J. Müller SS 2008

06.05.2008

4. Übung zur Approximationstheorie

Ü10: Überlegen Sie sich, dass folgende Versionen von Jackson- und Bernstein-Sätzen für Approximation mit algebraischen Polynomen gelten:

a) Ist $g \in C[-1,1]$, so gilt mit c_0 aus S. 2.11

$$E_n(g) \le c_0 \cdot \omega_{g\circ\cos}\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

b) Ist $g \in C[-1,1]$ so, dass $g \circ \cos \in \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{R})$, so ist

$$E_n(g) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big).$$

c) Ist $g \in C[-1,1]$ so, dass $E_n(g) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, so gilt

(i) $g \circ \cos \in \mathrm{Lip}(\alpha, \mathbb{R})$ im Falle $\alpha < 1$,

(ii) $\omega_{g\circ\cos}(\delta) = \mathcal{O}(\delta \cdot \ln(1/\delta))$ im Falle $\alpha = 1$.

Ü11: a) Überlegen Sie sich, dass für alle $0 < a < 1$ ein $d_a > 0$ so existiert, dass für alle $g \in C[-1,1]$

$$\omega_{g_{|[-a,a]}} \le d_a \cdot \omega_{g\circ\cos}.$$

b) Zeigen Sie: Für $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in [-1,1]),$$

gilt $g \circ \cos \in \mathrm{Lip}(1, \mathbb{R})$ und $g \notin \mathrm{Lip}(\alpha, [-1,1])$ für alle $\alpha > 1/2$.

Ü12: Zeigen Sie: Für L_n wie in B. 3.5.1 gilt

$$\|L_n\| = \Big\| \sum_{j=-n}^{n} |l_{nj}| \Big\|_\infty.$$