

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 12

Abgabe: bis Montag 23.1.12 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 12.1 (12 Punkte)

Beweisen Sie Satz 3.2.4 der Vorlesung.

Aufgabe 12.2 (6 Punkte)

Für die folgenden Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$ sei stets $d_X(x, y) := |x - y|$. Untersuchen Sie für $A \subset X$, ob A offen in (X, d_X) ist und ob A abgeschlossen in (X, d_X) ist für die Fälle

- i) $X = [0, 2], A = [0, 1)$,
- ii) $X = (0, 2), A = (0, 1]$,
- ii) $X = [0, 2] \cup (3, 4), A = [0, 2]$.

Aufgabe 12.3 (6 Punkte)

Es sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum, $X \subset Y$ und für $x, y \in X$ sei $d_X(x, y) := d_Y(x, y)$. Beweisen Sie, dass $A \subset X$ genau dann offen ist in (X, d_X) , wenn es eine in (Y, d_Y) offene Menge $\tilde{A}$ gibt mit $A = \tilde{A} \cap X$. Gilt eine analoge Aussage auch für “abgeschlossen”? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 12.4 (6 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im metrischen Raum (Y, d_Y) mit Grenzwert x_0 , so dass $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ und für $x, y \in X$ sei $d_X(x, y) := d_Y(x, y)$. Beweisen Sie für $A \subset X$ die folgenden Aussagen.

- i) Ist $x_0 \in A$, so ist A offen in (X, d_X) genau dann, wenn $X \setminus A$ endlich ist.
- ii) Ist $x_0 \notin A$, so ist A offen in (X, d_X) .

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 18.1.

T 20

Es sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $X \subset Y$. Für $x, y \in X$ sei $d_X(x, y) := d_Y(x, y)$. Man zeige, dass (X, d_X) ein metrischer Raum ist.

T 21

Es sei $(X, d_X) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Man zeige, dass für $a < b$ die Mengen (a, b) , $(-\infty, b)$ und (a, ∞) offen sind und dass die Mengen $[a, b]$, $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen sind.

T 22

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & , \text{ falls } x \text{ und } y \text{ linear abhängig sind,} \\ |x| + |y| & , \text{ falls } x \text{ und } y \text{ linear unabhängig sind,} \end{cases}$$

wobei $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d)$ ein metrischer Raum ist. Außerdem bestimme man $U_\varepsilon(0)$ für $\varepsilon > 0$ sowie $U_\varepsilon(x)$ für $x \neq 0$ und $0 < \varepsilon < |x|$.