L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
21.11.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 6

Abgabe: bis Montag 28.11. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge, die kein Maximum besitzt. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$(\sup M - \varepsilon, \sup M) \cap M \neq \emptyset.$$

Bleibt die Aussage richtig, wenn M ein Maximum besitzt? (Begründung!)

Aufgabe 6.2 (10 Punkte)
Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Beweisen Sie:

i) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$,

ii) $-\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty}(-x_n)$,

iii)
$$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)$$
und
$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$
Konvergiert eine der beiden Folgen, so gilt jeweils Gleichheit.

Hinweis zu ii): Verwenden Sie, dass $-\inf M = \sup(-M)$ für jede Menge $M \subset \mathbb{R}$, wobei $-M := \{-m : m \in M\}$.

Aufgabe 6.3 (8 Punkte)
Es sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $\xi \in \mathbb{R}^+$. Ist $a_1 \in \mathbb{R}^+$ beliebig, so definieren wir

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)a_n + \frac{\xi}{a_n^{k-1}}\Big)\ (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und dass für ihren Grenzwert a die Beziehung $a^k = \xi$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie, dass für $x \geq 0, y \geq 0$ die Beziehung

$$x \leq y \Leftrightarrow x^k \leq y^k$$

gilt.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 6.4 (6 Sonderpunkte)

i) Beweisen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ und } x^2 > a\} = \sqrt{a}$$

gilt.

Hinweis: Sei t das Infimum. Zeigen Sie, dass die Fälle $t^2 < a$ und $t^2 > a$ nicht auftreten, indem Sie $t_1 := t + h$ und $t_2 := t - k$ (für geeignete $h, k > 0$) untersuchen.

ii) Begründen Sie, warum die Menge $\{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ und } x^2 > 2\}$ kein Infimum in $\mathbb{Q}$ besitzt.