L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
31.10.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 3

Abgabe: bis **MONTAG** 7.11. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 3.1 (10 Punkte)

Es sei $\{0,1\}$ versehen mit $0+0 := 1+1 := 0, 0+1 := 1+0 := 1, 0\cdot 0 := 0\cdot 1 := 1\cdot 0 := 0$ und $1\cdot 1 := 1$. Zeigen Sie, dass $(\{0,1\},+,\cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3.2 (14 Punkte)

Es seien $(K,+,\cdot)$ ein Körper und $x,y,z \in K$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln. Geben Sie, bis auf die Kommutativität, in jedem Schritt das verwendete Körperaxiom bzw. die verwendete Eigenschaft an.

(i) $\forall\, x,y,z \in K : \ (x+y = x+z \Rightarrow y = z)$,

(ii) $\forall\, x \in K : \ -(-x) = x$,

(iii) $\forall\, x,y \in K : \ -(x\cdot y) = (-x)\cdot y = x\cdot(-y)$,

(iv) $\forall\, x,y \in K^* : \ (x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$,

(v) $\forall\, x,y \in K : \ -(x+y) = (-x)+(-y)$.

Aufgabe 3.3 (10 Punkte)

$b \in \mathbb{Z}$ heißt *teilbar durch* $a \in \mathbb{Z}$ (geschrieben $a\,|\,b$), wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = ka$. Es sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Wir definieren $a \equiv_m b$ für $a,b \in \mathbb{Z}$, wenn $a-b$ durch m teilbar ist. Weiter definieren wir

$$a + m\cdot\mathbb{Z} := \{a + m\cdot k : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass durch $\equiv_m$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $[a] = a + m\cdot\mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$, wobei $[a]$ die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\equiv_m$ bezeichnet.

(iii) Bestimmen Sie die Quotientenmengen $\mathbb{Z}/\equiv_1$ und $\mathbb{Z}/\equiv_2$.

Zusatzaufgabe 3.4 (14 Sonderpunkte) Es sei $X \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}(X)$ heißt *Zerlegung von* X, falls

(a) $M \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathscr{F}$,

(b) $\cup\mathscr{F} = X$,

(c) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Rightarrow M_1 = M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \mathscr{F}$.

Zeigen Sie:

(i) Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, so ist $X/_R$ eine Zerlegung von X.

(ii) Ist $\mathscr{F}$ eine Zerlegung von X, so ist durch

$$R_{\mathscr{F}} := \{(x,y) \in X \times X : \exists\, M \in \mathscr{F} \text{ mit } x,y \in M\}$$

eine Äquivalenzrelation auf X gegeben.