L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
30.1.12

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 14

Abgabe: bis Montag 6.2.12 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 14.1 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

i) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{, falls } x < 0, \\ 8x^3 & \text{, falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ e^{2x} & \text{, falls } \frac{1}{2} < x, \end{cases}$

Aufgabe 14.2 (4 Punkte)
Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $A \subset X$ und $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \overline{A}$.

Aufgabe 14.3 (12 Punkte)
Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für $A \subset X$ definieren wir $f_{|A} : A \to Y, x \mapsto f(x)$ die *Einschränkung von f auf A*.

i) Es seien $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen, so dass $X = A_1 \cup A_2$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f_{|A_1}$ und $f_{|A_2}$ stetig sind, wobei wie üblich A_j mit der Metrik $d_{A_j}(x, y) := d_X(x, y), x, y \in A_j$, versehen ist.

ii) Es seien $A_1, \ldots, A_n \subset X$ abgeschlossen, so dass $X = \cup_{j=1}^n A_j$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach n und i), dass $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $j = 1, \ldots, n$ die Abbildungen $f_{|A_j}$ stetig sind.

iii) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass auf die Abgeschlossenheit von A_1 und A_2 in i) nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 14.4 (6 Punkte)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ beschränkt ist.

Hinweis: Man zeige an geeigneter Stelle, dass es zu $\delta > 0$ endlich viele $a_1, \ldots, a_n \in I$ gibt, so dass $I \subset \cup_{j=1}^n (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 1.2.

T 26

Man untersuche die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & , \text{ falls } x \leq 0, \\ e^x - 1 & , \text{ falls } x > 0. \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

T 27

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Man zeige, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

T 28

Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen von $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ offen und/oder abgeschlossen sind.

i) $\{x \in \mathbb{R} : \exp(x) + \sin(x) > x^2\}$,

ii) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| = x^2 \sin(e^x)\}$.