L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
12.12.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 9

Abgabe: bis Montag 19.12. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 9.1 (7 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (1+\frac{1}{n})^n \text{ und } b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1} \ (n\in\mathbb{N}).$$

i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, indem Sie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ betrachten und die Bernoullische Ungleichung anwenden.

ii) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, indem Sie $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ betrachten und die Bernoullische Ungleichung anwenden.

iii) Zeigen Sie, dass $a_n \leq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

iv) Folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ gilt. Der gemeinsame Grenzwert heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet.

Aufgabe 9.2 (5 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, so dass $a_n \leq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Für die Folge der Intervalle $I_n := [a_n, b_n], n\in\mathbb{N}$, gelte $I_{n+1}\subset I_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Außerdem gelte $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. (Hierdurch ist eine sog. *Intervallschachtelung* definiert.) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: a$ und dass $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte)

i) Es seien $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1}) = a_n - a_0.$$

Man spricht in diesem Fall von einer *Teleskopsumme*.

ii) Für $n\in\mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Schreiben Sie s_n als geeignete Teleskopsumme, um $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ zu beweisen.

iii) Zeigen Sie, dass für festes $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ gilt:

$$\forall\, n\in\mathbb{N}: \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^k} \leq 1 + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(\nu+1)}.$$

iv) Untersuchen Sie, für welche $k\in\mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^k}$ konvergiert.

Hinweis zu iv): Aufgabe 5.3.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4 (8 Punkte)

i) Es seien $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, $B_\nu := \sum_{k=0}^{\nu} b_k$. Beweisen Sie die sog. *Abelsche partielle Summationsformel*:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = a_n B_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu - a_{\nu+1}) B_\nu.$$

ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_0^+$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, wobei $B_n := \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu$. Beweisen Sie mittels Teil i) und des Cauchykriteriums die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu$.

Zusatzaufgabe 9.5 (5 Sonderpunkte)
Vervollständigen Sie den Beweis des Cauchyschen Verdichtungssatzes.

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 14.12.

T 14
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

T 15
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+2k-1}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.