L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
28.11.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 7

Abgabe: bis Montag 5.12. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 7.1 (8 Punkte)

a) Gegeben seien $z = 3 - 2i$ und $w = 4 + 3i$.

   i) Geben Sie $zw, z/w, \overline{z}/w$ und $z/\overline{w}$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an (sog. *Normaldarstellung*).

   ii) Berechnen Sie $|z|$ und $|w|$.

b) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

   i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

   ii) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

Aufgabe 7.2 (8 Punkte)

i) Für $x \in \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j| \text{ und } \|x\|_\infty := \max\{|x_j| : 1 \leq j \leq d\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind.

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2.$$

Zur Erinnerung: $\|x\|_2 := |x| := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 7.3 (6 Punkte)

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $a > 1$ fest.

i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$

$$\binom{n}{k+1} \geq \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}$$

gilt.

ii) Verwenden Sie i) und den binomischen Lehrsatz, um zu zeigen, dass für $n \geq 2k$ und alle $x > 0$

$$(1+x)^n \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} n^{k+1}$$

gilt.

Bitte wenden!

iii) Verwenden Sie ii) für $x = a - 1$, um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Aufgabe 7.4 (8 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

i) $x_n := \frac{3^n+4n^2-1}{2\cdot 3^n-2n^3+1}$,

ii) $x_n := \frac{1}{n^4}\sum_{\nu=1}^n \nu^3$,

iii) $x_n := \sqrt[n]{n}$.

Hinweis zu i): Aufgabe 7.3 iii).
Hinweis zu ii): Aufgabe 4.2.
Hinweis zu iii): Benutzen Sie $n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(\sqrt[n]{n}-1)^j \geq 1+\binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$ und verwenden Sie Aufgabe 7.3 i) für $k = 1$.

Tutoriumsaufgaben für Mittwoch, den 30.11.

Diese Aufgaben werden im Tutorium besprochen und sind nicht Teil der von Ihnen abzugebenden Übungsaufgaben, sondern sollen Sie mit den für die Übungsaufgaben zu verwendenden Techniken vertraut machen. Dennoch sollen Sie die Aufgaben für das Tutorium vorbereiten!

T 11
Es sei $a > 0$. Man untersuche die nachstehenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme im Falle der Existenz den jeweiligen Grenzwert:

a) $x_n := \frac{n!}{n^n}$

b) $x_n := \sqrt[n]{a}$

c) $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $x_n := \frac{2n^5+7n^4-2n+1}{3n^5-n^3+4n^2-5}$

e) $x_n := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k$