L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
14.11.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 5

Abgabe: bis **MONTAG** 21.11. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y \in K$. Beweisen Sie:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\; x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der rechten Seite.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte)

Es seien $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper, $A, B \subset K$ nicht leere Mengen, so dass A und B Suprema besitzen. Wir definieren $A + B := \{a + b :\; a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie:

(i) $A + B$ besitzt ein Supremum und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(ii) Ist zusätzlich $A \subset B$, so gilt $\sup A \leq \sup B$.

(iii) Für ein festes $m \in \mathbb{N}$ bestimme man das Supremum und Infimum der Menge

$$\{\frac{1}{n+m} :\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Aufgabe 5.3 (8 Punkte)

(i) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in einem geordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.

Hinweis zu (ii): Betrachten Sie $s_{2n} - s_n$ und schätzen Sie diese Differenz nach unten ab.

Aufgabe 5.4 (6 Punkte)

Es seien $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $a \in K$. Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, die gegen $x_0 \in K$ konvergiert und existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \leq a$ für alle $n \geq N$, so gilt $x_0 \leq a$.