L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
7.11.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 4

Abgabe: bis **MONTAG** 14.11. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Aufgabe 4.1 (5 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Summen:

i) $\sum_{m=2}^{n} 1$,

ii) $\sum_{\nu=-2}^{2} \nu^2$,

iii) $\sum_{n=1}^{4} (\sum_{\nu=1}^{n} n \cdot \nu)$,

iv) $\sum_{n=1}^{3} \left(2 - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2^\nu}\right)$.

Aufgabe 4.2 (9 Punkte + 4 Sonderpunkte)
Man beweise mittels vollständiger Induktion:

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ \sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ \sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)(\nu+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Was vermuten Sie allgemein für $\sum_{\nu=1}^{n} \nu(\nu+1)\cdots(\nu+m-1)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ fest ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte)
Es seien $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Zeigen Sie:

i) $x > 0_K \Leftrightarrow -x < 0_K$,

ii) $x, y < 0_K \Rightarrow xy > 0_K$,

iii) $x^2 > 0_K \Leftrightarrow x \neq 0_K$,

iv) $1_K > 0_K$,

v) $0_K < x < y \Rightarrow -y < -x < 0_K$ und $x^{-1} > y^{-1} > 0_K$.

Aufgabe 4.4 (8 Punkte)
Es sei X eine n-elementige Menge und S_n bezeichne die Menge aller bijektiven Abbildungen von X in sich (S_n ist die Menge der sog. *Permutationen* von X). Zeigen Sie, dass die Menge S_n aus $n!$ Elementen besteht und dass $\mathscr{P}(X)$ 2^n-elementig ist.