L. Frerick
T. Kalmes

WS 11/12
24.10.11

Übungen zur **Einführung in die Mathematik**

Blatt 2

Abgabe: bis 2.11. 10:00 Uhr in Kasten E 12

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer!

Aufgabe 2.1 (5 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\}$, die gegeben ist durch die Wertetabelle

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	2	1	3	3	1

Bestimmen Sie die Mengen $f(\{1,2,3\}), f(\{4,5\})$ sowie $f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2,3\})$ und $f^{-1}(\{4\})$.

Aufgabe 2.2 (3+3+4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung.

(i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f_1(n) := 3n$.

(ii) $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $f_2(n) := n^2$.

(iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f_3(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Aufgabe 2.3 (3+4+1 Punkte) Es seien $X, Y, Z \neq \emptyset$.

(i) Es seien $h_1 : X \to Y, h_2 : Y \to Z$ bijektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass $h_2 \circ h_1$ bijektiv ist und dass die Umkehrfunktion von $h_2 \circ h_1$ gegeben ist durch $h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.1.39 der Vorlesung für $f := h_2 \circ h_1$.

(ii) Beweisen Sie den ersten Teil von Satz 1.1.29 i) und den zweiten Teil von Satz 1.1.29 ii) der Vorlesung.

(iii) Man zeige anhand eines (sehr einfachen!) Beispiels einer Abbildung $f : X \to Y$ und Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$, dass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gelten kann.

Aufgabe 2.4 (4+4 Punkte)
Es seien $X, Y \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) f ist injektiv $\Leftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

(ii) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists\, g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Hinweis: In beiden Teilen betrachte man zum Beweis der Implikation “$\Rightarrow$“ für jedes $y \in Y$ die Menge $f^{-1}(\{y\})$.