L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
19.12.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 10

Abgabe: bis Montag 9.1.12 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 10.1 (8 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei für $q \in (-1,1)$ fest $a_n := \begin{cases} q^n & , n \text{ ungerade}, \\ q^{2n+1} & , n \text{ gerade}, \end{cases}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a > 1$ fest.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)

i) Geben Sie eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R an für die Fälle

$$a)\ R = 0, \quad b)\ 0 < R < \infty, \quad c)\ R = \infty.$$

ii) Gegeben seien $z_1, z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq z_1$. Entwickeln Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z_0 - z| < |z_0 - z_1|$ den Term $\frac{1}{z-z_1}$ in eine Potenzreihe um z_0. Gesucht ist also eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ mit Konvergenzradius $R \geq |z_1 - z_0|$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \frac{1}{z-z_1}$$

gilt.

Hinweis zu ii):

$$\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{(z_0-z_1)-(z_0-z)} = \frac{1}{z_0-z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0-z_1}}.$$

Aufgabe 10.3 (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 - n) z^n$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2\nu}{\nu} (z-1)^\nu$,

iii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} z^{2\nu}$,

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{8^n} z^{3n}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.4 (6 Punkte)
Geben Sie eine Folge reeller Zahlen $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ an, für die

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1 \text{ und } \limsup_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = 1$$

gilt. Nach dem Wurzelkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, während das Quotientenkriterium keine Aussage liefert. Dieses Beispiel zeigt also, dass das Quotientenkriterium echt schwächer als das Wurzelkriterium ist.

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 21.12.

T 16
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen mit $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i) Man zeige $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$.

ii) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert b und gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen b konvergiert, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = b$.

T 17
Zeigen Sie, dass $((1-\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e^{-1} konvergiert.

T 18
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{\nu^2+(-1)^\nu}{\nu^2+2})^{\nu^3}$,

ii) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu + i^\nu}{\sqrt{\nu}}$.

T 19

a) Es sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$, so dass $z_\nu \neq 0$ für alle $\nu \ge N$. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|} \le \liminf_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|}.$$

Wichtige Anmerkung: Im Beweis des Quotientenkriteriums (Satz 2.2.23) wurde bereits gezeigt, dass

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|} \le \limsup_{\nu\to\infty} \frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|}$$

gilt. Falls $(\frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|})_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert also auch $(\sqrt[\nu]{|z_\nu|})_{\nu\in\mathbb{N}}$ und die Grenzwerte stimmen überein.

b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(z-2)^\nu$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}(z+1)^\nu$.

Wir wünschen Ihnen schöne Feiertage, einen guten Rutsch ins neue Jahr und alles Gute für 2012!