L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
5.12.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 8

Abgabe: bis Montag 12.12. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc > 0$ sowie $z \in \mathbb{C}$ mit $cz \neq -d$. Zeigen Sie, dass für $w := \frac{az+b}{cz+d}$ gilt

$$\mathrm{Im} w > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} z > 0,$$

$$\mathrm{Im} w < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} z < 0.$$

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

i) Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

ii) Es seien $a, b \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{a^n + b^n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\max\{a, b\}$ konvergiert.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Für alle $x, y \in E$ gilt $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$.

ii) Weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $(E, \|\cdot\|)$ gegen $x_0 \in E$ konvergente Folge. Zeigen Sie, dass $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\|x_0\|$ konvergiert.

Aufgabe 8.4 (16 Punkte)

i) Es sei $w \in \mathbb{C}$. Geben Sie in $\mathbb{C}^3$ die Summen

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu, w, (-1)^\nu) \text{ und } \sum_{\nu=0}^{n} \left((\frac{1}{i})^\nu, (3i)^{2\nu}, -4 + i5 \right)$$

jeweils in der Form $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3)$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$, an.

ii) Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^3$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $x_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}, \sum_{\nu=0}^{n}(\frac{1}{2})^\nu\right)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest ist,

b) $x_n := \left(\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} \nu, \frac{i^n}{n}, \frac{n^2}{2^n}\right)$,

c) $x_n := \left(\frac{2n-1}{1-3n}, \sqrt[n]{n}, i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)$,

d) Es sei $a_1 \in (0, 1)$, $b_1 \in (0, \frac{1}{c}]$, wobei $c > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n + 2}, b_{n+1} := b_n(2 - cb_n) \text{ und } x_n := (a_n, ib_n, a_n^2 + b_n).$$

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 7.12.

T 12

a) Gegeben seien $z := -1 + i$ und $w := -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Man gebe $z + w, z \cdot \overline{w}, \frac{1}{w}$ und $\frac{\overline{z}}{w}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

b) In $\mathbb{C}^2$ gebe man die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{4n} (i^\nu, -2 + i3), n \in \mathbb{N},$$

in der Form $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$ an.

T 13

a) Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

b) Man untersuche die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^2$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $x_n := (\frac{-i}{n}, \frac{1}{n+8} \sum_{\nu=2}^{n} \nu - \frac{n}{2})$,

ii) $x_n := (\sqrt[n]{2}, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu})$,

iii) Es seien $a_1 := 1, b_1 := 15$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_{n+1} := \frac{2 + a_n}{1 + a_n}, b_{n+1} := \frac{b_n}{n}$$

und

$$x_n := (a_n, b_n + ia_n).$$