L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
9.1.12

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 11

Abgabe: bis Montag 16.1.12 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 11.1 (6 Punkte)
Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie komplexer Zahlen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

i) $(z_\iota)_{\iota\in I}$ ist summierbar,

ii) $(\overline{z}_\iota)_{\iota\in I}$ ist summierbar,

iii) $(\mathrm{Re}(z_\iota))_{\iota\in I}$ und $(\mathrm{Im}(z_\iota))_{\iota\in I}$ sind summierbar.

Zeigen Sie im Falle der Summierbarkeit, dass $\sum_{\iota\in I} z_\iota = \sum_{\iota\in I}\mathrm{Re}(z_\iota) + i\sum_{\iota\in I}\mathrm{Im}(z_\iota)$ und $\overline{\sum_{\iota\in I} z_\iota} = \sum_{\iota\in I}\overline{z}_\iota$ gelten.

Aufgabe 11.2 (6 Punkte)
Beweisen Sie die Teile i) α) und i) β) von Satz 3.1.9 der Vorlesung.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)
Es sei $a_\nu := b_\nu := (-1)^\nu/\sqrt{1+\nu}, \nu\in\mathbb{N}_0$. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu, \sum_{\nu=0}^\infty b_\nu$ und deren Cauchyprodukt auf Konvergenz. Wie ist der scheinbare Widerspruch zu Korollar 2.2.46 zu erklären?

Aufgabe 11.4 (8 Punkte)
Es sei $\alpha\in\mathbb{C}$. Wir definieren $\binom{\alpha}{0} := 1$ und für $k\in\mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!}.$$

Dies setzt die Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha\in\mathbb{N}_0$ nach $\alpha\in\mathbb{C}$ fort. Für festes $\alpha\in\mathbb{C}$ sei $b_\alpha(z) := \sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}z^k, z\in\mathbb{C}$ (sog. *Binomialreihe*).

i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe b_α in Anhängigkeit von α, indem Sie die Fälle $\alpha\in\mathbb{N}_0$ und $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$ unterscheiden.

ii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach $n\in\mathbb{N}_0$, dass $\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{\nu=0}^n\binom{\alpha}{n-\nu}\binom{\beta}{\nu}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0, \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ gilt.

iii) Es seien $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $b_\alpha(z)b_\beta(z) = b_{\alpha+\beta}(z)$ für alle $|z|<1$.

iv) Zeigen Sie, dass $\sqrt[k]{1+x} = b_{\frac{1}{k}}(x)$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und $x\in(-1,1)$

Aufgabe 11.5 (4 Punkte)
Für $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ sei $\zeta(k) := \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^k}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Doppelreihensatzes $\sum_{k=2}^\infty(\zeta(k)-1) = 1$.

Im Tutorium am Mittwoch, 11.1.12, wird die Probeklausur besprochen.