L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
23.1.12

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 13

Abgabe: bis Montag 30.1.12 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)
Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ sei $\emptyset \neq M$ abgeschlossen. Beweisen Sie:

i) Ist M nach oben beschränkt, so gilt $\sup M \in M$.

ii) Ist M nach unten beschränkt, so gilt $\inf M \in M$.

Aufgabe 13.2 (10 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $A \subset X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) Es gilt $x_0 \in \overline{A}$ genau dann, wenn x_0 entweder ein Häufungspunkt oder ein isolierter Punkt von A ist.

ii) Die Menge der Häufungspunkte von A ist abgeschlossen.

iii) x_0 ist genau dann isolierter Punkt von X, wenn $\{x_0\}$ offen ist.

iv) A ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A in A enthalten ist.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{(a_m)_{m\in\mathbb{N}} : a_m \in \{0,1\} \forall\, m \in \mathbb{N}\}$ überabzählbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine surjektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to M$ gibt. Wir setzen $\tau(n) =: (a_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$. Betrachten Sie die Folge

$$y_m := \begin{cases} 1 & \text{, falls } a_m^{(m)} = 0, \\ 0 & \text{, falls } a_m^{(m)} = 1. \end{cases}$$

und leiten Sie einen Widerspruch her.

Aufgabe 13.4 (10 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$.

i) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   a) A ist abgeschlossen.

   b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die in (X, d) konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

ii) Für $x \in X$ sei $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ der sog. Abstand von x zu A. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$ die Ungleichung

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$$

gilt.

iii) Folgern Sie aus ii) die Stetigkeit der Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$. Ist $\operatorname{dist}(\cdot, A)$ gleichmäßig stetig?

iv) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $x \in \overline{A}$.

b) $\operatorname{dist}(x, A) = 0$.

Hinweis zu ii): Man verwende, dass für $x, y, z \in X$ gilt:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 25.1.

T 23

Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ bestimme man für die folgenden Mengen A die Menge der Häufungspunkte sowie $\overline{A}$ und $\mathring{A}$.

i) $A = [0,1) \cup (1,2]$ *ii)* $A = [0,1) \cup \{2\}$ *iii)* $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

T 24

Man zeige mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ stetig ist. Ist f sogar gleichmäßig stetig?

T 25

Es sei $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{3x^2+5x+5}{x^2-1}$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 = -2$ stetig ist, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein wie in der Definition der Stetigkeit gefordertes $\delta > 0$ angeben.