigcap_{t\geq 0} \phi_t(L) = A.$$

Es sei nun $x \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir zeigen: Es existiert ein $t = t_x \geq 0$ mit $\phi_t(x) \in L$. (Denn: Die Menge $U := \{\dot{W} < 0\}$ ist offen mit $K = \mathbb{R}^d \setminus U$. Nach Definition ist W eine Liapunov-Funktion für f auf U. Angenommen, $\gamma^+(x) \subset \{W > c\}$. Dann ist

$$\emptyset \neq \omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)} \subset \{W \geq c\} \cap \{W \leq W(x)\} \Subset U.$$

Dies widerspricht S.3.18.)
Damit ist $\omega(x) = \omega(\phi_t(x)) \subset A$. Mit S.2.7 erhalten wir

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), A) \leq \operatorname{dist}\big(\phi_t(x), \omega(x)\big) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Weiter gilt

$$\operatorname{div} f(x) \equiv -\sigma - 1 - \beta =: -\alpha \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

(Systeme mit negativer Divergenz heißen "dissipativ").
Aus S.4.4 folgt

$$V_L'(t) = \int\limits_{\phi_t(L)} \operatorname{div} f \, d\lambda = -\alpha \int\limits_{\phi_t(L)} d\lambda = -\alpha V_L(t) \qquad (t \geq 0),$$

und damit ist

$$\lambda_3\big(\phi_t(L)\big) = V_L(t) = V_L(0)e^{-\alpha t} = \lambda_3(L) \cdot e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0).$$

Also fällt das Volumen von $\phi_t(L)$ exponentiell im Zeitverlauf. Insbesondere ist folglich

$$\lambda_3(A) = 0.$$

5 Maßerhaltende Systeme

In B.4.5 haben wir gesehen, dass divergenzfreie Systeme $x' = f(x)$ zu volumenerhaltenden Flüssen führen. Wir wollen nun ein allgemeine (diskrete) Systeme betrachten, die eine entsprechende Eigenschaft haben

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum und $(Y, \mathscr{T})$ ein Messraum. Weiter sei $\phi : X \to Y$ messbar. Dann heißt das Maß $\phi_*\mu$, definiert auf $\mathscr{T}$ durch

$$\phi_*\mu(B) := \mu(\phi^{-1}(B)) \qquad (B \in \mathscr{T}),$$

das **Bildmaß** von μ unter ϕ. Ist $\phi : X \to X$ und gilt $\phi_*\mu = \mu$, so heißt die Funktion ϕ (μ-)**maßerhaltend** und μ heißt (ϕ-)**invariant**. Ist dabei ϕ bijektiv und ϕ^{-1} ebenfalls messbar, so ist auch $(\phi^{-1})_*\mu = \mu$, also ϕ^{-1} ebenfalls maßerhaltend.

Definition 5.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Im Weiteren bezeichnen wir die σ-Algebra der Borelmengen auf X mit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_X$. Ist speziell $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ (mit der euklidschen Metrik), so schreiben wir $\lambda = \lambda_X$ für das d-dimensionale Lebesgue-Maß eingeschränkt auf $\mathscr{B}_X$. Weiter schreiben wir m für das (normierte) Bogenmaß auf $\mathbb{S}$, also

$$m := \frac{1}{2\pi} h_* \lambda_{[0,2\pi)}$$

mit $h(t) := e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi))$.

Beispiele 5.3
1. (Drehungen und Winkelverdopplung) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ definiert durch $\phi(z) = e^{i\alpha} z$ $(z \in \mathbb{S})$. Aus der Translationsinvaraianz von λ_1 folgt die ϕ-Invarianz von m. Ist $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ die Winkelverdopplung, so ergibt sich aus der Homogenität von λ_1 entsprechend die σ-Invarianz von m.
2. Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ divergenzfrei. Ferner sei $X := X_\infty \cap X_{-\infty}$. Wir betrachten die Zeitpunkt-1-Funktion $\phi : X \to X$ mit

$$\phi(x) := \varphi(1, x) \qquad (x \in X)$$

Dann ist ϕ ein Homöomorphismus und $\lambda = \lambda_X$ ist ϕ-invariant.
(Denn: Zunächst ist ϕ surjektiv, denn für $x \in X$ gilt $\varphi(-1, x) \in X$ und damit

$$x = \varphi(0, x) = \varphi\big(1, \varphi(-1, x)\big) \in \phi(X).$$

Also ist ϕ ein Homöomorphismus (siehe B.3.5).)
Nach B.4.5 ist $\lambda(\phi(K)) = \lambda(K)$ für alle $K \Subset X$. Da das Lebesgue-Maß von innen regulär ist (siehe Maßtheorie), gilt $\big((\phi^{-1})_*\lambda\big)(A) = \lambda(\phi(A)) = \lambda(A)$ auch für beliebige $A \in \mathscr{B}_X$, d. h. λ_X ist ϕ^{-1}-invariant und damit auch ϕ-invariant.

Ist (ϕ, X) ein diskretes dS, so heißt ein Punkt $x \in X$ **rekurrent**, falls $x \in \omega(x)$ gilt.

Satz 5.4 *(Poincarescher Wiederkehrsatz)*
Es seien (ϕ, X) ein diskretes dS und μ ein invariantes endliches Maß auf $\mathscr{B} = \mathscr{B}_X$.

1. *Ist $A \in \mathscr{B}$, so ist für μ-fast alle $x \in A$ die Menge der $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi^n(x) \in A$ unendlich.*
2. *Ist (X, d) separabel, sind μ-fast alle $x \in X$ rekurrent.*

Beweis. 1. Für $x \in X$ gilt $\phi^n(x) \in A$ für ∞ viele $n \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn

$$x \in B := \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} \phi^{-n}(A).$$

Also ist zu zeigen

$$\mu(A \setminus B) = 0.$$

Ist $B_m := \bigcup_{n \geq m} \phi^{-n}(A)$, so gilt $\phi^{-1}(B_{m-1}) = B_m$ und damit nach Voraussetzung

$$\mu(B_{m-1}) = \mu(\phi^{-1}(B_{m-1})) = \mu(B_m)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, also induktiv $\mu(B_m) = \mu(B_0)$ für alle m. Da B_m monoton gegen B fällt, ist auch $\mu(B) = \mu(B_0)$ (Stetigkeit von μ von oben; man beachte: μ ist nach Voraussetzung endlich). Wegen $A \subset B_0$ folgt

$$\mu(A \setminus B) \leq \mu(B_0 \setminus B) = \mu(B_0) - \mu(B) = 0.$$

2. Da X separabel ist, existiert eine Folge (x_j) in X so, dass $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{1/k}(x_j).$$

Nach 1. existiert zu jedem Paar (j, k) eine Nullmenge $N_{j,k}$ so, dass für alle $x \in U_{1/k}(x_j) \setminus N_{j,k}$ die Menge der $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi^n(x) \in U_{1/k}(x_j)$ unendlich ist. Dann ist auch

$$N := \bigcup_{j,k \in \mathbb{N}} N_{j,k}$$

eine Nullmenge.
Es sei $x \in X \setminus N$ gegeben. Wir setzen $n_0 := 1$. Sind $n_0 < \cdots < n_{k-1}$ bereits definiert, so existiert ein $j \in \mathbb{N}$ so, dass $x \in U_{1/k}(x_j)$. Also existiert ein $n_k > n_{k-1}$ so, dass $\phi^{n_k}(x) \in U_{1/k}(x_j)$. Für die auf diese Weise induktiv definierte Folge (n_k) gilt

$$d(\phi^{n_k}(x), x) < 2/k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Also ist $x \in \omega(x)$. □

Bemerkung und Definition 5.5 Es seien $D \subset \mathbb{K}^d$ offen und $f \in \mathrm{Lip}(D, \mathbb{K}^d)$. Man nennt dann einen Punkt $x \in X_\infty$ **Poisson-stabil**, falls $x \in \omega(x)$ gilt. Ist x Poisson-stabil, so sind auch alle $y \in \gamma(x)$ Poisson-stabil (denn ist (t_k) eine Folge mit $0 \le t_k \to \infty$ und $\varphi(t_k, x) \to x$, so gilt für $y = \varphi(t, x) \in \gamma(x)$

$$\varphi\big(t_k, \varphi(t,x)\big) = \varphi\big(t, \underbrace{\varphi(t_k, x)}_{\to x}\big) \to \varphi(t,x) \qquad (k \to \infty)).$$

Hieraus ergibt sich leicht ([Ü]; beachte: $\omega(y) = \omega(x)$ für alle $y \in \gamma(x)$), dass für $x \in X_\infty$ gilt: x ist Poisson-stabil genau dann, wenn

$$\overline{\gamma(x)} = \omega(x).$$

Für diskrete Systeme (ϕ, X) gilt entsprechend: $x \in X$ ist rekurrent genau dann, wenn $\overline{\gamma(x)} = \omega(x)$.

Bemerkung 5.6 Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ divergenzfrei. Ist $X \Subset D$ invariant, so sind λ-fast alle $x \in X$ Poisson-stabil.
(Denn: Es gilt $X \subset X_\infty \cap X_{-\infty}$. Aus B.5.3 folgt, dass ϕ auch λ_X-maßerhaltend ist. Da λ_X endlich ist, ergibt sich aus S.5.4 damit die Behauptung.)
Ist

$$x' = f_H(x)$$

ein Hamilton-System mit Hamilton-Funktion $H \in C^2(D, \mathbb{R})$, so ist f_H divergenzfrei (vgl. B.4.6). Ist also $X \Subset D$ invariant, so sind λ-fast alle $x \in X$ Poisson-stabil.

Beispiele 5.7
1. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Drehung ϕ um den Winkel α auf $\mathbb{S}$ maßerhaltend bezüglich m. Im Fall $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$ ist jedes $z \in \mathbb{S}$ periodisch, also $\omega(z) = \gamma(z)$. Im Fall $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ist jeder Orbit dicht, also $\overline{\gamma(z)} = \omega(z) = \mathbb{S}$ für alle z (siehe [Ü]).
2. Da die Winkelverdopplung σ auf $\mathbb{S}$ ebenfalls m-maßerhaltend ist, gilt auch hier $\omega(z) = \overline{\gamma(z)}$ für m-fast alle z. Allerdings gibt es auch Punkte z, die nicht rekurrent sind (zum Beispiel jede 2^n-te Einheitswurzel $\neq 1$).

Beispiele 5.8
1. Ist $x' = f(x)$ die ungedämpfte Schwingung und ist H die Hamiltion-Funktion aus B.3.17, so ist der Abschluss X der Kompomente von $\{H < 2\omega^2\}$, die 0 enthält, kompakt und invariant (vgl. B.3.23). Da das System divergenzfrei ist, sind λ_2-fast alle $x \in X$ Poisson-stabil. Genauer sind hier alle $x \in X^0$ periodisch und für $x \in \partial X$ gilt $\omega(x) = \{(\pi, 0)\}$ oder $\omega(x) = \{(-\pi, 0)\}$. Damit sind nicht alle $x \in X$ Poisson-stabil.
2. Es seien $\omega_1, \omega_2 > 0$. Wir betrachten das lineare System

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $x' = Ax$ divergenzfrei (da spur $A = 0$). Da das System in zwei 2-dimensionale „Teilsysteme“ zerfällt, sieht man leicht (linearer harmonischer Oszillator), dass für alle $r, R > 0$ die Mengen $T_{r,R} := K_r(0,0) \times K_R(0,0)$ invariant ist.
Man kann hier zeigen[5]: Ist $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, so ist $\gamma(x)$ periodisch für alle x. Ist andererseits $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$, so gilt $\overline{\gamma(x)} = \omega(x) = T_{r,R}$ für alle $x \in T_{r,R}$.

Wir befassen uns nun mit der Frage, für welche diskreten dynamischen Systeme invariante Maße existieren. Wir formulieren zunächst verschiedene Hilfsresultate, die auch für sich von Interesse sind.

Satz 5.9 *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist der Banach-Raum $C(X) = (C(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ separabel.*

Beweis. Für $a \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_{n,a} : X \to [0, \infty)$ durch

$$f_{n,a}(x) := \max\big(0, 1 - nd(x,a)\big) \qquad (x \in X).$$

Dann ist $f_{n,a} \in C(X)$ und es gilt $\{f_{n,a} > 0\} = U_{1/n}(a)$. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $A_n \subset X$ mit

$$X = \bigcup_{a \in A_n} U_{1/n}(a).$$

Damit ist $h_n := \sum\limits_{a \in A_n} f_{n,a} \in C(X)$ mit $h > 0$ auf X. Für ein $a \in A_n$ setzen wir $g_{n,a} := f_{n,a}/h_n$. Dann ist

$$0 < \sum_{a \in A_n} g_{n,a} = 1\,.$$

Weiter ist mit $\mathbb{Q}_\mathbb{R} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}_\mathbb{C} := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$

$$L_n := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}_\mathbb{K}}\{g_{n,a} : a \in A_n\}\Big(= \Big\{ \sum_{a \in A_n} c_a g_{n,a} : c_a \in \mathbb{Q}_\mathbb{K}\Big\} \subset C(X)\Big)$$

abzählbar und damit auch $L := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} L_n$.
Nun seien $f \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da X kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\big|f(x) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < 1/n$.

[5] Siehe etwa V.I. Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, Berlin, 1980, S. 163ff

Für $a \in A_n$ wählen wir $c_a \in \mathbb{Q}_\mathbb{K}$ mit $|f(a) - c_a| < \varepsilon/2$. Dann ist $|f(x) - c_a| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{1/n}(a)$. Für $g := \sum_{a \in A_n} c_a g_{n,a} \in L$ gilt damit (beachte: $g_{n,a}(x) = 0$ für $x \notin U_{1/n}(a)$)

$$\big|f(x) - g(x)\big| = \big|\sum_{a \in A_n} (f(x) - c_a)\, g_{n,a}(x)\big| \leq \varepsilon \sum_{a \in A_n} g_{n,a}(x) = \varepsilon \qquad (x \in X),$$

also $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Sind $(E, ||\cdot|| = ||\cdot||_E)$ und $(F, ||| \cdot || = ||\cdot||_F)$ normierte Räume über $\mathbb{K}$, so heißt eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ **beschränkt**, falls $T(U_1[0])$ beschränkt in Y ist. Ist $L(E, F)$ der ($\mathbb{K}$-lineare) Raum der beschränkten linearen Abbildungen von E nach F, so ist durch

$$||T|| := ||T||_{E,F} = \sup_{||e|| \leq 1} ||Te||$$

eine Norm auf $L(E, F)$ definiert (die **Operatornorm**). Damit gilt $||Te|| \leq ||T|| \cdot ||e||$ für alle $e \in E$. Im Weiteren schreiben wir auch kurz $L(E) := L(E, E)$.

Satz 5.10 *Es seien E ein normierter Raum und F ein Banachraum. Weiter sei (T_n) eine Folge in $L(E, F)$ mit*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

und so, dass $(T_n d)_n$ für alle d aus einer in E dichten Menge D konvergiert. Dann konvergiert $(T_n e)_n$ für alle $e \in E$, und durch $Te := \lim_{n\to\infty} T_n e$ ist ein $T \in L(E, F)$ definiert mit $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Beweis. Es seien $e \in E$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $d \in D$ mit $\|e - d\| < \varepsilon$. Weiter existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_n d - T_m d\| < \varepsilon \qquad (n, m \geq N_\varepsilon)\,.$$

Also gilt für $n, m \geq N_\varepsilon$ auch

$$\begin{aligned}\|T_n e - T_m e\| &\leq \big\|T_n(e - d)\big\| + \big|(T_n - T_m)d\big\| + \big\|T_m(d - e)\big\| \\ &\leq 2\varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Damit ist $(T_n e)$ eine Cauchy-Folge in F, also konvergent. Offenbar ist T mit $Te := \lim_{n\to\infty} T_n e$ linear. Ist (n_j) so, dass

$$\|T_{n_j}\| \to \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \qquad (j \to \infty),$$

so folgt für alle $e \in E$ mit $||e|| \leq 1$

$$\|Te\| = \lim_{j\to\infty} \|T_{n_j} e\| \leq \lim_{j\to\infty} \|T_{n_j}\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| .$$

□

Wir benötigen weiterhin einen Darstellungssatz für positive lineare Funktionale auf $(C(X,\mathbb{K}), ||\cdot||_\infty)$. Ist $\Lambda : C(X) \to \mathbb{K}$ linear, so heißt Λ **positiv**, falls $\Lambda f \geq 0$ für jedes $f \in C(X)$ mit $f \geq 0$ gilt. Ist μ ein endliches Maß auf $\mathscr{B}_X$, so ist durch $\Lambda f := \int f\, d\mu$ ein positives beschränktes Funktional auf $C(X)$ definiert mit $||\Lambda|| = \Lambda(1) = \mu(X)$. Umgekehrt gilt

> *Rieszscher Darstellungssatz*[6] : Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann existiert zu jedem positiven linearen Funktional $\Lambda : C(X) \to \mathbb{K}$ genau ein endliches Maß $\mu = \mu(\Lambda)$ auf $\mathscr{B}_X$ mit
>
> $$\Lambda f = \int f\, d\mu \qquad \big(f \in C(X)\big).$$

Wir identifizieren im Weiteren das Maß μ mit Λ und schreiben dann – etwas brutal – auch μf statt Λf.
Es seien X eine Menge und $\phi : X \to X$. Wir definieren den **Kompositionsoperator** $C = C_\phi : \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ mit **Symbol** ϕ durch

$$C_\phi f := f \circ \phi \qquad (f \in \mathbb{K}^X).$$

Dann ist C_ϕ linear mit $C_\phi f \geq 0$ im Falle $f \geq 0$. Ist X ein kompakter metrischer Raum und ist ϕ stetig, so ist $C_\phi \in L(C(X))$ mit $||C_\phi|| = 1$. Wir setzen weiterhin (mit $\sum_{j=0}^{-1} := 0$)

$$S_n = S_{n,\phi} := \sum_{j=0}^{n-1} C^j \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Satz 5.11 *(Krylov-Bogolubov)*
Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum und ist $\phi : X \to X$ stetig, so existiert ein ϕ-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_X$.

Beweis. Nach S. 5.9 ist $C(X)$ separabel. Es sei (f_j) eine Folge in $C(X)$ so, dass $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ dicht in $C(X)$ ist.
Ist $p \in X$ fest, so ist durch

$$\mu_n f := \frac{1}{n}(S_n f)(p) \qquad \big(f \in C(X)\big)$$

[6] Einen Beweis einer allgemeineren Version findet man etwa in
W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1987

eine Folge positiver linearer Funktionale μ_n auf $C(X)$ definiert mit

$$\|\mu_n\| = \mu_n 1_X = (S_n 1_X)(p)/n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Aus $|\mu_n f_j| \leq \|f_j\|_\infty$ folgt mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine unendliche Menge $I_j \subset \mathbb{N}$ existiert mit $I_j \subset I_{j-1}$ und so, dass $(\mu_n f_j)_{n\in I_j}$ konvergiert. Definiert man $n_0 := 1$ und wählt man $n_k \in I_k$ mit $n_k > n_{k-1}$, so konvergiert $(\mu_{n_k} f_j)_k$ für alle $j \in \mathbb{N}$ (Diagonalfolgenargument). Nach S. 5.10 existiert

$$\mu f := \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} f$$

für alle $f \in C(X)$, und μ ist ein (ebenfalls positives) lineares Funktional auf $C(X)$ mit

$$\mu(X) = \mu 1_X = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} 1 = 1\,.$$

Also definiert μ auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_X$. Weiter gilt für $f \in C(X)$

$$\begin{aligned}\mu(f\circ\phi) \leftarrow \mu_{n_k}(f\circ\phi) &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}(f\circ\phi^j)(p) = \\ &= \mu_{n_k} f + \frac{1}{n_k}\big((f\circ\phi^{n_k})(p) - f(p)\big) \to \mu f \qquad (k\to\infty),\end{aligned}$$

also $\mu f = \mu(f\circ\phi)$ und damit nach dem Transformationssatz ($\to$ Maßtheorie)

$$\mu f = \int (f\circ\phi)\,d\mu = \int f d(\phi_*\mu) = (\phi_*\mu)f.$$

Folglich ist $\mu = \phi_*\mu$. □

Man kann den Satz von Krylov-Bogolubov auch so interpretieren, dass ϕ_* als Selbstabbildung auf der Menge der Borel-Wahrscheinlichkkeitsmaße einen Fixpunkt hat.[7]

Wir betrachten nun wieder einen allgemeinen Maßraum $(X, \mathscr{S}, \mu)$ und eine maßerhaltende Abbildung $\phi : X \to X$. Nach dem Transformationssatz ist eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ integrierbar genau dann, wenn $f\circ\phi$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int f d\mu = \int f d(\phi_*\mu) = \int (f\circ\phi)\,d\mu\,. \tag{5.1}$$

Es seien $p \geq 1$ und $L_p(\mu) = (L_p(\mu,\mathbb{K}), ||\cdot||_p)$ der (Banach-)Raum der p-integrierbaren Funktionen mit (der üblichen Identifikation fast überall gleicher Funktionen und) der Norm

$$\|f\| = \|f\|_p := \Big(\int |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

Aus (5.1) (angewandt auf $|f|^p$) folgt, dass wieder $C = C_\phi \in L(L_p(\mu))$ gilt, jetzt sogar mit $\|Cf\|_p = ||f||_p$ für alle $f \in L_p(\mu)$ (m.a.W. C_ϕ ist eine Isometrie auf $L_p(\mu)$).

[7]Hat die Abbildung ϕ selbst einen Fixpunkt $p \in X$, so ist das Dirac-Maß δ_p ein invariantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß.

Satz 5.12 *(Maximale Ungleichung)*
Es seien $(X,\mathscr{S},\mu)$ ein Maßraum und $\phi : X \to X$ maßerhaltend. Ist $f \in L_1(\mu,\mathbb{R})$ und $E := \big\{ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} S_n f > 0\big\}$, so gilt

$$\int\limits_E f\,d\mu \geq 0\,.$$

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $g_N := \max\limits_{0\leq n\leq N} S_n f\big(\in L_1(\mu)\big)$ und $E_N := \{g_N > 0\}$. Dann gilt $E_n \uparrow E$ $(N \to \infty)$ und damit nach dem Satz von Lebesgue (da $|f1_{E_N}| \leq |f|$)

$$\int\limits_{E_N} f\,d\mu \to \int\limits_E f d\mu\,.$$

Also reicht es, zu zeigen: $\int\limits_{E_N} f \geq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$.
Für $0 \leq n \leq N$ gilt $g_N - S_n f \geq 0$, also auch $Cg_N \geq CS_n f = S_{n+1} f - f$. Damit ergibt sich

$$Cg_N + f \geq \max_{0\leq n\leq N} S_{n+1} f \geq \max_{1\leq n\leq N} S_n f\,,$$

also für $x \in E_N$ auch

$$Cg_N(x) + f(x) \geq \max_{0\leq n\leq N} S_n\, f(x) = g_N(x)\,.$$

Folglich ist $f1_{E_N} \geq (g_N - Cg_N)\,1_{E_N}$ und damit

$$\int\limits_{E_N} f d\mu \geq \int\limits_{E_N} g_N\,d\mu - \int\limits_{E_N} Cg_N\,d\mu = \int g_N\,d\mu - \int\limits_{E_N} \underbrace{Cg_N}_{\geq 0}\,d\mu \geq \|g_N\|_1 - \|Cg_N\|_1 = 0\,.$$

□

Bemerkung 5.13 Der Beweis zeigt, dass die Aussage des Satzes auch für allgemeine lineare positive Operatoren U auf $L_1(\mu,\mathbb{R})$ mit $||U|| \leq 1$ anstelle von C gilt.

Bemerkung und Definition 5.14 Es seien X eine Menge und $\phi : X \to X$. Ist $M \subset X$ invariant (also $\phi(M) \subset M$), so heißt M **vollständig invariant**, falls auch $\phi^{-1}(M) \subset M$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\phi^{-1}(M) = M$ erfüllt ist. Für $f : X \to \mathbb{K}$ gilt dann

$$(f\circ\phi)1_M = (f1_M)\circ\phi,$$

also auch $(S_n f)1_M = S_n(f1_M)$. Damit ergibt sich in der Situation von S.5.12: Ist $M \subset X$ vollständig invariant, so ist $E \cap M = \{\sup_n S_n f 1_M > 0\}$ und damit auch

$$\int\limits_{E\cap M} f\,d\mu = \int\limits_{E\cap M} f1_M\,d\mu \geq 0.$$

Satz 5.15 *(individueller Ergodensatz; Birkhoff)*
Es seien $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\phi : X \to X$ maßerhaltend. Dann ist für jedes $f \in L_1(\mu)$ die Folge $(S_n f/n)$ fast überall konvergent.

Beweis. Ohne Einschränkung sei f reellwertig (ansonsten: Ref und Imf betrachten). Für $a < b$ betrachten wir die Mengen

$$E_{a,b} := \big\{ \liminf_{n\to\infty} S_n f/n < a < b < \limsup_{n\to\infty} S_n f/n \big\}$$

und

$$E := \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a<b}} E_{a,b} \,.$$

Dann existiert $\lim (S_n f)(x)/n$ für alle $x \notin E$. Also genügt es, zu zeigen, dass $E_{a,b}$ für jedes a, b eine μ-Nullmenge ist (dann gilt dies auch für E).
Nach Definition ist $E_{a,b}$ vollständig invariant bezüglich ϕ (beachte: $(S_n f)\circ\phi = CS_n f = S_{n+1}f - f$ und $f/n \to 0$ punktweise auf X). Da μ endlich ist, sind Konstanten integrierbar. Anwendung von B.5.14 auf $f-b$ (wobei $c := c1_X$) liefert mit $E_b := \{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n f > b\}$

$$\int\limits_{E_b \cap E_{a,b}} (f-b)\, d\mu \geq 0\,.$$

Dabei gilt $E_b \cap E_{a,b} = E_{a,b}$, also

$$\int\limits_{E_{a,b}} (f-b)\, d\mu \geq 0\,.$$

Entsprechend ergibt sich durch Anwendung von B.5.14 auf $a - f$

$$\int\limits_{E_{a,b}} (a-f)\, d\mu \geq 0$$

und damit durch Addition

$$(a-b)\mu(E_{a,b}) = \int\limits_{E_{a,b}} (a-b)\, d\mu \geq 0\,.$$

Wegen $a < b$ ist $\mu(E_{a,b}) = 0$. □

Ist μ endlich, so gilt $L_p(\mu) \subset L_1(\mu)$ und $f \mapsto \int f\, d\mu$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $L_p(\mu)$ (nach der Hölder-Ungleichung; siehe Maßtheorie).[8] Wir schreiben daher auch wieder kurz

$$\mu f := \int f\, d\mu.$$

[8] Genauer ist für alle $1 \leq p' < p$ die Einbettung $j : L_p(\mu) \to L_{p'}(\mu)$, $j(f) = f$, stetig

Satz 5.16 *(L_p-Ergodensatz; von Neumann)*
Es seien $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\phi : X \to X$ maßerhaltend. Dann konvergiert für alle $p \geq 1$ die Folge $(S_n/n)_n$ punktweise auf $L_p(\mu)$ gegen $T^* \in L\big(L_p(\mu)\big)$, und es gilt $\mu T^* = \mu$ sowie $C_\phi T^* = T^*$. Weiterhin ist $T^* f$ für alle $f \in L_p(\mu)$ auch punktweise fast-überall Grenzwert von $(S_n f/n)$.

Beweis. Es sei $g : X \to \mathbb{K}$ beschränkt und messbar. Dann ist $g \in L_1(\mu)$. Nach dem individuellen Ergodensatz existiert eine Menge $E \in \mathscr{S}$ mit $\mu(E) = 0$ und so, dass $(S_n g/n)$ auf $X \backslash E$ punktweise konvergiert. Damit definieren wir $g^* := \lim\limits_{n\to\infty} 1_{X\backslash E}(S_n g)/n$. Dann ist g (messbar und) beschränkt mit

$$||g^*||_\infty \leq ||g||_\infty$$

(da $||C^j g||_\infty \leq ||g||_\infty$). Insbesondere ist $g^* \in L_p(\mu)$ und aus $\left|\frac{1}{n} S_n g - g^*\right|^p \leq (2||g||_\infty)^p$ ergibt sich mit dem Satz von Lebesgue

$$\frac{1}{n} S_n g \to g^* \quad \text{in } L_p(\mu).$$

Da die beschränkten messbaren Funktionen dicht in $L_p(\mu)$ liegen (siehe Maßtheorie) und da $\|S_n/n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich die Existenz von $T^* f := \lim S_n f/n$ für alle $f \in L_p(\mu)$ und $T^* \in L(L_p(\mu))$ aus S.5.10.
Es sei $f \in L_p(\mu)$ gegeben. Nach (5.1) gilt $\mu f = \mu(C^j f)$ und damit

$$\mu f = \mu(S_n f/n) \to \mu(T^* f) \qquad (n \to \infty),$$

also $\mu(T^* f) = \mu f$. Aus

$$CT^* f \leftarrow C(S_n f/n) = S_{n+1} f/n + f/n \to T^* f \quad \text{ in } L_p(\mu)$$

folgt auch $CT^* f = T^* f$. Die Zusatzbehauptung ergibt sich aus dem individuellen Ergodensatz und der Tatsache, dass eine Folge, die in $L_p(\mu)$ konvergiert, eine fast überall konvergente Teilfolge hat (siehe Maßtheorie). □

Bemerkung und Definition 5.17 Es seien $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum* und $\phi : X \to X$ maßerhaltend. Ist $\mathscr{S}_\phi$ die Menge der vollständig invarianten Mengen in $\mathscr{S}$, so ist $\mathscr{S}_\phi$ eine σ-Algebra. Die Abbildung ϕ heißt (μ-)**ergodisch**, falls $\mu(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathscr{S}_\phi$ gilt.

Im Weiteren sei

$$A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Damit gilt: Sind A und A_j $(j \in \mathbb{N})$ Mengen, so ist $A_1 \bigtriangleup A_n \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} (A_j \bigtriangleup A_{j+1})$ und $A \bigtriangleup (\bigcup\limits_j A_j) \subset \bigcup\limits_j (A \bigtriangleup A_j)$.

Satz 5.18 *Es seien $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\phi : X \to X$ maßerhaltend.*

1. *Ist $A \in \mathscr{S}$ mit $\mu(\phi^{-1}(A) \triangle A) = 0$, so existiert ein $B \in \mathscr{S}_\phi$ mit $\mu(A \triangle B) = 0$.*

2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   a) *ϕ ist ergodisch.*

   b) *Ist $A \in \mathscr{S}$ mit $\mu(\phi^{-1}(A) \triangle A) = 0$, so ist $\mu(A) \in \{0, 1\}$.*

   c) *Ist $f \in L_1(\mu)$ mit $C_\phi f = f$ in $L_1(\mu)$, so ist $f = (\mu f)1_X$ in $L_1(\mu)$.*

   d) *Ist $f : X \to \mathbb{K}$ messbar und beschränkt mit $f \circ \phi = f$ fast sicher, so ist $f = (\mu f)1_X$ fast sicher.*

Beweis. 1. Es sei $A \in \mathscr{S}$ mit $\mu(\phi^{-1}(A) \triangle A) = 0$. Da ϕ maßerhaltend ist, gilt

$$\mu\big(\phi^{-n}(A) \triangle A\big) \le \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\phi^{-j-1}(A) \triangle \phi^{-j}(A)\big) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu\big(\phi^{-j}(\phi^{-1}(A) \triangle A)\big) = 0$$

für jedes $n \ge 1$. Mit $B_m := \bigcup\limits_{n \ge m} \phi^{-n}(A)$ ist also

$$\mu\big(A \triangle B_m\big) \le \sum_{n \ge m} \mu\big(A \triangle \phi^{-n}(A)\big) = 0 \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Wir setzen $B = \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}_0} B_m$. Dann ist $\phi^{-1}(B) = B$ (vgl. Beweis zu S.5.4), also $B \in \mathscr{S}_\phi$. Da die Folge (B_m) monoton fallend ist, erhalten wir aus der Stetigkeit von oben und unten

$$\mu(A \triangle B) = \lim_{m\to\infty} \mu(A \setminus B_m) + \lim_{m\to\infty} \mu(B_m \setminus A) = \lim_{m\to\infty} \mu(A \triangle B_m) = 0.$$

2. a) $\Rightarrow$ b) folgt aus 1. (man beachte: aus $\mu(A \triangle B) = 0$ folgt $\mu(A) = \mu(B)$).
b) $\Rightarrow$ c): Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \circ \phi = f$ fast sicher. Für $b \in \mathbb{R}$ sei $A_b = \{f < b\}$. Wegen $f \circ \phi = f$ fast sicher gilt

$$\mu(\phi^{-1}(A_b) \triangle A_b) = \mu(\{f \circ \phi < b\} \triangle A_b) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\mu(A_b) \in \{0, 1\}$. Setzt man $c := \sup\{b \in \mathbb{R} : \mu(A_b) = 0\}$, so gilt $\mu(A_c) = 0$ mit Stetigkeit von unten und $\mu(\{f \le c\}) = 1$ mit Stetigkleit von oben. Damit ist $f = c1_X$ fast sicher. Aus $\mu(1_X) = 1$ folgt $c = \mu f$.
c) $\Rightarrow$ d) ist klar.
d) $\Rightarrow$ a): Für $A \in \mathscr{S}_\phi$ gilt $1_A \circ \phi = 1_A$ und daher $1_A = \mu(A)1_X$ fast sicher, also $\mu(A) \in \{0, 1\}$. □

Beispiele 5.19 1. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Drehung $\phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ um dem Winkel α genau dann m-ergodisch, wenn $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ gilt.
(Denn: Es sei $f \in L_2(m)$. Mit $f_k(z) = z^k$ gilt $f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\nu) f_\nu$ in $L_2(m)$ mit den Fourier-Koeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \int f\overline{f_k}\, dm = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\, dt \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(siehe Fourier-Analysis). Folglich ist

$$C_\phi f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\nu)(C_\phi f_\nu) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\nu)e^{i\nu\alpha} f_\nu.$$

Nach der Parsevalschen Gleichung ist $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\nu)|^2 = ||f||_2^2$ und damit insbesondere $f = g$ in $L_2(m)$ genau dann, wenn $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ für alle k. Also ist $(\widehat{C_\phi f})(k) = e^{ik\alpha}\widehat{f}(k)$ für alle k. Ist nun $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, so gilt $e^{ik\alpha} \neq 1$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Für $f \in L_2(m)$ mit $C_\phi f = f$ ist also $\widehat{f}(k) = 0$ für alle $k \neq 0$ und damit f fast sicher konstant. Nach S.5.18 ist ϕ ergodisch. Ist umgekehrt $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$, so sieht man leicht ([Ü]), dass ϕ nicht ergodisch ist.)
2. Die Winkelverdopplung $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ist m-ergodisch.
(Denn: Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\nu)|^2$ folgt $\widehat{f}(n) \to 0$ für $n \to \pm\infty$. Weiter ist $(\widehat{C_\sigma f})(2k) = \widehat{f}(k)$ und damit im Falle $C_\sigma f = f$ induktiv für $k \neq 0$

$$\widehat{f}(k) = \widehat{f}(2^n k) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also $\widehat{f}(k) = 0$ für $k \neq 0$. Wieder ist f fast sicher konstant.)

Satz 5.20 *Es sei $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $\phi : X \to X$ maßerhaltend, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) ϕ ist ergodisch

b) Für alle $f \in L_1(\mu)$ gilt $T^* f = (\mu f)1_X$.

c) (Zeitmittel = Raummittel) Für alle $f \in L_1(\mu)$ gilt

$$\frac{1}{n} S_n f \to (\mu f)1_X \qquad \mu\text{-fast sicher.}$$

d) Für alle $A \in \mathscr{S}$ gilt

$$\frac{1}{n}\big|\{0 \le j < n : \phi^j(x) \in A\}\big| \to \mu(A) \quad \text{für fast alle } x \in X.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach S.5.16 gilt $C_\phi T^* f = T^* f$ und $\mu T^* f = \mu f$. Da ϕ ergodisch ist, ergibt sich $T^* f = (\mu f) 1_X$ fast sicher mit S.5.18.
b) $\Rightarrow$ c) Nach S.5.16 ist T^* fast sicherer Grenzwert von $(S_n f/n)$.
c) $\Rightarrow$ d): Ist $A \in \mathscr{S}$, so gilt $|\{j < n : \phi^j(x) \in A\}| = S_n 1_A(x)$ für alle $x \in X$. Damit ergibt sich die Behauptung aus c) mit $f = 1_A$.
d) $\Rightarrow$ a): Ist $A \in \mathscr{S}_\phi$, so ist

$$\frac{1}{n}\big|\{0 \leq j < n : \phi^j(x) \in A\}\big| = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Also ist $\mu(A) \in \{0, 1\}$ nach d). $\square$

Bemerkung 5.21 Es seien (X, d) ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_X$ so, dass $\mu(U) > 0$ für alle offenen Mengen $U \subset X$. Ist $\phi : X \to X$ ergodisch, so gilt $\omega(x) = X$ für fast alle $x \in X$ (vgl B.2.8).
(Denn: Ist $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von X, so existiert nach S.5.20 d) zu jedem k eine Nullmenge N_k so, dass die Menge $\gamma^+(\phi^n(x)) \cap U_k$ unendlich ist für alle $x \notin N_k$ und alle n (man beachte: $\mu(U_k) > 0$). Ist $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$, so ist N eine Nullmenge mit der Eigenschaft, dass $\gamma^+(\phi^n(x)) \cap U_k$ unendlich ist für alle $x \notin N$ und alle (n, k). Also ist $\gamma^+(\phi^n(x))$ dicht in X für alle $x \notin N$ und alle n.)

Bemerkung und Definition 5.22 Ist $(X, \mathscr{S})$ ein Messraum, so heißt eine messbare Abbildung $\phi : X \to X$ **eindeutig ergodisch** (bezüglich $\mathscr{S}$), falls *genau* ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathscr{S}$ existiert. Dann ist ϕ insbesondere μ-ergodisch.
(Denn: Es sei $A \in \mathscr{S}_\phi$ mit $\mu(A) > 0$. Dann ist das bedingte Maß $\mu_A : \mathscr{S} \to [0, 1]$ mit

$$\mu_A(B) := \mu(A \cap B)/\mu(A) \quad (B \in \mathscr{S})$$

ebenfalls ϕ-invariant. Also ist $\mu_A = \mu$ und damit $1 = \mu_A(A) = \mu(A)$.)

Satz 5.23 *Es seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_X$ und $\phi : X \to X$ maßerhaltend. Dann sind äquivalent:*

a) ϕ ist eindeutig ergodisch.

b) Für alle $f \in C(X)$ konvergiert $(S_n f/n)$ gleichmäßig auf X gegen $(\mu f) 1_X$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Angenommen, es existiert ein $g \in C(X)$ so, dass $(S_n g/n)$ nicht gleichmäßig gegen $(\mu g) 1_X$ konvergiert. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, eine Folge (p_n) in X und eine Folge $m_n \to \infty$ mit

$$|S_{m_n} g(p_n)/m_n - \mu g| \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ist $\nu_n f := S_{m_n} f(p_n)/m_n$ für $f \in C(X)$, so sieht man wie im Beweis zu S.5.11 (mit ν_n statt μ_n), dass für eine Teilfolge (n_k)

$$\nu f := \lim_{k\to\infty} \nu_{n_k} f$$

für alle $f \in C(X)$ existiert, und dass ν ein ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}_X$ definiert. Nach Konstruktion ist $\mu g \neq \nu g$. Widerspruch.
b) $\Rightarrow$ a): Ist ν ein weiteres invariantes Borel-Maß, so gilt für $f \in C(X)$ aufgrund der Stetigkeit des Funktionals ν

$$\nu f = \nu(S_n f/n) \to \nu(\mu f)1_X = \mu f \quad (n \to \infty).$$

□

Bemerkung 5.24 Da $||S_n/n|| \leq 1$ gilt, reicht es nach S.5.10 zum Nachweis der Bedingung b) aus dem obigen Satz zu zeigen, dass für alle g aus einer in $C(X)$ dichten Teilmenge gleichmäßige Konvergenz von $(S_n g/n)$ auf X gegen $(\mu g)1_X$ gilt.

Beispiel 5.25 Ist $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ und ϕ die Drehung um den Winkel α auf $\mathbb{S}$, so ist ϕ eindeutig ergodisch und es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(e^{i\alpha j}z) = \frac{1}{n}S_n f(z) \to \int f\,dm \quad (n \to \infty)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{S}$ für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{S} \to \mathbb{K}$.
(Denn: Der Unterraum $L := \operatorname{span}\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ der trigonometrischen Polynome ist (etwa nach dem Satz von Féjer; siehe Analysis) dicht in $C(\mathbb{S})$. Für $k \neq 0$ gilt $e^{i\alpha k} \neq 1$, also

$$S_n f_k(z) = \sum_{j=0}^{n-1}(e^{i\alpha j}z)^k = f_k(z)\frac{1-e^{i\alpha k n}}{1-e^{i\alpha k}} \quad (z \in \mathbb{S})$$

und damit

$$||\frac{1}{n}S_n f_k||_\infty \leq \frac{2}{n|1-e^{i\alpha k}|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Außerdem ist $S_n f_0/n = S_n 1_{\mathbb{S}}/n = f_0$. Also folgt für $g = \sum_k \lambda_k f_k \in L$ mit $\int f_k\,dm = \delta_{k,0}$

$$\frac{1}{n}S_n g(z) = \sum_k \lambda_k \frac{1}{n} S_n f_k(z) \to \lambda_0 = \int g\,dm \quad (n \to \infty)$$

gleichmäßig auf $\mathbb{S}$. Mit B.5.24 und S.5.23 ergibt sich die Behauptung.)

6 Lineare Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir diskrete lineare Systeme.

Bemerkung und Definition 6.1 Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein separabler normierter Raum (über $\mathbb{K}$). Ein Operator $T \in L(X)$ heißt **hyperzyklisch**, falls das dS (T, X) einen dichten Orbit hat. Nach B.2.8 und B.2.22 ist dies gleichbedeutend damit, dass das System transitiv an ∞ ist. Ist (T, X) mischend an ∞, so ist (T, X) auch transitiv an ∞, also hyperzyklisch. Wir sagen dann auch kurz, T sei mischend.

Ist T hyperzyklisch, so ist notwendig $||T|| > 1$ (sonst gilt $||T^n x|| \le ||x||$ für alle $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ und damit ist jeder Orbit beschränkt). Mithilfe der Jordan-Zerlegung kann man zeigen, dass lineare Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen nicht hyperzyklisch sein können. Wir werden sehen, dass die Situation im unendlich-dimensionalen Fall grundlegend anders ist.

Bemerkung 6.2 (Kitai-Kriterium) Es seien $(X, ||\cdot||)$ ein separabler normierter Raum und $T \in L(X)$. Gibt es dichte Teilmengen X_0 und Y_0 von X mit $T^n x \to 0$ für alle $x \in X_0$ und so, dass für alle $y \in Y_0$ eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to 0$ und $T^n u_n \to y$ existiert, so ist T mischend.
(Denn: Es seien $U, V \subset X$ offen und nichtleer. Nach Voraussetzung existieren $x \in U \cap X_0$ und $y \in V \cap Y_0$. Ist $I \subset \mathbb{N}$ unendlich, so existiert also ein $n \in I$ mit

$$x + u_n \in U \quad \text{und} \quad T^n(x + u_n) \in V.$$

Damit ist T mischend.)

Beispiel 6.3 Es sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten den (Banach-)Raum

$$\ell_p := \{x = (x_k)_{k=0}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} : \sum_{k=0}^\infty |x_k|^p < \infty\}$$

mit

$$||x||_p := \Big(\sum_{k=0}^\infty |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Weiter sei $T : \ell_p \to \ell_p$ der Linksshift, also $T(x) := (x_{k+1})$ für $x = (x_k) \in \ell_p$. Man sieht leicht, dass $||T|| = 1$ gilt. Also ist $T \in L(\ell_p)$, aber nicht hyperzyklisch.
Andererseits gilt: Für jedes $r > 1$ ist rT mischend.
(Denn: Aus der Definition von ℓ_p ergibt sich leicht, dass er Unterraum X_0 der abbrechenden Folgen

$$X_0 := \operatorname{span}\{(\delta_{j,k})_{k=0}^\infty : j \in \mathbb{N}_0\}$$

dicht in ℓ_p ist. Offensichtlich gilt für jedes $x \in X_0$ damit $T^n(x) = 0$ für n genügend groß. Also ist die die erste Bedingung aus B.6.2 für rT erfüllt. Es sei $S : \ell_p \to \ell_p$ der Rechtsshift, also $S(y) := (y_{k-1})$ mit $y_{-1} := 0$ für $y = (y_k) \in \ell_p$. Für $y \in \ell_p$ ist $||Sy|| = ||y||$ und $(rT)(r^{-1}S)(y) = y$. Also gilt $u_n := (r^{-1}S)^n(y) \to 0$ $(n \to \infty)$ in ℓ_p und $(rT)^n(u_n) = y$. Damit ist die zweite Bedingung sogar mit $Y_0 = \ell_p$ erfüllt.)

Bemerkung 6.4 Man sieht leicht ([Ü]), dass die Aussage des Kitai-Kriteriums auch gilt, wenn die Mengen X_0 und Y_0 lediglich einen dichten Spann haben. Wir verwenden das Kriterium im Weiteren auch in dieser Variante.

Schon bei Flüssen haben wir gesehen, dass dem Spektrum eines linearen Operators eine entscheidende Rolle im Hinblick auf das dynamische Verhalten zukommt. Wir wollen nun zeigen, dass dies bei diskreten linearen Systemen auch der Fall ist. Wenn nicht anders gesagt setzen wir im Weiteren stets voraus, dass $(X, ||\cdot||)$ ein vom Nullraum verschiedener *separabler Banach-Raum über* $\mathbb{C}$ ist und schreiben $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sowie $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Bemerkung und Definition 6.5 Es sei $T \in L(X)$. Dann heißt

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\,\mathrm{id} \text{ nicht bijektiv}\}$$

Spektrum von T. Außerdem nennt man die Menge $\sigma_0(T)$ der Eigenwerte von T, also der $\lambda \in \sigma(T)$, für die $T - \lambda\mathrm{id}$ nicht injektiv ist, das **Punktspektum** von T. Damit gilt unmittelbar: Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt $\sigma(\alpha T) = \alpha\sigma(T)$ und $\sigma_0(\alpha T) = \alpha\sigma_0(T)$. Weiter kann man zeigen, dass das Spektrum nichtleer (wichtig dabei: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $X \neq \{0\}$) und kompakt ist mit

$$r(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} \ (\leq ||T||)$$

(siehe Funktionalanalysis). Dabei nennt man $r(T)$ den **Spektralradius** von T.

Beispiele 6.6 1. Wir betrachten den Linksshift T auf ℓ_p. Man rechnet leicht nach, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{D}$ die geometrische Folge (λ^k) ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist und dass der entsprechende Eigenraum eindimensional ist. Außerdem ist $\sigma_0(T) = \mathbb{D}$, d. h. es gibt keine Eigenwerte außerhalb von $\mathbb{D}$. Aus $||T|| = 1$ folgt $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ und mit der Abgeschlossenheit des Spektrums damit $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.
2. (Volterra Operator) Es sei $V : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds \qquad (t \in [0,1]).$$

Dann gilt ([Ü]): $||V|| = 1$ und $r(V) = 0$, also $\sigma(V) = \{0\}$. Außerdem ist $\sigma_0(V) = \emptyset$.

Bemerkung 6.7
1. Aus der Definition des Spektralradius ergibt sich unmittelbar, dass für alle $r > r(T)$ ein $C > 0$ existiert mit $||T^n|| \leq Cr^n$. Ist $r(T) < 1$, also $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$, so gilt damit insbesondere $T^n x \to 0$ für alle $x \in X$.
2. Ist $0 \notin \sigma(T)$, so existiert T^{-1}. Man kann zeigen, dass $T^{-1} \in L(X)$ gilt (die Stetigkeit ergibt sich etwa aus dem Graphensatz; siehe Funktionalanalysis) mit $\sigma(T^{-1}) = 1/\sigma(T)$. Damit erhält man: Ist $\sigma(T) \subset \mathbb{D}^*$, also $\sigma(T^{-1}) \subset \mathbb{D}$, so gilt $||T^n x|| \to \infty$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$.
(Denn: Es sei $||T^{n_j} x|| \leq M$ für eine Teilfolge (n_j). Sind $C > 0$ und $r < 1$ wie in 1. für T^{-1} statt T, so gilt $||x|| \leq ||T^{-n_j}|| \cdot ||T^{n_j} x|| \leq CMr^{n_j} \to 0$ für $j \to \infty$, also $x = 0$.)

Bemerkung 6.8 Für $T \in L(X)$ und $\Lambda \subset \mathbb{C}$ schreiben wir

$$X_\Lambda := X_{\Lambda,T} := \{x \in X : Tx = \lambda x \text{ für ein } \lambda \in \Lambda\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Kern}(T - \lambda \operatorname{id}).$$

Falls $X_{\mathbb{D}}$ und $X_{\mathbb{D}^*}$ dichten Spann haben, so ist T mischend.
(Denn: Es seien $x \in X_{\mathbb{D}}$, $y \in X_{\mathbb{D}^*}$ sowie $\lambda \in \mathbb{D}$, $\mu \in \mathbb{D}^*$ mit $Tx = \lambda x$ und $Ty = \mu y$. Dann gilt

$$T^n x = \lambda^n x \to 0 \quad \text{und} \quad u_n := \mu^{-n} y \to 0$$

für $n \to \infty$. Dabei ist $T^n u_n = y$ für alle n. Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Kitai-Kriterium.)

Definition 6.9 Es seien $T \in L(X)$ und $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Ein Abbildung $\mathbf{v} : \Lambda \to X$ heißt **Λ-Eigenvektorfeld**, falls $T\mathbf{v}(\lambda) = \lambda \mathbf{v}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt.

Bemerkung und Definition 6.10 Es sei $\mathbf{v} : [a, b] \to X$ stetig. Dann kann man das Regel-Integral

$$\int_a^b \mathbf{v} := \int_a^b \mathbf{v}(t)\, dt \in X$$

genauso definieren wie für $\mathbb{K}$-wertige Funktionen und es gelten die „üblichen“ Eigenschaften. Ist $(Y, ||\cdot||)$ ein weiterer Banach-Raum, so gilt außerdem für $T \in L(X, Y)$

$$T \int_a^b \mathbf{v} = \int_a^b T\mathbf{v}. \tag{6.1}$$

Ist $\mathbf{v} : \mathbb{S} \to X$ stetig, so schreiben wir auch

$$\int \mathbf{v}\, dm := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(e^{it})\, dt$$

(man beachte dabei, dass im skalaren Fall $X = \mathbb{K}$ die Definition im Einklang steht mit der bereits oben eingeführen des Integrals bezüglich des Maßes m). Damit gilt das wichtige *Riemann-Lebesgue Lemma*:

$$\widehat{\mathbf{v}}(k) := \int \overline{f_k}\mathbf{v}\, dm = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\mathbf{v}(e^{it})\, dt \to 0 \quad (k \to \pm\infty).$$

Der Beweis ([Ü]) ergibt sich durch gleichmäßige Approximation von $\mathbf{v}$ durch Treppenfunktionen und der Tatsache, dass $\int_a^b e^{-ikt}dt \to 0$ $(k \to \pm\infty)$ für alle $a < b$ gilt.

Bemerkung 6.11 Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$$X' := \{x' : X \to \mathbb{K} : x' \text{ linear und stetig}\} = L(X, \mathbb{K})$$

der Dualraum von X. Man schreibt dann meist $\langle x, x'\rangle$ statt $x'(x)$. Aus dem Satz von Hahn-Banach (siehe Funktionalanlysis) ergibt sich unmittelbar folgendes äußerst nützliche Kriterium für die Approximierbarkeit von x aus einem Unterraum L heraus:

> *Sind $M \subset X$, $L := \operatorname{span}(M)$ und $x \in X$, so gilt $x \in \overline{L}$ genau dann, wenn für jedes $x' \in X'$ mit $x' \perp M$ (d. h. $x'|_M = 0$) auch $x' \perp x$ (d. h. $\langle x, x'\rangle = 0$) gilt.*

Ist $M \subset X$. so ergibt sich insbesondere, dass M genau dann dichten Spann in X hat, wenn aus $x' \perp M$ schon $x' = 0$ folgt.

Satz 6.12 *Es sei $T \in L(X)$. Existiert ein stetiges $\mathbb{S}$-Eigenvektorfeld $\mathbf{v}$ so, dass $\mathbf{v}(\mathbb{S})$ dichten Spann hat, so ist T mischend.*

Beweis. Da $\mathbf{v} : \mathbb{S} \to X$ stetig ist, existiert

$$\widehat{\mathbf{v}}(k) := \int \overline{f_k}\mathbf{v}\, dm \in X \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

und es gilt $\widehat{\mathbf{v}}(k) \to 0$ $(k \to \pm\infty)$ nach dem Riemann-Lebesgue Lemma.
Es seien $X_0 := \{\widehat{\mathbf{v}}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ und $x' \in X'$ mit $x' \perp X_0$. Dann ist

$$f := \langle \mathbf{v}, x'\rangle \in C(\mathbb{S}, \mathbb{C}) \subset L_2(m, \mathbb{C})$$

und mit (6.1)

$$\widehat{f}(k) = \int \overline{f_k}\langle \mathbf{v}, x'\rangle\, dm = \langle \int \overline{f_k}\mathbf{v}\, dm, x'\rangle = \langle \widehat{\mathbf{v}}(k), x'\rangle = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt $f = 0$ in $L_2(m)$ und aus der Stetigkeit von f dann auch $f \equiv 0$. Da $\mathbf{v}(\mathbb{S})$ dichten Spann in X hat, ergibt sich $x' = 0$ mit B.6.11. Also hat X_0 dichten Spann in X, wieder nach B.6.11. Weiter erhalten wir für $k \in \mathbb{Z}$ mit (6.1)

$$T^n\widehat{\mathbf{v}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}T^n\mathbf{v}(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-n)t}\mathbf{v}(e^{it})\,dt = \widehat{\mathbf{v}}(k-n) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

und für $u_{n,k} := \widehat{\mathbf{v}}(n+k)$ sowohl $u_{n,k} \to 0$ $(n \to \infty)$ als auch $T^n u_{n,k} = \widehat{\mathbf{v}}(k)$. Mit dem Kitai-Kriterium (und $Y_0 = X_0$) folgt die Behauptung. □

Um die vorangegangen Ergebnisse anwenden zu können, braucht man Aussagen über Dualräume.

Beispiel 6.13 $(\ell_p' = \ell_q)$ Es sei $p \in (1,\infty)$ und q so, dass $p+q = pq$. Für jedes $y \in \ell_q$ ist durch

$$j(y)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k\overline{y_k} \qquad (x = (x_k) \in \ell_p)$$

ein stetiges lineares Funktional $j(y) : \ell_p \to \mathbb{K}$ gegeben mit $||j(y)|| = ||y||_q$. Außerdem ist die Abbildung $j : \ell_q \to \ell_p'$ surjektiv, also jedes $x' \in \ell_p'$ von der Form $j(y)$. Man identifziert üblicherweise $j(y)$ und y und in diesem Sinne gilt dann auch $\ell_p' = \ell_q$.
(Denn: Aus der Hölder-Ungleichung folgt für $x \in \ell_p$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|y_k|^q\Big)^{1/q} = \|x\|_p\|y\|_q\,.$$

Also existiert $j(y)(x)$ und es gilt $\big|j(y)(x)\big| \le \|y\|_q\|x\|_p$. Damit ist $j(y)$ (linear und) stetig mit $\|j(y)\| \le \|y\|_q$. Andererseits definieren wir für $y \ne 0$

$$x_k := |y_k|^{q/p-1}\cdot y_k \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dann ist $\|x\|_p = (\sum|y_k|^q)^{1/p} = \|y\|_q^{q/p}$ und (mit $q/p+1 = q$)

$$j(y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\overline{y_k} = \sum_{k=0}^{\infty}|y_k|^{q/p+1} = \|y\|_q^q\,,$$

also $\|j(y)\| \ge j(y)(x/||x||_p) = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q$.
Ist schließlich $x' \in \ell_p'$ gegeben und $y_k := \overline{\langle e^{(k)}, x'\rangle}$ mit $e^{(k)} := (\delta_{m,k})_{m=0}^{\infty}$, so gilt für (x_k) wie oben und $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}|y_k|^q = \sum_{k=0}^{n}x_k\overline{y_k} = \langle\sum_{k=0}^{n}x_k e^{(k)}, x'\rangle \le ||x'||\cdot||\sum_{k=0}^{n}x_k e^{(k)}||_p \le ||x'||\cdot||x||_p$$

und damit $y \in \ell_q$. Nach Definition stimmen x' und $j(y)$ auf allen $e^{(k)}$ und damit auf der Menge X_0 der abbrechenden Folgen überein. Da X_0 dicht in X ist, stimmen die beiden stetigen Funktionale insgesamt überein.)

Beispiel 6.14 Wir betrachten wieder den Linksshift T auf ℓ_p, nun für $p > 1$. Ist $r > 1$, so ist durch $\mathbf{v}(\lambda) := (\lambda^k/r^k)_{k=0}^\infty$ für $\lambda \in \mathbb{S}$ ein $\mathbb{S}$-Eigenvektorfeld von rT gegeben. Aus

$$||\mathbf{v}(\lambda_1) - \mathbf{v}(\lambda_2)||_p^p \leq |\lambda_1 - \lambda_2|^p \sum_{k=1}^{\infty} (k/r^k)^p$$

ergibt sich die Stetigkeit von $\mathbf{v}$. Ist $x' = y \in \ell_q$ mit $y \perp \mathbf{v}(\mathbb{S})$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{y_k} r^{-k} f_k = \langle \mathbf{v}, y \rangle = 0,$$

also (mit der Parsevalschen Gleichung oder dem Identitätssatz für Potenzreihen) $y_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und damit $x' = 0$. Nach B.6.11 ist $\operatorname{span}(\mathbf{v}(\mathbb{S}))$ dicht in ℓ_p. Also ergibt sich aus S.6.12 noch einmal, dass rT mischend ist.

Wie S. 6.12 zeigt, ist die Existenz genügend vieler Eigenvektoren zu Eigenwerten auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ (sogenannte unimodulare Eigenwerte) hinreiched dafür sind, dass T mischend und damit auch hyperzyklisch ist. Wir wollen zum Abschluss zeigen, dass bei hyperzyklischen Operatoren das Spektrum den Einheitskreis notwendig trifft und dass chaotische Operatoren stets viele Eigenvektoren zu Einheitswurzeln haben.

Definition 6.15 Ist $U \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, so heißt U **komplementiert**, falls ein abgeschlossener Teilraum V mit $X = U \oplus V$ existiert.

Bemerkung 6.16 Es sei $T \in L(X)$ hyperzyklisch und U ein invarianter Unterraum von X. Ist U komplementiert, so ist auch $T|_U$ hyperzyklisch.
(Denn: Die Projektion $h : X \to U$, definiert durch $h(u + v) := u$ für $u + v \in U \oplus V$, ist stetig (folgt etwa aus dem Graphensatz; siehe Funktionalanalysis) und surjektiv. Also sind $T|_U$ und T quasikonjugiert vermittels h. Ist $\gamma(x)$ ein dichter Orbit in X, so ist $\gamma(h(x))$ ein dichter Orbit in U.)

Im Beweis zum folgenden Satz verwenden wir eine wichtige Aussage über die Zerlegung linearer Operatoren, den *Zerlegungssatz von Riesz*:[9]

> *Es sei $T \in L(X)$. Ist $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen σ_1 und σ_2, so existieren invariante, abgeschlossene Unterräume U_1 und U_2 von X mit $X = U_1 \oplus U_2$ und $\sigma(T|_{U_j}) = \sigma_j$ für $j = 1, 2$.*

Damit beweisen wir

[9] Einen Beweis zu diesem Satz und viele weitere Informationen zur Dynamik linearer Systeme findet man in der Monographie *Linear Chaos* von K.-G. Grosse-Erdmann und A. Peris.

Satz 6.17 *(Kitai)*
Ist $T \in L(X)$ hyperzyklisch, so ist $\sigma(T) \cap \mathbb{S} \neq \emptyset$.[10]

Beweis. Angenommen, es ist $\sigma(T) \cap \mathbb{S} = \emptyset$. Dann ist $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, wobei $\sigma_1 := \sigma(T) \cap \mathbb{D}$ und $\sigma_2 := \sigma(T) \cap \mathbb{D}^*$ disjunkt und abgeschlossen sind. Nach dem Zerlegungssatz von Riesz existieren invariante, abgeschlossene Unterräume U_1 und U_2 von X mit $X = U_1 \oplus U_2$ und $\sigma(T|_{U_j}) = \sigma_j$ für $j = 1, 2$. Damit sind $T|_{U_1}$ und $T|_{U_2}$ nach B.6.16 ebenfalls hyperzyklisch, im Widerspruch zu B.6.7 (beachte $\sigma_1 \subset \mathbb{D}$, $\sigma_2 \subset \mathbb{D}^*$ und U_1 und U_2 sind nicht beide der Nullraum). □

Wir setzen $E_n := \{\lambda \in \mathbb{S} : \lambda^n = 1\}$ (also Menge der n-ten Einheitswurzeln) und $E := \bigcup_n E_n$.

Satz 6.18 *Es seien X ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ und $T : X \to X$ linear. Dann ist $x \in X$ genau dann periodisch, wenn $x \in \operatorname{span}(X_E)$ gilt.*

Beweis.
$\Leftarrow$: Ist $x \in X_E$, also $Tx = \lambda x$ für ein $\lambda \in E_n$, so gilt $T^n x = \lambda^n x = x$. Damit ist x periodisch. Da die Menge der periodischen Punkte ein linearer Unterraum von X ist (warum?), folgt die Behauptung.
$\Rightarrow$: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{Kern}(T^n - \mathrm{id}) = \bigoplus_{\lambda \in E_n} \operatorname{Kern}(T - \lambda\,\mathrm{id})$$

(siehe Lineare Algebra). Ist $T^n x = x$, so existieren damit x_λ ($\lambda \in E_n$) mit $x = \sum_{\lambda \in E_n} x_\lambda$ und $x_\lambda \in \operatorname{Kern}(T - \lambda\,\mathrm{id})$. Damit ist $x \in \operatorname{span}(X_E)$. □

Bemerkung 6.19
1. Ist $T \in L(X)$ chaotisch, so hat X_E dichten Spann in X nach S.6.18.
2. Existiert ein stetiges $\mathbb{S}$-Eigenvektorfeld $\mathbf{v}$ so, dass $\mathbf{v}(\mathbb{S})$ dichten Spann hat, so hat auch schon $\mathbf{v}(E)$ dichten Spann (ist $x' \in X'$ mit $x' \perp \mathbf{v}(E)$, so ist schon $x' \perp \mathbf{v}(\mathbb{S})$, also $x' = 0$). Damit ist jeder Operator wie in S.6.12 auch chaotisch.

Beispiel 6.20 Ist $p > 1$ und ist T der Linksshift auf ℓ_p, so ist rT chaotisch für alle $r > 1$.

[10]Genauer kann man mit etwas Topologie zeigen: Jede Komponente von $\sigma(T)$ trifft $\mathbb{S}$.