Einführung in die Mathematik

Fassung 9.2.12

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen, Abbildungen, Äquivalenzrelationen

In diesem ersten Paragraphen werden wir einige Grundbegriffe der Theorie der Mengen und Abbildungen zusammenstellen. Wir verwenden den von Cantor geprägten sogenannten „naiven“ Mengenbegriff.

Definition 1.1.1 Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Dieser Cantorsche Mengenbegriff ist unbefriedigend, da er zu Widersprüchen führt. Wir werden ihn trotzdem verwenden, da eine logisch unproblematische Mengentheorie weit über den Rahmen dieser Vorlesung hinausginge. Fassen wir also bestimmte Objekte zusammen, so entsteht eine Menge. Es muss jedoch immer klar sein, welche Objekte zur Menge gehören und welche nicht.

Ist M eine Menge, schreiben wir

$$x \in M \qquad \text{(gelesen: } x \text{ Element } M\text{)},$$

falls x ein Element der Menge M ist, und wir schreiben

$$x \notin M \qquad \text{(gelesen: } x \text{ nicht Element } M\text{)},$$

falls x kein Element der Menge M ist.

Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten zur Beschreibung von Mengen:

1. Die Elemente der Menge können in geschweiften Klammern aufgezählt werden, z.B. ist

$$M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiert als}}}{:=} \{2,4,6,8\}$$

die Menge, die aus den Elementen $2,4,6,8$ besteht.

2. Die Menge kann durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente beschrieben werden:

$$M := \{x : x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

ist die Menge aller Elemente x, welche die Eigenschaft E besitzen.

Beispiel 1.1.2 i) Es sei $M := \{2,4,6,8\}$. Dann gilt auch

$$M = \{x : x \text{ ist eine positive gerade Zahl kleiner oder gleich } 8\}.$$

ii) Die Menge

$$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\ldots\} = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

ist die Menge der natürlichen Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \{0,1,2,3,\ldots\} = \{x : x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x : x \text{ ist eine nicht negative ganze Zahl}\}. \end{aligned}$$

iii) Die Menge

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &:= \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\} \\ &= \{x : x \text{ ist eine ganze Zahl}\} \end{aligned}$$

ist die Menge der ganzen Zahlen.

Wir setzen ihre grundsätzlichen Eigenschaften als bekannt voraus.

Definition 1.1.3 Es seien M_1 und M_2 Mengen.

i) M_1 und M_2 heißen gleich (geschrieben: $M_1 = M_2$), falls sie dieselben Elemente enthalten.

ii) M_1 heißt Teilmenge von M_2 (geschrieben: $M_1 \subset M_2$), falls jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. M_2 heißt dann auch Obermenge von M_1 (geschrieben: $M_2 \supset M_1$).

iii) Ist M_1 keine Teilmenge von M_2, so schreibt man

$$M_1 \not\subset M_2 \quad \text{oder auch} \quad M_2 \not\supset M_1 \,.$$

Beispiel 1.1.4 i) Die Mengen $\{2, 4, 6, 8\}$ und $\{4, 2, 8, 2, 6\}$ sind gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.

ii) Ist $M_1 := \{1\}$ die Menge, die aus dem Element 1 besteht, und ist $M_2 := \{M_1\} = \big\{\{1\}\big\}$ die Menge, die aus dem Element $\{1\}$ besteht, so gilt $M_1 \not\subset M_2$ und $M_2 \not\subset M_1$, insbesondere also $M_1 \neq M_2$.

iii) Es sei $M := \{a, b, c\}$ eine Menge mit 3 Elementen. Dann sind $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}$, $\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ Teilmengen von M.

iv) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

Aus Definition 1.1.3 ergibt sich unmittelbar

Satz 1.1.5 *Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen. Dann gilt*

i) $M_1 \subset M_1$.

ii) $M_1 = M_2$ *genau dann, wenn* $M_1 \subset M_2$ *und* $M_2 \subset M_1$.

iii) Ist $M_1 \subset M_2$ *und ist* $M_2 \subset M_3$, *so gilt auch* $M_1 \subset M_3$.

Definition 1.1.6 Die leere Menge ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Satz 1.1.7 *Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.*

Beweis. Da $\emptyset$ keine Elemente besitzt, gilt also für jedes ihrer Elemente, dass es auch Element von M ist. $\square$

Definition 1.1.8 Es seien M_1, M_2 Mengen.

i) Die Menge
$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$
heißt die Vereinigung von M_1 und M_2.

ii) Die Menge
$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$
heißt der Durchschnitt (oder kurz: Schnitt) von M_1 und M_2.

iii) Die Menge $M_2 \backslash M_1 := \{x : x \in M_2 \text{ und } x \notin M_1\}$ (gelesen: M_2 ohne M_1) heißt die Differenz von M_2 und M_1.
Gilt zusätzlich $M_1 \subset M_2$, so heißt
$$M_1^c := M_2 \backslash M_1$$
das Komplement von M_1 bezüglich M_2.

Beispiel 1.1.9 i) Es sei $M_1 := \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ungerade}\}$ und $M_2 := \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$. Dann gilt $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \backslash M_2 = M_1$, $M_2 \backslash M_1 = M_2$, $\mathbb{N} \backslash M_1 = M_2$, $\mathbb{N} \backslash M_2 = M_1$.

ii) Sei $M_1 := \{1, 2, 3, 7\}$ und $M_2 := \{1, 7, 4, 5, 7\}$. Dann gilt $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $M_1 \cap M_2 = \{1, 7\}$, $M_2 \backslash M_1 = \{4, 5\}$, $M_1 \backslash M_2 = \{2, 3\}$.

Bemerkung 1.1.10 i) Ohne die leere Menge hätten wir den Durchschnitt für zwei beliebige Mengen nicht definieren können.

ii) Genau dann ist der Schnitt zweier Mengen leer, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen.

iii) Man beachte, dass in Definition 1.1.8 iii) der Ausdruck M_1^c von der betrachteten Obermenge M_2 abhängt.

Für das Rechnen mit Mengen gelten folgende Regeln.

Satz 1.1.11 *Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen. Dann gilt*

i) $$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$$ $$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$ *(Kommutativität)*

ii) $$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$ $$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$ *(Assoziativität)*

iii) $$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$ $$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$ *(Distributivität)*

Beweis. Wir zeigen nur das zweite Distributivgesetz, alle anderen Regeln sind analog zu beweisen.
Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & x \in M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \\
\underset{\text{genau dann, wenn}}{\overset{\Leftrightarrow}{\uparrow}} & x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2 \cap M_3 \\
\Leftrightarrow & x \in M_1 \text{ oder } (x \in M_2 \text{ und } x \in M_3) \\
\Leftrightarrow & (x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2) \text{ und } (x \in M_1 \text{ oder } x \in M_3) \\
\Leftrightarrow & x \in M_1 \cup M_2 \text{ und } x \in M_1 \cup M_3 \\
\Leftrightarrow & x \in (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).
\end{array}
$$

Somit enthalten die Mengen $M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$ und $(M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$ dieselben Elemente, und sie sind daher gleich. □

Satz 1.1.12 *(Regeln von de Morgan)* *Es seien $M_1, M_2 \subset X$ Mengen, und im Folgenden seien die Komplemente bezüglich X gebildet. Dann gilt*

i) $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$,

ii) $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$.

Beweis. Wir zeigen i), ii) folgt analog.
Es gilt

$$\begin{aligned}
& x \in (M_1 \cup M_2)^c \ \big(= X \backslash (M_1 \cup M_2) \big) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in X \text{ und } x \notin M_1 \cup M_2 \\
\Leftrightarrow \quad & x \in X \text{ und } (x \notin M_1 \text{ und } x \notin M_2) \\
\Leftrightarrow \quad & (x \in X \text{ und } x \notin M_1) \text{ und } (x \in X \text{ und } x \notin M_2) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in X \backslash M_1 \text{ und } x \in X \backslash M_2 \\
\Leftrightarrow \quad & x \in (X \backslash M_1) \cap (X \backslash M_2) \ (= M_1^c \cap M_2^c)\,.
\end{aligned}$$

Damit besitzen die Mengen $(M_1 \cup M_2)^c$ und $M_1^c \cap M_2^c)$ dieselben Elemente, und sie sind somit gleich. □

Definition 1.1.13 Es sei X eine Menge. Die Menge $\mathscr{P}(X) := \{M : M \subset X\}$ aller Teilmengen von X heißt die Potenzmenge von X.

Beispiel 1.1.14 i) Es sei $X = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Dann gilt

$$\mathscr{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}\,.$$

ii) Es gilt

$$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}\,.$$

Definition 1.1.15 Es sei X eine Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}(X)$ heißt Mengensystem auf X.

Man beachte: Die Elemente von $\mathscr{F}$ sind Teilmengen von X!

Beispiel 1.1.16 Es sei X eine Menge und $M_1, M_2, M_3 \subset X$ seien irgendwelche Teilmengen von X.
Dann sind $\mathscr{E} := \{M_1\}, \mathscr{F} := \{M_1, M_2\}$ und $\mathscr{G} := \{M_1, M_2, M_3\}$ Mengensysteme auf X.

Definition 1.1.17 Es sei $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf der Menge X. Wir setzen

$$\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M := \bigcup \mathscr{F} := \{x \in X : \text{ es gibt ein } M \in \mathscr{F} \text{ mit } x \in M\}\,,$$

$$\bigcap_{M\in\mathscr{F}} M := \bigcap \mathscr{F} := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathscr{F}\}\,.$$

Bezeichnung 1.1.18 Sind X, I Mengen, ist für jedes $\iota \in I$ eine Menge $M_\iota \subset X$ gegeben und ist $\mathscr{F} := \{M_\iota : \iota \in I\}$ gesetzt, so definiert man

$$\bigcup_{\iota\in I} M_\iota := \bigcup_{M\in\mathscr{F}} M \qquad \text{und}$$

$$\bigcap_{\iota\in I} M_\iota := \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M\,.$$

Beispiel 1.1.19 $I := \mathbb{N}, X := \mathbb{Z}, M_n := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \mathbb{N}\,, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \emptyset\,.$$

Satz 1.1.20 *(Regeln von de Morgan)* *Es sei $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf der Menge X. Dann gilt*

i) $\Big(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M^c$ *und*

ii) $\Big(\bigcap_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcup_{M\in\mathscr{F}} M^c$

Hierbei sind alle Komplemente bzgl. X gebildet.

Beweis. (in den Übungen) □

Bemerkung 1.1.21 Es sei X eine Menge, $M_1, M_2 \subset X$. Dann ist $\mathscr{F} := \{M_1, M_2\}$ ein Mengensystem auf X, und es folgt mit 1.1.20:

$$(M_1 \cup M_2)^c = \Big(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M^c = M_1^c \cap M_2^c$$

sowie analog $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$. Wir erhalten also 1.1.12 als Spezialfall von 1.1.20.

Wir kommen nun zu dem für die gesamte Mathematik fundamentalen Begriff der Abbildung.

Definition 1.1.22 Es seien X, Y Mengen. Eine Abbildung oder Funktion $f : X \to Y$ ist durch den Definitionsbereich X, den Zielbereich Y und eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) := y \in Y$ zuordnet, gegeben.
$f(X) := W(f) := \{f(x) : x \in X\}$ heißt Wertebereich oder Bild von f.
Anstelle „$f : X \to Y$" schreiben wir auch „$X \xrightarrow{f} Y$", und anstelle „$f(x) := y$" benutzen wir auch „$x \longmapsto f(x)$" („x geht über nach $f(x)$").

Definition 1.1.23 i) Sind X, Y Mengen, so heißt die Menge

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

aller geordneten Paare (x, y), wobei x die Menge X und y die Menge Y durchläuft, das Produkt von X und Y. Formal ist $(x, y) := \big\{x, \{x, y\}\big\}$ definiert und es gilt $(x, y) = (z, w)$ genau dann, wenn $x = z$ und $y = w$ gilt.

ii) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt

$$\operatorname{graph}(f) := \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\} \quad \subset X \times Y$$

der Graph von f.

Bemerkung 1.1.24 Eine Relation R zwischen X und Y (d.h. eine Teilmenge von $X \times Y$ ist genau dann der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$, wenn für alle $x \in X$ genau ein $(x, y) \in R$ existiert. Man setzt dann $f(x) := y$, wobei $(x, y) \in R$.
Mithilfe solcher Relationen kann man auch den Begriff der Abbildung definieren: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Tripel (X, Y, R), wobei R obige Eigenschaft hat.

Beispiel 1.1.25 i) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$ (d.h. $f(n) := 2n$).
Dann ist $\operatorname{graph}(f) = \big\{(n, 2n) : n \in \mathbb{Z}\big\}$. Es gilt $f(\mathbb{Z}) = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade}\}$.

ii) Es seien $A \subset X$ Mengen.
Die Abbildung $\iota_A : A \to X,\ \iota_A(x) := x$ heißt Inklusion von A in X, es gilt $\operatorname{graph}(\iota_A) = \big\{(x,x) : x \in A\big\}$. Ist speziell $A = X$, so setzt man

$$\mathrm{id} := \mathrm{id}_X := \iota_X\,.$$

Es gilt $\operatorname{graph}(\mathrm{id}_X) = \big\{(x,x) : x \in X\big\} =: \Delta$.
Δ heißt auch Diagonale von $X \times X$.

Definition 1.1.26 Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und es sei $A \subset X$ sowie $B \subset Y$.

i) $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ heißt Bild von A unter f.

ii) $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ heißt Urbild von B unter f.

Bemerkung 1.1.27 Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und es sei $A \subset X,\ B \subset Y$.

i) $f(A)$ besteht genau aus denjenigen $y \in Y$, für die ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ existiert.

„Alle Punkte in Y, auf die irgendein $x \in A$ geworfen wird."

ii) $f^{-1}(B)$ besteht genau aus denjenigen $x \in X$, für die ein $y \in B$ mit $f(x) = y$ existiert.

„Alle Punkte aus X, die in das B geworfen werden."

Man beachte, dass $f(A)$ eine TEILMENGE von Y ist und dass $f^{-1}(B)$ eine TEILMENGE von X ist.

iii) $f\big(\{x\}\big) = \big\{f(x)\big\}$ für alle $x \in X$.

iv) $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ kann unter Umständen mehr als ein Element enthalten, ebenso kann der Fall $f^{-1}\big(\{y\}\big) = \emptyset$ auftreten.

Beispiel 1.1.28 i) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$. Dann ist zum Beispiel

$f\big(\{-4,-1,2,3\}\big) = \{-8,-2,4,6\},\ f^{-1}\big(\{1,2,3,4\}\big) = \{1,2\}$,

$$f^{-1}\big(\{n\}\big) = \begin{cases} \left\{\dfrac{n}{2}\right\} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \emptyset & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases},$$

$f^{-1}\big(\{n : n \text{ ungerade}\}\big) = \emptyset$.

ii) Es sei $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $|\cdot|(n) := |n| := \begin{cases} n : n \geq 0 \\ -n : n < 0 \end{cases}$. Dann ist $|\cdot|(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_0$, aber auch $|\cdot|\big(\{n : n \leq 0\}\big) = \mathbb{N}_0$.
Weiter ist

$$|\cdot|^{-1}\big(\{n\}\big) = \{-n, n\} \text{ für } n \geq 0 \text{ und}$$

$$|\cdot|^{-1}\big(\{n\}\big) = \emptyset \text{ für } n < 0\ .$$

Satz 1.1.29 *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

i) Sind $A_1, A_2 \subset X$, so gilt

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \textit{und} \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)\,.$$

ii) Sind $B_1, B_2 \subset Y$, so gilt

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \textit{und} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,.$$

Beweis. Wir beweisen hier den zweiten Teil von i) und den ersten Teil von ii), der Rest wird in den Übungen gezeigt.

1. Es sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$
   $\Rightarrow$ es existiert $x \in A_1 \cap A_2$ mit $f(x) = y$
   $\underset{\text{dann folgt}}{\uparrow}$
   $\Rightarrow$ es existiert $x \in A_1$ mit $f(x) = y$, und es existiert $x \in A_2$ mit $f(x) = y$

   $\Rightarrow y \in f(A_1)$ und $y \in f(A_2)$

   $\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

   Dann ist jedes Element von $f(A_1 \cap A_2)$ auch ein Element von $f(A_1) \cap f(A_2)$, somit gilt $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

2. Es gilt

   $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

   $\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

   $\Leftrightarrow f(x) \in B_1$ oder $f(x) \in B_2$

   $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ oder $x \in f^{-1}(B_2)$

   $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   Also enthalten $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ und $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ dieselben Elemente, somit sind sie gleich.

□

Satz 1.1.30 *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

i) Ist $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf X, so gilt

$$f\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\Big) = \bigcup_{A\in\mathscr{F}} f(A) \quad \textit{und} \quad f\Big(\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A\Big) \subset \bigcap_{A\in\mathscr{F}} f(A)\,.$$

ii) Ist $\mathscr{G}$ ein Mengensystem auf Y, so gilt

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\Big) = \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{B\in\mathscr{G}} B\Big) = \bigcap_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage von ii), der Rest wird analog bewiesen.
Es gilt

$x \in f^{-1}\big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\big)$

$\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{B\in\mathscr{G}} B$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $B \in \mathscr{G}$ mit $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $B \in \mathscr{G}$ mit $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$

Es folgt (wie üblich) $f^{-1}\big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\big) = \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$. □

Definition 1.1.31 Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

i) injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt.

ii) surjektiv, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert (also wenn $f(X) = Y$ gilt),

iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 1.1.32 Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

i) f ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ höchstens einelementig für alle $y \in Y$ ist,

ii) f ist surjektiv genau dann, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ mindestens einelementig für alle $y \in Y$ ist.

iii) Nach i) und ii) ist f genau dann bijektiv, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ einelementig für alle $y \in Y$ ist, mit anderen Worten, zu jedem $y \in Y$ existiert genau dann ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Beispiel 1.1.33 i) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) := 2n$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv.

ii) Es sei $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ |n| := \begin{cases} n & : \quad n \geq 0 \\ -n & : \quad n < 0 \end{cases}.$
Dann ist f surjektiv, aber nicht injektiv.

iii) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ f(n) := \begin{cases} 2n & : \quad n \geq 0 \\ -2n-1 & : \quad n < 0 \end{cases}.$
Dann ist f bijektiv.

In der Tat, sei zunächst $f(n_1) = f(n_2) =: m$.
1. Fall: m gerade.
Dann ist $2n_1 = 2n_2$, also $n_1 = n_2$.

2. Fall: m ungerade.
Dann ist $-2n_1 - 1 = -2n_2 - 1$, also $n_1 = n_2$.

Insgesamt ist f injektiv.

Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

1. Fall:m gerade.
Dann ist $\frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$, und es gilt $f\Big(\frac{m}{2}\Big) = m$.
2. Fall: m ungerade.
Dann ist $-\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$, und es gilt $f\Big(-\frac{m+1}{2}\Big) = m$.
Also ist f auch surjektiv.

Wir schließen: f ist bijektiv.

Definition 1.1.34 Es seien X_1, X_2, X_3 Mengen und $f_1 := X_1 \to X_2,\ f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Dann ist die Verknüpfung $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ von f_2 und f_1 durch

$$(f_2 \circ f_1)(x) := f_2\big(f_1(x)\big),\ x \in X_1,$$

definiert.

Bemerkung 1.1.35 i) Um nicht mit der Reihenfolge durcheinander zu geraten, schreibt man sich am besten die Abbildungen folgendermaßen hin:

$$X_1 \ \xrightarrow{f_1}\ X_2 \ \xrightarrow{f_2}\ X_3$$

ii) Sind $f_k : X_k \to X_{k+1}, k = 1, 2, 3,$ Abbildungen, so gilt $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.
Dies folgt sofort aus der Definition der Verknüpfung.
Wir können also die Klammern weglassen und schreiben $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ anstelle von $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ und $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$.

iii) Sind $f_1 : X_1 \to X_2$ und $f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen, so gilt

α) Ist $f_2 \circ f_1$ surjektiv, dann ist auch f_2 surjektiv.

β) Ist $f_2 \circ f_1$ injektiv, dann ist auch f_1 injektiv.

Der Beweis wird in den Übungen geführt, die Umkehrungen gelten nicht.

Beispiel 1.1.36 i) Es sei $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f_1(n) := n - 1$, und
$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ f_2(n) := \begin{cases} n & : \ n \geq 0 \\ -n & : \ n < 0 \end{cases}$.
Dann ist $f_2 \circ f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, und es gilt $(f_2 \circ f_1)(n) = |n - 1|,\ n \in \mathbb{Z}$.

ii) Es seien $A \subset X$ Mengen, und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Einschränkung von f auf A

$$f|_A : A \to Y$$

ist definiert durch $f|_A(x) := f(x),\ x \in A$.
Ist $\iota_A : A \to X,\ \iota_A(x) := x$, die Inklusion von A in X, so gilt $f|_A = f \circ \iota_A$.

Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung.
Nach 1.1.32 iii) existiert dann zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
Wir setzen $f^{-1}(x) := y$, wobei $y = f(x)$.

Definition 1.1.37 Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Die Abbildung

$$f^{-1} : Y \to X$$

ist definiert durch $f^{-1}(y) := x$, wobei $y = f(x)$. f^{-1} heißt die Umkehrabbildung oder Inverse von f.

Bemerkung 1.1.38

i) In 1.1.26 hatten wir für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ und eine beliebige Teilmenge $B \subset Y$ das Urbild

$$f^{-1}(B) := \big\{x \in X : f(x) \in B\big\}$$

definiert. $f^{-1}(B)$ ist eine TEILMENGE von X.

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ kann man nur für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ definieren. In diesem Fall ist $f^{-1}(y)$ ein Element von X, für jedes $y \in Y$, und keine Teilmenge.

ii) Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, und es seien $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$, bzw. $\mathrm{id}_Y : Y \to Y\ y \mapsto y$, die identischen Abbildungen auf X bzw. auf Y, siehe 1.1.25 iii).
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ erfüllt

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ für alle } x \in X \quad \text{und} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \text{ für alle } y \in Y.$$

Es gilt also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Satz 1.1.39 *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Genau dann ist f bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. In diesem Fall ist $g = f^{-1}$, insbesondere ist g eindeutig bestimmt.*

Beweis.

1. Ist f bijektiv, so hat nach obiger Bemerkung $g := f^{-1}$ die geforderten Eigenschaften.

2. Es sei $g : Y \to X$ eine Abbildung mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Nach 1.1.35 iii) ist dann f injektiv (da id_X injektiv) und f surjektiv (da id_Y surjektiv), insgesamt ist f bijektiv.

3. Es sei $y \in Y$ beliebig. Dann existiert genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ (also $x = f^{-1}(y)$). Es folgt

$$g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x = f^{-1}(y)\,.$$

Da $y \in Y$ beliebig, gilt $g = f^{-1}$.

4. Die Bijektivität von g folgt wie in 2. durch Vertauschung der Rollen von f und g.

□

Definition 1.1.40 Es sei X eine Menge

i) Eine Teilmenge R von $X \times X := \big\{(x,y) : x,y \in X\big\}$ heißt Relation in X. Anstelle von $(x,y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim y$ und anstelle R auch „$\sim$ “.

ii) Eine Relation F in X heißt Äquivalenzrelation auf X, falls

   i) $x \sim x$ (d.h. $(x,x) \in R$) für alle $x \in X$ (Reflexivität)

   ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (d.h. $(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$) für alle $x,y \in X$ (Symmetrie)

   iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z)$ (d.h. $(x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$) für alle $x,y,z \in R$ (Transitivität)

iii) Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, so sei für $x \in X$

$$[x] := [x]_\sim := [x]_R := \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X : (x,y) \in R\}$$

die von x erzeugte Äquivalenzklasse.
Ist $y \in [x]$, so heißt y Repräsentant von $[x]$.

iv) $X/\sim := X/R := \big\{[x] : x \in X\big\} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt der Quotient von X modulo R.
$q_R : X \to X/R,\ x \mapsto [x]_R$, heißt Quotientenabbildung.

Definition 1.1.41 Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}(X)$ (also ein Mengensystem) heißt Zerlegung von X, falls

i) $M \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathscr{F}$,

ii) $\cup\mathscr{F} = X$,

iii) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Rightarrow M_1 = M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \mathscr{F}$.

Den Zusammenhang zwischen Äquivalenzklassen und Zerlegungen stellt folgender Satz her.

Satz 1.1.42 *Es sei X eine nichtleere Menge.*

i) Ist R eine Äquivalenzrelation, so ist X/R eine Zerlegung von X.

ii) Ist $\mathscr{F}$ umgekehrt eine Zerlegung von X, so ist

$$R_{\mathscr{F}} := \{(x, y) : \text{ es existiert ein } M \in \mathscr{F} \text{ mit } x, y \in M\}$$

eine Äquivalenzrelation auf X.

Jeder Äquivalenzrelation entspricht genau die Zerlegung, genauer: Die Abbildung

$$J : \{R : R \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\} \to \{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{ ist Zerlegung von } X\},$$
$$\text{wobei } J(R) := X/R,$$

ist bijektiv.

Beweis. (in den Übungen) □

1.2 Rationale, reelle und komplexe Zahlen

Wir stellen in diesem Kapitel die rationalen, reellen und komplexen Zahlen mittels Konstruktion bereit.

Wir beginnen mit der Definition eines Körpers.

Definition 1.2.1 Es sei K eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und es seien $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ Abbildungen. Dann heißt $K := (K, +, \cdot)$ Körper, falls folgendes gilt (wir schreiben $x + y$ anstelle von $+(x, y)$ und $x \cdot y$ anstelle von $\cdot(x, y)$):

(K1) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in K$ (Kommutativität).

(K2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$ (Assoziativität).

(K3) Es existiert ein Element $0_K \in K$ mit $x + 0_K = x$ für alle $x \in K$ (Existenz der Null).

(K4) Es existiert ein Element $1_K \in K \setminus \{0_K\} =: K^*$ mit $1_K \cdot x = x$ für alle $x \in K$ (Existenz der Eins).

(K5) Für alle $x \in K$ existiert ein Element $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0_K$, und für alle $x \in K^*$ existiert ein Element $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = 1_K$ (Existenz der Inversen).

(K6) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$ (Distributivität).

Bevor wir allgemeine Eigenschaften von Körpern beweisen (wie z.B. die Eindeutigkeit der Inversen), wollen wir den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen konstruieren.
Der Kürze halber sei zunächst $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0\}$. Wir starten mit der Menge

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* := \big\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\big\}$$

aller geordneten Paare (p, q), wobei p die Menge $\mathbb{Z}$ und q die Menge $\mathbb{Z}^*$ durchläuft.
Wir setzen $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, falls $p_1 q_2 = p_2 q_1$ gilt.

Lemma 1.2.2 *„$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, wir beweisen die Transitivität:
Es seien $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$ und $(p_2, q_2) \sim (p_3, q_3)$.
Dann gilt (definitionsgemäß) $p_1 q_2 = p_2 q_1$ und $p_2 q_3 = p_3 q_2$.
Hieraus folgt $p_1 q_2 q_3 = p_2 q_1 q_3 = p_3 q_2 q_1$.

Da $q_2 \neq 0$, folgt $p_1q_3 = p_3q_1$, also $(p_1, q_1) \sim (p_3, q_3)$. $\square$

Definition 1.2.3 Es sei $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, falls $p_1q_2 = p_2q_1$, und es sei $\frac{p}{q} := \big[(p, q)\big]_\sim$.

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_\sim = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$$

heißt Menge der rationalen Zahlen.

Wir wollen nun die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ definieren.

Im Falle der Addition müssen wir die Abbildung $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definieren, die jedem Paar $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ von Äquivalenzklassen eine weitere Äquivalenzklasse (nämlich die zukünftige Summe) zuordnet. Wir möchten gerne die Summe $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ als $\frac{ps+rq}{qs}$ setzen.
Hierzu müssen wir unbedingt nachrechnen, dass $\frac{ps+rq}{qs}$ nicht von der Wahl der Repräsentanten von $\frac{p}{s}$ und $\frac{r}{s}$ abhängt, wir müssen also zeigen:

Lemma 1.2.4 *Gilt* $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ *und* $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$, *dann ist* $\frac{p_1s_1+r_1q_1}{q_1s_1} = \frac{p_2s_2+r_2q_2}{q_2s_2}$ *für alle* $p_1, p_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ *und alle* $q_1, q_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^*$.

Beweis. Aus $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ und $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$ folgt aus der Definition der Äquivalenzklassen $\frac{p}{q} := \big[(p, q)\big]_\sim$, dass $p_1q_2 = p_2q_1$ und $r_1s_2 = r_2s_1$ gilt.
Es folgt hieraus

$$\begin{aligned}&(p_1s_1 + r_1q_1)(q_2s_2) = p_1q_2s_1s_2 + r_1s_2q_1q_2\\ &= p_2q_1s_1s_2 + r_2s_1q_1q_2 = (p_2s_2 + r_2q_2)(q_1s_1)\,.\end{aligned}$$

Dies bedeutet definitionsgemäß gerade

$$\frac{p_1s_1 + r_1q_1}{q_1s_1} = \frac{p_2s_2 + r_2q_2}{q_2s_2}\,.$$

$\square$

Mit den gleichen Argumenten zeigt man, dass die Multiplikation

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}$$

wohldefiniert ist.

Satz 1.2.5 *Versehen mit der Addition*

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps + rq}{qs}$$

und der Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}$$

ist $\mathbb{Q}$ ein Körper. Das Nullelement ist $\frac{0}{1}$, das Einselement ist $\frac{1}{1}$.
Das additive Inverse von $\frac{p}{q}$ ist $\frac{-p}{q}$ (d.h. - $\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$), und das multiplikative Inverse von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ ist $\frac{q}{p}$ (d.h. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$).

Beweis. Wir zeigen exemplarisch nur die Existenz der multiplikativen Inversen und das Distributivgesetz (K6), alle anderen Axiome rechnet man ähnlich nach.

1. Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, dh. $\frac{p}{q} \neq \frac{0}{1}$. Dann ist $p = p \cdot 1 \neq q \cdot 0 = 0$, also ist $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ und damit $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, und es gilt

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} = \frac{1}{1},$$

   wobei die letzte Gleichung natürlich aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt.

2. $\frac{n}{m}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{nm}{mm} \cdot \left(\frac{ps + rq}{qs}\right)$
   $= \frac{(nm)(ps + rq)}{(mm)(qs)} = \frac{(np)(ms) + (nr)(mq)}{(mq)(ms)}$
   $= \frac{np}{mq} + \frac{nr}{ms} = \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s}\right).$

   Bei der ersten Gleichung haben wir die Definition der Äquivalenzrelation (es gilt danach $\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$ für $k \neq 0$) und die Definition der Addition verwendet, bei der zweiten die der Multiplikation, bei der vierten die der Addition und bei der fünften wieder die der Multiplikation. □

Bemerkung 1.2.6 Es sei $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \ n \mapsto \frac{n}{1}$.
Dann ist ι injektiv ($\frac{n}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow n \cdot 1 = 1 \cdot m$, also $n = m$), und es gilt

i) $\iota(n+m) = \dfrac{n+m}{1} = \dfrac{n\cdot 1 + 1\cdot m}{1\cdot 1} = \dfrac{n}{1} + \dfrac{m}{1} = \iota(n) + \iota(m)$,

ii) $\iota(nm) = \dfrac{nm}{1} = \dfrac{nm}{1\cdot 1} = \dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{m}{1} = \iota(n)\cdot\iota(m)$,

iii) $\iota(0) = \dfrac{0}{1},\ \iota(1) = \dfrac{1}{1}$.

ι erhält also die Addition und die Multiplikation (es ist dasselbe, ob wir vor oder nach der Anwendung von ι addieren oder multiplizieren), und auf Grund der Injektivität ist $\iota : \mathbb{Z} \to \iota(\mathbb{Z})$ bijektiv.
Wir identifizieren daher $\mathbb{Z}$ mit $\iota(\mathbb{Z})$ und schreiben $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ein Beispiel für einen ungewöhnlichen Körper enthält

Beispiel 1.2.7 Es sei $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit der Addition

$$0 + 0 := 1 + 1 := 0\,,$$
$$0 + 1 := 1 + 0 := 1\,,$$

und der Multiplikation

$$0\cdot 0 := 0\cdot 1 := 1\cdot 0 := 0\,,$$
$$1\cdot 1 := 1\,,$$

ist ein Körper mit Nullelement $0_{\mathbb{F}_2} = 0$ und Einselement $1_{\mathbb{F}_2} = 1$.
Dies wird in den Übungen gezeigt.

Obiger Körper hat eine einfache Interpretation.
Wechseln wir die Bezeichnungen und setzen $g := 0$ und $u := 1$, wobei g für „gerade Zahl“ und u für „ungerade Zahl“ steht, so beschreibt obiger Körper gerade das Addieren und Multiplizieren gerader bzw. ungerader ganzer Zahlen: $u + u = g + g = g,\ g + u = u + g = u, g\cdot g = g\cdot u = u\cdot g = g,\ u\cdot u = u$.

Bezeichnung 1.2.8 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Anstelle von $x\cdot y$ schreiben wir xy, anstelle von $(x\cdot y) + z$ schreiben wir $xy + z$ (Punktrechnung vor Strichrechnung). Weiter verwenden wir $x - y$ anstelle von $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ (oder x/y) statt xy^{-1}.

Satz 1.2.9 *Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt*

i) Das Nullelement 0_K und das Einselement 1_K sind eindeutig bestimmt.

ii) Sind $a, b \in K$, dann existiert genau ein $x \in K$ mit $a + x = b$. Es gilt $x = b - a$.

iii) Ist $a \in K^*$ und $b \in K$, dann existiert genau ein $x \in K$ mit $ax = b$. Es gilt $x = \frac{b}{a}$.

iv) Die inversen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

Es gelten weiter folgende Rechenregeln:

v) $xy = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$,

$-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$ (d.h. $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$), falls $x \neq 0$,

$-(xy) = (-x)y = x(-y)$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ (d.h. $\frac{1}{xy} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}$), falls $x, y \in K^*$.

Beweis.

i) Es sei $a \in K$ mit $x + a = x$ für alle $x \in K$. Dann gilt für $x = 0_K$:

$$a = a + 0_K = 0_K + a = 0_K, \text{ es war also } a = 0_K.$$

Der zweite Teil von i) wird analog gezeigt.

ii) Es seien $a, b \in K$ und $x := b - a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a + x &= a + (b - a) = a + (-a + b) \\ &= \big(a + (-a)\big) + b = 0_K + b = b + 0_K = b\,. \end{aligned}$$

Es sei $x' \in K$ mit $a + x' = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0_K = x' + (a - a) = (x' + a) - a \\ &= (a + x') - a = b - a\,. \end{aligned}$$

iii) wird wie ii) gezeigt.

iv) folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen von ii) bzw. iii) für $b = 0$ bzw. $b = 1$.

v) Wir beweisen exemplarisch $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \neq 0_K$.
Es gilt
$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1_K$$
und wegen $x^{-1}x = 0$ muss $x^{-1} \neq 0$ gelten. x^{-1} hat also ein Inverses $(x^{-1})^{-1}$. Für dieses gilt auch $x^{-1}(x^{-1})^{-1} = 1_K$. Da das Inverse aber nach iv) eindeutig ist, muss $x = (x^{-1})^{-1}$ gelten. $\square$

Definition/Bemerkung 1.2.10 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Aufgrund der Assoziativgesetze gilt
$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \text{und} \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$
Wir können also die Klammern weglassen und schreiben
$$\begin{aligned} &x + y + z \ \text{ anstelle von } \ x + (y + z) \ \text{ und } \ (x + y) + z\,, \ \text{ sowie} \\ &x \cdot y \cdot z \ \text{ anstelle von } \ x \cdot (y \cdot z) \quad \text{ und } \ (x \cdot y) \cdot z\,. \end{aligned}$$
Dasselbe gilt für mehr als drei Summanden bzw. Faktoren. Wir setzen
$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu := x_1 + x_2 + \ldots x_n \qquad \text{und} \qquad \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\,,$$
wenn $x_1, \ldots, x_n \in K,\ n \in \mathbb{N}$.
Gilt $x = x_1 = \ldots = x_n \in K$, so setzen wir
$$\begin{aligned} n \cdot x \ &:= \ \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ Summanden}} \qquad \text{und} \\ x^n \ &:= \ \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}\,. \end{aligned}$$
Achtung: $n \cdot x$ ist im Allgemeinen nicht das Produkt zweier Körperelemente; ist nämlich $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ (siehe Beispiel 1.2.7), so ist zwar $1 \cdot 1 = 1$, aber $2 \cdot 1 = 1 + 1 = 0$.
Allgemein gilt
$$n \cdot 1 = \begin{cases} 0 & : \ n \text{ gerade} \\ 1 & : \ n \text{ ungerade} \end{cases}\,.$$
Wir setzen noch
$$\begin{aligned} (-n) \cdot x \ &:= \ -(n \cdot x), \quad 0 \cdot x \ := \ 0\,, \\ x^{-n} \ &:= \ (x^{-1})^n \ (x \neq 0), \quad x^0 := 1_K, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in K\,, \end{aligned}$$

und wir haben somit beliebige Vielfache $n \cdot x$ und beliebige Potenzen x^n für $n \in \mathbb{Z}$ erklärt.

Satz 1.2.11 *Es seien $x, x_1, x_2 \in K$ und $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl}
\textit{i)} & n_1 \cdot x + n_2 \cdot x & = & (n_1 + n_2) \cdot x, \\
\textit{ii)} & n \cdot (x_1 x_2) & = & n \cdot x_1 + n \cdot x_2, \\
\textit{iii)} & n_1 \cdot (n_2 \cdot x) & = & (n_1 n_2) \cdot x, \\
\textit{iv)} & x^{n_1} \cdot x^{n_2} & = & x^{n_1 + n_2},\ x \neq 0, \\
\textit{v)} & x_1^n \cdot x_2^n & = & (x_1 \cdot x_2)^n,\ x_1, x_2 \neq 0, \\
\textit{vi)} & (x^{n_1})^{n_2} & = & x^{n_1 n_2},\ x \neq 0.
\end{array}$$

Beweis. (in den Übungen) □

Ab jetzt werden wir die Körperaxiome, ihre Folgerungen und die Bezeichnungen stillschweigend verwenden:

i) Es seien $x, a_0, \ldots, a_n,\ b_0, \ldots, b_m$ Elemente eines Körpers K, so gilt z.B.

$$\begin{aligned}
x \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu &= x(a_0 + \ldots + a_n) = xa_0 + xa_1 + \ldots + xa_n \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} xa_\nu
\end{aligned}$$

oder

$$x \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} x(a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} xa_\nu + xb_\nu$$

wie auch

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\Big) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\mu.$$

„Allgemeines Distributivgesetz“

ii) Weiter kann man schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu+1} \quad \text{oder}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=2}^{n+1} a_{\nu-1} \quad \text{wie auch}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{n-\nu+1}\,.$$

Eine wichtige mathematische Beweismethode ist das Prinzip der vollständigen Induktion: Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Prinzip der vollständigen Induktion:

i) Es ist $A(n)$ richtig (Induktionsanfang).

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ (oder auch von $A(1), \ldots, A(n)$), der Induktionsannahme, folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$ (Induktionsschritt).

Dann ist $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Manchmal will man auch Aussagen $A(n)$ für alle $n \geq N$ ($N \in \mathbb{N}_0$ fest) beweisen. Dann macht man den Induktionsanfang für $A(N)$ (anstelle $A(n)$) und den Induktionsschritt für alle $n \geq N$.

Ein Fall für die vollständige Induktion ist

Satz 1.2.12 *Es gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

1. Induktionsanfang $n = 1$:
   Es gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{1} \nu = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, d.h. die Aussage gilt für $n = 1$.

2. Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:
   Induktionsannahme: Es gelte $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Dann folgt
   $$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu\Big) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
   d. h. die Aussage gilt auch für $n + 1$.

Aus 1. und 2. folgt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung. $\square$

Satz 1.2.13 *(Geometrische Summenformel) Es sei K ein Körper, und es sei $x \in K \backslash \{1_K\}$. Dann gilt*
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \frac{1_K - x^n}{1_K - x}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Beachte: $\frac{z}{w} := zw^{-1}$, $x^0 := 1_K$, nach 1.2.8)

Beweis. (durch vollständige Induktion)

1. Induktionsanfang $n = 1$:
   $$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{0} x^\nu = x^0 = 1_K = \frac{1_K - x}{1_K - x}.$$

2. Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:
   Es gelte $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \frac{1-x^n}{1-x}$. Dann folgt
   $$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu &= \frac{1-x}{1-x}x^n + \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.\end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt die Behauptung. □

Definition 1.2.14 Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} n! &:= \prod_{\nu=1}^{n} \nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \text{ und} \\ 0! &:= 1. \end{aligned}$$

Satz 1.2.15 *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Menge*

$$\Pi_n := S_n := \big\{\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \pi \textit{ ist bijektiv}\big\}$$

genau $n!$ Elemente. S_n heißt Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.

Beweis. (in den Übungen) □

Definition 1.2.16 (Binomialkoeffizienten)
Es seien $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Man setzt

$$\binom{n}{\nu} := \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!} = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{n-k+1}{k} \text{ für } \nu \geq 1 \text{ und}$$

$$\binom{n}{0} := 1.$$

Bemerkung 1.2.17 Aus der Definition folgt sofort für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}, \text{ falls } \nu \leq n, \text{ sowie}$$

$$\binom{n}{\nu} = 0, \text{ falls } \nu > n.$$

Satz 1.2.18 *Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\nu \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}.$$

Beweis. 1. Fall: $1 \leq \nu \leq n$. Es gilt (nach 1.2.17)

$$\begin{aligned}\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-(\nu-1))!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \\ &= \frac{n!\nu}{\nu!(n+1-\nu)!} + \frac{n!(n+1-\nu)}{\nu!(n+1-\nu)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}.\end{aligned}$$

2. Fall: $\nu = n+1$. Dann gilt

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = \binom{n+1}{n+1}.$$

3. Fall: $\nu > n+1$. Dann gilt

$$\binom{n}{\nu} + \binom{n}{n+1} = 0 + 0 = \binom{n+1}{\nu}.$$

□

Definition 1.2.19 Ist A eine endliche Menge, so sei $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Ist A keine endliche Menge, so heißt A unendliche Menge, und wir schreiben $|A| = \infty$.

Satz 1.2.20 *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\nu \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$\left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n\} : |M| = \nu\right\}\right| = \binom{n}{\nu}.$$

Insbesondere ist $\binom{n}{\nu} \in \mathbb{N}_0$ für alle $n, \nu \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Es sei $\alpha_\nu^n := \left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n\} : |M| = \nu\right\}\right|$.

1. Ist $\nu > n$, dann gilt $\alpha_\nu^n = 0 = \binom{n}{\nu}$,

   $\alpha_0^n = 1 = \binom{n}{0}$, (Beachte: $\emptyset \subset \{1, \ldots, n\}$),

   $\alpha_1^n = n = \binom{n}{1}$, $\quad \alpha_n^n = 1 = \binom{n}{n}$.

2. Vollständige Induktion über n.

   i) $n = 1$: Nach 1. gilt $\alpha_0^1 = \binom{n}{0}$, $\alpha_1^1 = \binom{1}{1}$, $\alpha_\nu^1 = \binom{1}{\nu}$, $\nu > 1$.

ii) $n \mapsto n+1$. Es gelte $\alpha_\nu^n = \binom{n}{\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu^{n+1} &= \left|\left\{M \subset \{1,\dots,n+1\} : |M| = \nu\right\}\right| \\
&= \left|\left\{M \subset \{1,\dots,n\} : |M| = \nu\right\}\right| \\
&\quad + \left|\left\{\{n+1\} \cup M : M \subset \{1,\dots,n\}, |M| = \nu - 1\right\}\right| \\
&= \binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu-1} = \binom{n+1}{\nu}.
\end{aligned}$$

□

Aus der Gleichung $\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}$ kann man unter Zuhilfenahme von $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ die Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen. Dies veranschaulicht das Pascalsche Dreieck, in dem die Summe zweier nebeneinander stehender Zahlen gerade die darunter stehende Zahl ergibt.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Satz 1.2.21 *(Binomischer Lehrsatz)* *Es sei K ein Körper und $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu}.$$

Beweis. (durch vollständige Induktion)

1. $n = 0$: $(x+y)^0 = 1_K = x^0 y^0 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} x^\nu y^{0-\nu}$.

2. $n \mapsto n+1$: Es gelte $(x+y)^n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}x^{\nu+1}y^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n+1}\tbinom{n}{\mu-1}x^{\mu}y^{n-(\mu-1)} + \sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{n}{\nu}x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n}\tbinom{n}{\nu-1}x^{\nu}y^{n+1-\nu} + \tbinom{n}{n}x^{n+1}y^0 \\
&\quad +\tbinom{n}{0}\cdot x^0y^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n}\tbinom{n}{\nu}x^\nu y^{n+1-\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tbinom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n}\Big[\underbrace{\tbinom{n}{\nu-1}+\tbinom{n}{\nu}}_{=\binom{n+1}{\nu}}\Big]x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&\quad +\tbinom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{\nu}x^\nu y^{n+1-\nu}\,.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.22 Es sei $K=(K,+,\cdot)$ ein Körper. Eine Relation $<$ in K heißt Ordnung, falls gilt

(O1) Für alle $x,y\in K$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen
$x<y,\ y<x,\ x=y$ (Trichotomie).

(O2) $x<y$ und $y<z$ impliziert $x<z$ für alle $x,y,z\in K$ (Transitivität).

(O3) $x<y$ impliziert $x+z<y+z$ für alle $x,y,z\in K$ (Monotonie der Addition).

(O4) $x<y$ und $0_K<z$ impliziert $xz<yz$ für alle $x,y,z\in K$ (Monotonie der Multiplikation).

$K=(K,+,\cdot,<)$ heißt dann geordneter Körper.

Bezeichnung 1.2.23 Es sei K ein geordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$.

i) Anstelle $x < y$ schreiben wir auch $y > x$.
Gilt $x = y$ oder $x < y$, so schreiben wir $x \leq y$ oder $y \geq x$.

ii) x heißt positiv, falls $x > 0_K$,
x heißt negativ, falls $x < 0_K$,
x heißt nichtnegativ, falls $x \geq 0_K$.

iii) $K^* := K \backslash \{0\}$ (schon definiert)
$K^+ := \{x \in K : x > 0_K\}$,
$K^- := \{x \in K : x < 0_K\}$,
$K_0^+ := \{x \in K : x \geq 0_K\}$.

Es sei $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ der Körper der rationalen Zahlen. Ist $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so gilt $\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$ (da $(-p)q = p(-q)$ in $\mathbb{Z}$).
Wir können also ohne Einschränkung $0 < q$ (d.h. $q \in \mathbb{N}$) voraussetzen. Hier bedeutet $<$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$.
Sind nun $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, so setzt man

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \quad \text{falls } p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ gilt.}$$

Satz 1.2.24 $\mathbb{Q}$ *ist ein geordneter Körper.*

Beweis. Wir zeigen exemplarisch (03), den Rest der Ordnungsaxiome weist man ähnlich nach.
Seien dann $r, p_1, p_2 \in \mathbb{Z},\ s, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}\,.$$

Dann gilt $p_1 q_2 < p_2 q_1$. Hieraus ergibt sich

$$p_1 q_2 s s + r q_1 q_2 s < p_2 q_1 s s + r q_1 q_2 s\,,$$

also gilt

$$(p_1 s + r q_1) q_2 s < (p_2 s + r q_2) q_1 s\,,$$

was

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{r}{s} = \frac{p_1 s + r q_1}{q_1 s} < \frac{p_2 s + r q_2}{q_2 s} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{r}{s}$$

impliziert. □

Bemerkung 1.2.25 Wir hatten in 1.2.6 bemerkt, dass die „natürliche Einbettung“

$$\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto \frac{n}{1},$$

die Addition und die Multiplikation respektiert.
ι erhält auch die Ordnung, d.h.

$$\iota(n) < \iota(m) \text{ genau dann, wenn } n < m.$$

Satz 1.2.26 *Es sei K ein geordneter Körper, und es seien $x, y \in K$. Dann gilt*

i) $x > 0_K$ *genau dann, wenn* $-x < 0_K$.

ii) *Aus* $x, y < 0_K$ *folgt* $xy > 0_K$.

iii) $x^2 > 0_K$ *genau dann, wenn* $x \neq 0$.

iv) $1_K > 0_K$.

v) *Aus* $y > x > 0_K$ *folgt* $-y < -x < 0_K$ *und* $x^{-1} > y^{-1} > 0_K$.

Beweis. (in den Übungen) □

Satz 1.2.27 *(Bernoullische Ungleichung) Es sei K ein geordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq -1_K$. Dann gilt*

$$(1_K + x)^n \geq 1_K + nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (durch vollständige Induktion)

1. $n = 0$:
$$(1_K + x)^0 = 1_K = 1_K + 0 \cdot x\,.$$

2. $n \mapsto n+1$): Es gelte $(1_K + x)^n \geq 1_K + n \cdot x$. Dann folgt mit (04), (03) und 1.2.26 iii):
$$\begin{aligned}(1_K + x)^{n+1} &= (1_K + x)(1_K + x)^n \geq (1_K + x)(1_K + n \cdot x)\\ &= 1_K + n \cdot x + x + n \cdot x^2 = 1_K + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2\\ &\geq 1_K + (n+1) \cdot x\,.\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.28 Es sei K ein geordneter Körper und $x \in K$.

$$|x| := \begin{cases} x: & x \geq 0 \\ -x: & x < 0 \end{cases}$$

heißt der Betrag (oder Absolutbetrag) von x. Die Abbildung $|\cdot| : K \to K, x \mapsto |x|$, heißt Betragsfunktion.

Bemerkung 1.2.29 Es sei K ein geordneter Körper.

i) Dann gilt: $|x| = |-x|$; $x, -x \leq |x|$; $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in K$.

ii) Ist $x \in K$ und $y > 0$, so gilt

$$|x| < y \text{ genau dann, wenn } -y < x < y.$$

Satz 1.2.30 *(Dreiecksungleichung)* *Es sei K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Beweis. 1. Fall: $x + y \geq 0$. Dann gilt

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

wegen 1.2.29 i) und der Monotonie der Addition.
2. Fall: $x + y < 0$. Dann gilt

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| ,$$

ebenfalls wegen 1.2.29 i) und der Monotonie der Addition. □

Korollar 1.2.31 *Es sei K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| .$$

Beweis. (in den Übungen) □

Definition 1.2.32 Es sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$ eine Teilmenge von K.

i) $x \in K$ heißt obere (untere) Schranke für M, falls $m \leq x$ (bzw. $m \geq x$) für alle $m \in M$.

ii) M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls M eine obere (untere) Schranke besitzt.

iii) M heißt beschränkt, falls ein $x \in K$ existiert mit $|m| \leq x$ für alle $m \in M$.

iv) Eine obere (untere) Schranke x für M heißt Supremum (Infimum) von M, falls $x \leq y$ (bzw. $x \geq y$) für alle oberen (unteren) Schranken y für M gilt.

v) Ein Supremum (Infimum) x heißt Maximum (Minimum) von M, falls zusätzlich $x \in M$ gilt.

Bemerkung 1.2.33 i) M ist beschränkt genau dann, wenn M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

ii) Supremum und Infimum müssen nicht existieren, auch wenn die vorliegende Menge beschränkt ist.
Ist jedoch x ein Supremum (bzw. Infimum), so ist x aufgrund (O1) schon eindeutig bestimmt und man setzt

$$\sup M := x \quad (\text{bzw. } \inf M := x)\,.$$

iii) Auch wenn die Menge M ein Supremum (Infimum) besitzt, so braucht sie kein Maximum (bzw. Minimum) zu besitzen, z.B. ist dies bei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ der Fall:
$\sup M = 0$, aber wegen $0 \notin M$ hat M kein Maximum.
Besitzt jedoch M ein Maximum (Minimum) x, so ist dieses natürlich wieder eindeutig bestimmt, und man setzt

$$\max M := x \quad (\text{bzw. } \min M := x)\,.$$

Satz 1.2.34 *(Archimedes) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x \geq y$.*

Beweis. Es sei $x = \frac{p_1}{q_1},\ y = \frac{p_2}{q_2}$ mit $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.
Wählen wir $n := p_2 q_1$, so folgt

$$\begin{aligned} n \cdot x = \frac{n}{1} \cdot x \quad &= \quad \frac{n \cdot p_1}{q_1} = \frac{p_2 q_1 p_1}{q_1} \\ &= \underbrace{\frac{p_1 q_2}{1}}_{\geq 1,\ \text{da } p_1, q_2 \in \mathbb{N}} \cdot \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \\ &\geq \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_2}{q_2} = y\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.2.35 Fassen wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auf, so ist $\mathbb{N}$ nach unten durch $n = 1$ beschränkt.
Aus 1.2.34 folgt, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist.

Bemerkung 1.2.36 In jedem geordneten Körper hat die Gleichung $n \cdot x = y$ für jedes $y \in K$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h.

> Für alle $y \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in K$ mit $n \cdot x = y$.

Dies folgt aus $n \cdot 1_K > 0$ (Monotonie der Addition) und 1.2.9 iii).
Leider sieht dies bei Gleichungen $x^n = y$ ganz anders aus.

Satz 1.2.37 *In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung.*

Beweis.

1. Es sei $p \in \mathbb{Z}$ und p^2 gerade sei gerade. Dann ist auch p gerade. Nehmen wir nämlich an, dass p ungerade ist, d.h. $p = 2r + 1, r \in \mathbb{Z}$, gilt, dann ist $p^2 = 4r^2 + 4r + 1$ auch ungerade. Dies ist ein Widerspruch, also ist p gerade.

2. Wir nehmen an, dass $x^2 = 2$ für ein $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Ohne Einschränkung sei $x > 0$. Betrachten wir die Menge $\{r \in \mathbb{N} : x = \frac{s}{r},\ s \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge besitzt ein kleinstes Element q. Es gibt also eine Darstellung $x = \frac{p}{q}$ mit q minimal. Es folgt $\frac{p^2}{q^2} = x^2 = 2$ und somit $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 gerade und nach 1. ist auch p gerade, d.h. $p = 2p_0$ mit einem $p_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $2q^2 = 4p_0^2$, also $q^2 = 2p_0^2$. Somit ist q^2 gerade, also ist mit 1. auch $q = 2q_0$ mit einem $q_0 \in \mathbb{N}$.
   Es folgt $x = \frac{p}{q} = \frac{2p_0}{2q_0} = \frac{p_0}{q_0}$, insbesondere besitzt x eine Darstellung $\frac{p_0}{q_0}$ mit $q_0 < q$, ein Widerspruch.
   Die Annahme $x^2 = 2$ und das Axiom, dass jede Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt, ist nicht vereinbar. Also ist die Annahme falsch, ihr logisches Gegenteil richtig, und damit existiert **kein** $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. □

Auf der anderen Seite kann man das „babylonische Wurzelziehen“ verwenden, um Näherungslösungen zu erlangen:
Wir starten mit $x_1 := 2$ und setzen rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Idee hinter diesem Verfahren ist: Würde $x_n^2 = 2$ gelten, dann wäre $x_n = \frac{2}{x_n}$, andernfalls ist $x_n \neq \frac{2}{x_n}$. Man hofft, dass das arithmetische Mittel $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ ein besserer Näherungswert ist.
Mein Rechner liefert nach $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1,5\\
x_3 &= 1,41666667\\
x_4 &= 1,41421568627451\\
x_5 &= 1,41421356237469\\
x_6 &= 1,414213562373095\\
x_7 &= 1,414213562373095\\
x_8 &= 1,414213562373095
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= 4\\
x_2^2 &= 2,25\\
x_3^2 &= 2,0069\cdots\\
x_4^2 &= 2,0000060\\
x_5^2 &= 2,000000000045\ldots\\
x_6^2 &= 2
\end{aligned}$$

Der letzte Wert ist auf jeden Fall falsch, da ja keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ existieren kann und der Rechner nur rationale Zahlen (noch nicht einmal alle) darstellen kann.
Grund für den Fehler ist natürlich die beschränkte Genauigkeit des Rechners.
Würde man statt dessen einen Rechner mit beliebiger Genauigkeit verwenden, so erhielte man:

1. Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass sich die Werte x_n für $n \geq N$ nur ab der $(s+1)$-ten Nachkommastelle unterscheiden, d.h. es gilt
$$|x_n - x_m| < 10^{-s} \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$
Anders ausgedrückt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

2. Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so das sich die Werte x_n^2 von 2 für $n \geq N$ nur ab der $(s+1)$-ten Nachkommastelle unterscheiden, d.h. es gilt
$$|x_n^2 - 2| < 10^{-s} \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$
Anders ausgedrückt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$|x_n^2 - 2| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Wir werden später zeigen, dass **keine** Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

Daher werden wir die sogenannten reellen Zahlen konstruieren, und dort gibt es ein $x > 0$ mit obiger Eigenschaft. Dieses x erfüllt dann auch $x^2 = 2$ und wir nennen dieses x dann $\sqrt{2}$.

Mit der Definition
$$x_1 := 2,\ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

haben wir jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ zugeordnet, d.h. wir haben eine Abbildung

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad x(n) := x_n ,$$

definiert. Eine solche Abbildung nennt man auch Folge in $\mathbb{Q}$ oder Folge rationaler Zahlen. Allgemeiner geben wir folgende

Definition 1.2.38 Ist X eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$x : \mathbb{N} \to X$$

eine Folge in X. Die Menge aller Folgen in X wird mit $X^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Bemerkung/Bezeichnung 1.2.39 i) Ist $x : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in X, so schreibt man traditionell

$$x_n := x^{(n)} := x(n), \quad n \in \mathbb{N} ,$$

(sogenannte Indexschreibweise) und setzt

$$(x_1, x_2, \ldots) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} := x.$$

ii) Man verwechsle die Folge $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht mit der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder!
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N} \to X$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Teilmenge von X.

iii) Sind J und X Mengen, so bezeichnet man mit X^J die Menge aller Abbildungen J nach X, es ist also

$$X^J = \{f : J \to X : \ f \text{ ist eine Abbildung}\} .$$

Etwas allgemeiner als in 1.2.38 bezeichnet man auch Elemente von $X^{\mathbb{N}_0}$ oder von X^J, wobei $J = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$, ($N \in \mathbb{Z}$ fest), als Folgen in X. Man setzt wieder

$$x_n := x^{(n)} := x(n),$$

und schreibt

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

anstelle von $x : \mathbb{N}_0 \to X$, und man schreibt

$$(x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots) := (x_n)_{n \geq N} := (x^{(n)})_{n \geq N}$$

anstelle von

$$x : \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \to X.$$

Beispiel 1.2.40 i) Es sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$. Gemäß unserer Konvention schreiben wir $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ anstelle von x. Weitere Beispiele für Folgen rationaler Zahlen (d.h. Folgen in $\mathbb{Q}$):

$$\begin{aligned} (1, 2, 3,) \ldots &= (n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \ldots) &= (-\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}, \\ (1, q, q^2, \ldots) &= (q^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{für } q \in \mathbb{Q} \text{ fest.} \end{aligned}$$

Die letzteren Schreibweisen sind zu empfehlen, denn bei der ersteren Schreibweise kann man nur wenige Folgenglieder angeben, die restlichen muss man „raten“.

ii) (Konstante Folgen) Es sei X eine Menge und $a \in X$ ein Element von X. Dann setzt man

$$a_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to X, \quad n \mapsto a\,,$$

d.h. $a_{\mathbb{N}} = (a, a, a, \ldots) = (a)_{n \in \mathbb{N}}$.
Diese Folgen nehmen nur einen Wert an (hier a), und sie heißen konstante Folgen.

Definition 1.2.41 Es sei K ein geordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K heißt

i) monoton wachsend (fallend), falls $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$), $n \in \mathbb{N}$,

ii) monoton, falls sie monoton wachsend oder fallend ist,

iii) streng monoton wachsend (fallend), falls $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$), $n \in \mathbb{N}$,

iv) nach oben beschränkt (nach unten beschränkt, beschränkt), falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt (nach unten beschränkt, beschränkt) ist.

Beispiel 1.2.42 Es sei $K = \mathbb{Q}$.

i) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (siehe oben) streng monoton wachsend, sie ist nach unten beschränkt, eine untere Schranke ist z.B. $m = 1$.
$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach 1.2.35 nicht nach oben beschränkt.

ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und streng monoton fallend.

iii) Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht monoton.

iv) Eine konstante Folge ist sowohl monoton wachsend als auch fallend. Außerdem ist sie beschränkt.

Bemerkung 1.2.43 i) Streng monoton wachsende Folgen ganzer Zahlen sind nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt.

ii) Streng monoton fallende Folgen ganzer Zahlen sind nach oben beschränkt, aber nicht nach unten beschränkt.

Beispiel 1.2.44 Es sei $q \in \mathbb{Q}$ fest. Dann ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

i) monoton wachsend genau dann, wenn $q \geq 1$,

ii) streng monoton wachsend genau dann, wenn $q > 1$,

iii) monoton fallend genau dann, wenn $0 \leq q \leq 1$,

iv) streng monoton fallend genau dann, wenn $0 < q < 1$,

v) beschränkt genau dann, wenn $|q| \leq 1$.

(Siehe Übung.)

Definition 1.2.45 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der Menge X und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$$

Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Anders ausgedrückt: Ist $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend, so heißt $x \circ n$ $(\in X^{\mathbb{N}})$ Teilfolge von x.

Beispiel 1.2.46 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $n_k = k+1, m_k = k^2, \ell_k = k, k \in \mathbb{N}$.
Dann sind

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (x_2, x_3, x_4, \ldots),$$
$$(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{k^2})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_4, x_9, \ldots),$$
$$(x_{\ell_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ins insbesondere $X = \mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhalten wir

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right),$$
$$(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right),$$
$$(x_{\ell_k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung 1.2.47 Beschränktheit und Monotonie übertragen sich auf Teilfolgen.

Definition 1.2.48 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem geordneten Körper K heißt

i) Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\geq N}\ |x_n - x_m| < \varepsilon\,,$$

ii) konvergent gegen $x_0 \in K$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ |x_n - x_0| < \varepsilon\,,$$

iii) konvergent, falls ein $x_0 \in K$ existiert, so dass $(x_n)_n$ gegen x_0 konvergiert,

iv) divergent, falls $(x_n)_n$ nicht konvergent ist.

Bemerkung/Bezeichnung 1.2.49 i) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, so schreiben wir

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,$$

$$x_n \longrightarrow x_n \ (n \to \infty),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

oder kürzer

$$x_n \to x_0,$$

$$\lim x_n = x_0.$$

ii) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

iii) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann, wenn $|x_n - x_0| \to 0$ $(n \to \infty)$, also wenn $(|x_n - x_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Beispiel 1.2.50 i) Ist $a \in K$, so konvergiert $a_{\mathbb{N}} = (a, a \ldots)$ offensichtlich gegen a.
Es sei $K = \mathbb{Q}$.

ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach 1.2.34 (Satz von Archimedes) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$.
Es sei $n \geq N$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon\,.$$

Dies ist die typische Struktur eines Konvergenzbeweises: $\varepsilon > 0$ vorgeben, N wählen oder sich beschaffen, dann $n \geq N$ vorgeben und

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

zeigen.

iii) α) Es sei $q \in \mathbb{Q}$, $|q| < 1$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge: Setzen wir zunächst $x := \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)(> 0)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert (nach dem Satz von Archimedes) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $Nx > \frac{1}{\varepsilon}$. Es sei $n \geq N$. Dann folgt mit der Bernoullischen Ungleichung (1.2.27):

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} < \varepsilon\,.$$

β) Ist $q = 1$, so ist $q^n = 1, n \in \mathbb{N}$, und $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

γ) Für $q = -1$ und $|q| > 1$ divergiert $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, siehe Übungen.

Satz 1.2.51 *Es sei K ein geordneter Körper, und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann gilt:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat höchstens einen Grenzwert.*

ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge.*

iii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x_0*, so konvergiert auch jede Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* x_0.

iv) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge, so ist auch jede Teilfolge eine Cauchyfolge.*

v) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *besitzt, so konvergiert auch* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, und zwar zum selben Grenzwert.*

Beweis.

i) Wir nehmen an, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe zwei verschiedene Grenzwerte z_1 und z_2. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}|z_1 - z_2| > 0$. Da $x_n \to z_j, j = 1, 2$, existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - z_1| < \varepsilon, n \geq N_1$ und $|x_n - z_2| < \varepsilon, n \geq N_2$. Dann gilt für $n = \max\{N_1, N_2\}$

$$2\varepsilon = |z_1 - z_2| \leq |z_1 - x_n| + |z_2 - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

im Widerspruch zu (01). Also ist die Annahme falsch und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

ii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Nach Voraussetzung existiert ein $x_0 \in K$ mit $x_n \to x_0$. Daher existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \varepsilon',\ n \geq N$.
Es folgt

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.
Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

iii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_0| < \varepsilon,\ n \geq N.$$

Setze $K := N$. Ist nun $k \geq K$, so gilt $n_k \geq k \geq K \geq N$, also auch

$$|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon.$$

iv) wird analog iii) gezeigt.

v) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon',\ k \geq K\,.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon',\quad m, n \geq N\,.$$

Es sei $n \geq N$ beliebig. Wähle $k \geq K$ mit $n_k \geq N$ (z. B. $k := \max\{K, N\}$). Dann gilt

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

□

Bemerkung 1.2.52 Wir haben im obigen Beweis nur folgende drei Eigenschaften von $d(x, y) := |x - y|$ $(x, y \in K)$ ausgenutzt:

i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Satz 1.2.53 *Jede Cauchyfolge in einem geordneten Körper ist beschränkt.*

Beweis. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.
Wähle $C \geq 1 + |x_N|$ und $C \geq |x_j|$, $j = 1, \ldots, N-1$, (also z.B. $C := 1 + \sum\limits_{j=1}^{N} |x_j|$). Dann gilt

$$|x_n| \leq C \text{ für } 1 \leq n \leq N-1 \text{ und}$$
$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < \varepsilon + |x_N| = 1 + |x_n| \leq C \text{ für } n \geq N.$$

Insgesamt ist also $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 1.2.54 *Es seien K ein geordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in K mit*

i) $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n \in \mathbb{N}$, *und*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar zum selben Grenzwert.

Beweis. Es sei $w := \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.
Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - w| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |z_n - w| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt für $n \geq N$:

$$-\varepsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \varepsilon,$$

also $|y_n - w| < \varepsilon$. □

Satz 1.2.55 *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in dem geordneten Körper K. Dann gilt*

i) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind Cauchyfolgen. Insbesondere ist* $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für alle $a \in K$ eine Cauchyfolge.*

ii) Existiert ein $\delta > 0$, so dass $|y_n| \geq \delta, n \in \mathbb{N}$, so ist $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Beweis.

i) α) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Nach Voraussetzung existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m, n \geq N$.

β) Nach 1.2.53 sind $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.
Da die Vereinigung endlich vieler beschränkter Mengen wieder beschränkt ist, existiert also ein $C > 0$ mit

$$|x_n|, |y_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2C}$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$.
Sind nun $n, m \geq N$ beliebig, so folgt

$$\begin{aligned} &|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \\ &\leq |x_n(y_n - y_m)| + |(x_n - x_m) y_m| \\ &= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m| \\ &< C\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} C = \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Wegen i) reicht es zu zeigen: $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \delta^2 \varepsilon$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$.
Hieraus folgt

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_m} \right| = \left| \frac{y_m - y_n}{y_n y_m} \right| \leq \frac{1}{\delta^2}\, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.

□

Bemerkung 1.2.56 Es sei $K = \mathbb{Q}$ (oder allgemeiner ein archimedischer Körper K, d.h. es gilt der Satz von Archimedes in K) und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die keine Nullfolge ist, so existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n| \geq \delta$$

für alle $n \geq N$.
Nehmen wir nämlich an, dass solche δ und N nicht existieren, dann existiert für alle $\delta > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $|y_n| < \delta$.
Zu $\delta = 1$ und $N = 1$ existiert also ein $n_1 \geq 1$ mit $|y_{n_1}| < 1$.
Ist n_k gewählt, so existiert zu $\delta = \frac{1}{k+1}$ und $N := n_k + 1$ ein $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} \geq N > n_k$, so dass

$$|y_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert nach dem Satz von Archimedes ein $K \in \mathbb{N}$ mit $K \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt

$$|y_{n_k}| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} \leq \varepsilon,\ k \geq K.$$

Also konvergiert $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0, und mit 1.2.51 iv) konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, Widerspruch. Also existieren solche δ und N.
Wir erhalten zusammen mit 1.2.55 ii):
Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so ist

$$\left(\frac{x_n}{\tilde{y}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge, wenn man

$$\tilde{y}_n := \begin{cases} 1 & : \ y_n = 0 \\ y_n & : \ y_n \neq 0, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, setzt.

Satz 1.2.57 *Es sei K ein geordneter Körper, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen x_0, und die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen y_0. Dann gilt*

i) $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ *und* $x_n y_n \to x_0 y_0$, *insbesondere* $a x_n \to a x_0$ *für alle* $a \in K$.

ii) Ist $y_0 \neq 0$ *und* $\tilde{y}_n := \begin{cases} 1 & : \ y_n = 0 \\ y_n & : \ y_n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$ *, dann folgt* $\dfrac{x_n}{\tilde{y}_n} \to \dfrac{x_0}{y_0}$.

Beweis.

i) folgt wie 1.2.55 i).

ii) Zu $\delta := \frac{|y_0|}{2} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y_0| < \delta = \frac{|y_0|}{2}, \quad n \geq N$. Es folgt $\big||y_n| - |y_0|\big| \leq |y_n - y_0| < \dfrac{|y_0|}{2}, \ n \geq \mathbb{N}$, was $|y_n| - |y_0| \geq -\frac{|y_0|}{2}$, also $|y_n| \geq \frac{|y_0|}{2} = \delta, \ n \geq N$, impliziert. Die Behauptung folgt nun wie in 1.2.55 ii).

□

Satz 1.2.58 *Es sei* K *ein geordneter Körper,* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Nullfolge und* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* K*. Dann ist* $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis. Da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $|y_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{C} (> 0)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \varepsilon', \ n \geq N.$$

Es folgt dann

$$|x_n y_n| \leq |x_n| C \leq \varepsilon' C = \varepsilon.$$

für alle $n \geq N$. □

Beispiel 1.2.59 Es sei $K = \mathbb{Q}$.

i) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$, so gilt mit 1.2.57 und 1.2.50 ii):

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{q}{n^k} &= \lim_{n \to \infty} q \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \lim_{n \to \infty} q \cdot \prod_{j=1}^{k} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = q \cdot \prod_{j=1}^{k} 0 = 0. \end{aligned}$$

ii) Mit 1.2.57 und i) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+2n^2+1}{5n^4+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{5+\frac{3}{n^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}} = \frac{3+0+0}{5+0} = \frac{3}{5}.$$

iii) Es sei $q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$: Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq |q|$.

Es sei $x_n = \frac{q}{n}$, $\quad y_n = \begin{cases} 1 & : n = 1 \\ \prod\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{q}{j} & : n \geq 2 \end{cases}$.

Dann gilt $\frac{q^n}{n!} = x_n y_n$, $n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, und für $n \geq k+2$ gilt mit

$$|y_n| = \underbrace{\prod_{j=1}^{k} \frac{|q|}{j}}_{\leq k^k} \cdot \underbrace{\prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{|q|}{j}}_{<1} \leq k^k,$$

also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach 1.2.58 gilt $\frac{q^n}{n!} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Definition/Bemerkung 1.2.60 Es sei K ein geordneter Körper.

i) Auf der Menge

$$ch(K) := \{x : \mathbb{N} \to K : x \,\text{ist Cauchyfolge}\}$$

und auf der Menge

$$c(K) := \{x : \mathbb{N} \to K : x \,\text{ist konvergent}\}$$

können wir mit Hilfe von 1.2.55 und 1.2.57 eine Addition und eine Multiplikation folgendermaßen definieren:
Sind $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen (bzw. konvergente Folgen), so sei ihre Summe

$$x + y := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und ihr Produkt

$$x \cdot y := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Summe und Produkt erfüllen alle Körperaxiome bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen. Das Nullelement ist $0_{\mathbb{N}} = (0, 0, \ldots)$, das Einselement ist $1_{\mathbb{N}} = (1, 1, \ldots)$ und das additive Inverse zu $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $-x = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir weisen exemplarisch das Distributivgesetz nach:
Es seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen (konvergente Folgen). Dann gilt

$$\begin{aligned} x(y+z) &= (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \big((y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \\ &= (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_n(y_n + z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (x_n y_n + x_n z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_n z_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

ii) Allgemeiner kann man (für eine beliebige nichtleere Menge J) auf K^J die Addition und Multiplikation definieren:

$$(f+g)(j) := f(j) + g(j), \quad j \in J$$
$$(f \cdot g)(j) := f(j) \cdot g(j), \quad j \in J,$$

wenn $f, g \in K^J$. Auch hier sind alle Körperaxiomem bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen erfüllt.

Wir erklären folgende Relation auf der Menge $ch(\mathbb{Q})$ aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$:

$$x \sim y, \text{ falls } x - y \text{ eine Nullfolge ist.}$$

$\big($ D.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x_n - y_n \to 0 \ (n \to \infty)$.$\big)$

Satz 1.2.61 *„ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Es seien $x, y, z \in ch(\mathbb{Q})$.

1. Da $x - x = 0_{\mathbb{N}} \to 0\,(n \to \infty)$, ist $x \sim x$.

2. Ist $x \sim y$, dann ist $x - y$ eine Nullfolge, also mit 1.2.57 ist auch $y - x = -(x - y)$ eine Nullfolge.

3. Ist $x \sim y$ und ist $y \sim z$, dann sind $x - y$ und $y - z$ Nullfolgen, also ist nach 1.2.57 auch
$$x - z = (x - y) + (y - z) \text{ eine Nullfolge.}$$
□

Definition 1.2.62 Die Menge
$$\mathbb{R} := \{[x]_\sim : x \in ch(\mathbb{Q})\}$$
heißt Menge der reellen Zahlen.

Analog zur Konstruktion der rationalen Zahlen bestehen die reellen Zahlen aus Äquivalenzklassen. Grob gesagt: Eine Äquivalenzklasse besteht aus denjenigen Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, die dasselbe „Grenzverhalten“ zeigen.
Man kann auf $\mathbb{R}$ eine Addition $+$, eine Multiplikation $\cdot$ und eine Ordnung $<$ definieren, **so dass** $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ **ein geordneter Körper ist** und folgender Satz gilt:

Satz 1.2.63 α) *Die injektive Abbildung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto [q_\mathbb{N}]_\sim$, respektiert die Addition, die Multiplikation und die Ordnung, und es gilt zusätzlich: Für alle $z, w \in \mathbb{R}$ mit $z < w$ existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $z < j(x) < w$.*

β) *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

γ) *In $\mathbb{R}$ gilt der Satz des Archimedes.*

Via j identifizieren wir $\mathbb{Q}$ dann mit $j(\mathbb{Q})$ und betrachten $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$. γ) ist übrigens eine einfache Folgerung aus α) und dem Satz von Archimedes für $\mathbb{Q}$.
Der Beweis obigen Satzes ist langwierig und steht hier als Bonusmaterial unter den Nummern 1.2.64 bis 1.2.76 zur Verfügung.

Wir wollen eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{R}$ definieren. Dazu benötigen wir

Lemma 1.2.64 *Es seien $x, w, y, z \in ch(\mathbb{Q})$, und es gelte $x \sim w$ sowie $y \sim z$. Dann gilt auch $x + y \sim w + z$ und $xy \sim wz$.*

Beweis. Nach Voraussetzung sind $x-w$ und $y-z$ Nullfolgen. Dann ist nach 1.2.57 auch $(x+y)-(w+z)=(x-w)+(y-z)$ eine Nullfolge, also gilt $x+y\sim w+z$.
Da x eine Cauchyfolge, also beschränkt ist, und $y-z$ eine Nullfolge ist, garantiert Satz 1.2.58, dass auch $x(y-z)$ eine Nullfolge ist. Analog: $z(x-w)$ ist Nullfolge. Damit gilt nach 1.2.57, dass auch $xy-wz=x(y-z)+z(x-w)$ eine Nullfolge ist. Also ist $xy\sim wz$. □

Jetzt sind die Voraussetzungen für die Definition der Addition und auch der Multiplikation geschaffen.

Satz 1.2.65 *Versehen mit der Addition*

$$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \big([x],[y]\big)\mapsto[x]+[y]:=[x+y],$$

und der Multiplikation

$$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \big([x],[y]\big)\mapsto[x]\cdot[y]:=[xy]\,,$$

ist $\mathbb{R}$ *ein Körper. Das Nullelement ist* $[0_{\mathbb{N}}]$*, das Einselement ist* $[1_{\mathbb{N}}]$*.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.2.60 erfüllt $ch(\mathbb{Q})$ alle Körperaxiome, bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen. All diese Axiome übertragen sich automatisch auf $\mathbb{R}$. Exemplarisch rechnen wir dies nun im Fall des Distributivgesetzes nach:
Es seien $x,y,z\in ch(\mathbb{Q})$. Dann gilt $x(y+z)=xy+xz$, und es folgt

$$\begin{aligned}[x]\big([y]+[z]\big) &= [x]\big([y+z]\big)=\big[x(y+z)\big]=[xy+xz]\\ &= [xy]+[xz]=[x][y]+[x][z]\,.\end{aligned}$$

Ist $x\in ch(\mathbb{Q})$, so ist wegen $[x]+[-x]=[x-x]=[0_{\mathbb{N}}]$ das additive Inverse $-[x]$ von $[x]$ gerade $[-x]$.
Es bleibt die Existenz des multiplikativen Inversen zu zeigen.

Es sei $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in ch(\mathbb{Q})$ mit $[x]\neq[0_{\mathbb{N}}]$. Dann ist x keine Nullfolge. Setzt man

$$\tilde{x}_n:=\begin{cases}\dfrac{1}{x_n} & :\ x_n\neq 0\\ 1 & :\ x_n=0,\ n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{x}_n = \frac{1}{x_n}, n \geq N$, und mit Bemerkung 1.2.56 ist $\tilde{x} := (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Aus $x_n\tilde{x}_n - 1 = 0, n \geq N$, folgt $x_n\tilde{x}_n - 1 \to 0$ $(n \to \infty)$, also $x\tilde{x} \sim 1_{\mathbb{N}}$, was aber gerade $[x][\tilde{x}] = [x\tilde{x}] = [1_{\mathbb{N}}]$ bedeutet. Wir erhalten $[\tilde{x}] = [x]^{-1}$. $\square$

Wir wollen nun eine Ordnung auf $\mathbb{R}$ definieren.

Definition 1.2.66 Es seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Dann setzt man

$$[x] < [y],$$

falls ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ existieren mit

$$x_n < y_n - \delta$$

für alle $n \geq N$.

Satz 1.2.67 *„$<$“ ist eine Ordnung auf* $\mathbb{R}$*.*

Beweis.

(01) Wir müssen zeigen: Ist $[x] \neq [y]$, dann ist entweder $[x] < [y]$ oder $[y] < [x]$.
Es sei also $z := x - y$ keine Nullfolge. Da z eine Cauchyfolge ist, existieren nach 1.2.56 ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ mit

$$|z_n| > 2\delta,\ n \geq N\,,$$

und weiter können wir verlangen, dass

$$|z_n - z_m| < \delta,\ m, n \geq N,$$

gilt. Insbesondere ist entweder $z_N < -2\delta$ oder $z_N > 2\delta$.

<u>1. Fall:</u> $z_N < -2\delta$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$x_n - y_n = z_n = z_n - z_N + z_N \leq |z_n - z_N| + z_N < \delta - 2\delta = -\delta.$$

<u>2. Fall:</u> $z_N > 2\delta$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$y_n - x_n = -z_n = z_N - z_n - z_N \leq |z_N - z_n| - z_N < \delta - 2\delta = -\delta.$$

Somit gilt entweder $x_n - y_n < -\delta, n \geq N$, oder $y_n - x_n < -\delta, n \geq N$, also entweder $[x] < [y]$ oder $[y] < [x]$.

(02) Es sei $[x] < [y]$ und $[y] < [z]$.
Dann existiert ein $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n < y_n - \delta \quad \text{und} \quad y_n < z_n - \delta, \; n \geq N.$$

Es folgt

$$x_n < z_n - 2\delta, \; n \geq N,$$

und damit $[x] < [z]$.

(03) Es sei $[x] < [y]$ und $[z]$ beliebig.
Dann existiert ein $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n < y_n - \delta, \; n \geq N.$$

Es folgt

$$x_n + z_n < (y_n + z_n) - \delta, \; n \geq N,$$

also auch $[x + z] < [y + z]$ und damit $[x] + [z] < [y] + [z]$.

(04) Es sei $[x] < [y]$ und $[0_{\mathbb{N}}] < [z]$.
Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$x_n < y_n - \delta \quad \text{und} \quad z_n > \delta, \; n \geq N.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x_n z_n &< (y_n - \delta) z_n = y_n z_n - \delta z_n \\ &\leq y_n z_n - \delta^2, \; n \geq N, \end{aligned}$$

und damit gilt $[xz] < [yz]$, also $[x][z] < [y][z]$. □

Alle Sätze, die wir für geordnete Körper K gezeigt haben, gelten nun natürlich auch für $K = \mathbb{R}$!

Satz 1.2.68 *Es sei* $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \; r \mapsto [r_{\mathbb{N}}] = \big[(r, r, r, \ldots)\big]$.
($j(r)$ ist dann gerade die Menge aller Folgen in $\mathbb{Q}$, die gegen r konvergieren.)
Dann ist j injektiv, und es gilt

α) $j(r + s) = j(r) + j(s)$,

β) $j(r \cdot s) = j(r) \cdot j(s)$,

γ) $j(r) < j(s)$ *genau dann, wenn* $r < s$.

für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.
Weiter existiert zu $[x], [y] \in \mathbb{R}$ *mit* $[x] < [y]$ *ein* $r \in \mathbb{Q}$*, so dass*

$$[x] < j(r) < [y].$$

Beweis. Es seien $r, s \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \alpha) \quad j(r+s) &= \big[(r+s)_{\mathbb{N}}\big] = [r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}] \\ &= [r_{\mathbb{N}}] + [s_{\mathbb{N}}] = j(r) + j(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad j(r \cdot s) &= \big[(r \cdot s)_{\mathbb{N}}\big] = [r_{\mathbb{N}} \cdot s_{\mathbb{N}}] \\ &= [r_{\mathbb{N}}][s_{\mathbb{N}}] = j(r) \cdot j(s). \end{aligned}$$

γ) Ist $j(r) < j(s)$, also $[r_{\mathbb{N}}] < [s_{\mathbb{N}}]$, so existieren $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$r = r_{\mathbb{N}}(n) < s_{\mathbb{N}}(n) - \delta = s - \delta, \ n \geq N,$$

also gilt $r < s$.
Ist umgekehrt $r < s$, so existiert $\delta > 0$ mit $r < s - \delta$, und damit folgt sogar für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$r_{\mathbb{N}}(n) = r < s - \delta = s_{\mathbb{N}}(n) - \delta,$$

insbesondere also $j(r) = [r_{\mathbb{N}}] < [s_{\mathbb{N}}] = j(s)$.

j ist injektiv:
Es sei $j(r) = j(s)$, d.h. $j(r) - j(s) = [0_{\mathbb{N}}]$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} \big[(r-s)_{\mathbb{N}}\big) &= [r_{\mathbb{N}} - s_{\mathbb{N}}] = [r_{\mathbb{N}}] + \big[(-s)_{\mathbb{N}}\big] = \\ &= [r_{\mathbb{N}}] - [s_{\mathbb{N}}] = j(r) - j(s) = [0_{\mathbb{N}}]. \end{aligned}$$

Also ist die konstante Folge $(r-s, r-s, r-s, \ldots) = (r-s)_{\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, was aber $r = s$ impliziert.

Es sei $[x] < [y]$. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$x_n < y_n - 2\delta \quad (\text{d.h. } \frac{1}{2}(x_n - y_n) < -\delta)$$

für alle $n \geq N$. Zusätzlich können wir verlangen (da x und y Cauchyfolgen sind), dass

$$|x_n - x_m| < \frac{\delta}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \frac{\delta}{2}$$

für alle $n, m \geq N$ gilt.
Wir setzen $r := \frac{1}{2}(x_N + y_N)$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}(x_N + y_N) + \frac{1}{2}(y_n - y_N) + \frac{1}{2}(x_n - x_N) + \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ &\leq r + \frac{1}{2}|y_n - y_N| + \frac{1}{2}|x_n - x_N| + \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ &< r + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} - \delta = r - \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $[x] < [r_{\mathbb{N}}] = j(r)$.
Analog zeigt man $j(r) < [y]$. $\square$

Bemerkung 1.2.69 Offensichtlich gilt auch $j(0) = [0_{\mathbb{R}}]$ und $j(1) = [1_{\mathbb{R}}]$, j erhält also das Nullelement und das Einselement. Weiter gilt $-j(r) = j(-r)$ und $j(s)^{-1} = j(s^{-1}), s \neq 0$.

Wir haben auf jedem geordneten Körper den Betrag mit Hilfe der Ordnung definiert, im Falle $\mathbb{R}$ ist also

$$|[x]| = \begin{cases} [x] & : \ [x] \geq [0_{\mathbb{N}}] \\ [-x] & : \ [x] < [0_{\mathbb{N}}]. \end{cases}$$

$|[x]|$ ist natürlich auch eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen.

Korollar 1.2.70 *Es gilt $|j(r)| = j(|r|)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Mit 1.2.68 gilt:
Ist $r \geq 0$, dann ist $j(r) \geq 0$, also $|j(r)| = j(r) = j(|r|)$.
Ist $r < 0$, dann ist $j(r) < 0$, also $|j(r)| = -j(r) = j(-r) = j(|r|)$. $\square$

Korollar 1.2.71 *Ist $[x] \in \mathbb{R}$ und $[\varepsilon] \in \mathbb{R}$ mit $[\varepsilon] > 0$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit*

$$|[x] - j(r)| < [\varepsilon].$$

(Man sagt: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.)

Beweis. Wähle $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$[x] - [\varepsilon] < j(r) < [x] + [\varepsilon]. \qquad \square$$

Korollar 1.2.72 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.*
Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, so konvergiert $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $j(x_0)$.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und $[\varepsilon] > 0$. Wähle nach Satz 1.2.68 ein $\varepsilon' > 0, \varepsilon' \in \mathbb{Q}$ mit $j(\varepsilon') < [\varepsilon]$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon',\ n, m \geq N.$$

Hieraus folgt mit 1.2.68 und 1.2.70:

$$|j(x_n) - j(x_m)| = |(x_n - x_m)| = j(|x_n - x_m|) < j(\varepsilon') < [\varepsilon]$$

für alle $n, m \geq N$.

Es sei nun $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, und es sei $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, beliebig. Dann ist $j(\varepsilon) > 0$ und daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$j(|x_n - x_m|) = |j(x_n) - j(x_m)| < j(\varepsilon),\ n, m \geq N.$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ n, m \geq N. \qquad \square$$

Korollar 1.2.73 *Für alle $[\varepsilon], [x] \in \mathbb{R}$ mit $0 < [\varepsilon] < [x]$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n[\varepsilon] > [x]$.*
(Man sagt: $\mathbb{R}$ ist ein Archimedischer Körper oder: in $\mathbb{R}$ gilt der Satz von Archimedes.)

Beweis. Wähle nach Satz 1.2.68 ein $0 < y \in \mathbb{Q}$ mit $j(y) < [\varepsilon][x]^{-1}$. Nach Satz 1.2.34 (Satz von Archimedes für $\mathbb{Q}$) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y}$.
Es folgt $n \cdot [\varepsilon] = j(n)[\varepsilon] > j\big(\frac{1}{y}\big) \cdot [\varepsilon] > [x][\varepsilon]^{-1}[\varepsilon] = [x]$. $\square$

Lemma 1.2.74 *Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.*

i) Dann konvergiert $\big(j(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ $\big(= \big([(r_n)_{\mathbb{N}}]\big)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ gegen $\big[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]$.

ii) Insbesondere konvergiert $\big(j(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei zunächst $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ beliebig.

1. Aus der Definition der Ordnung auf $\mathbb{R}$ und des Betrages folgt

$$\big|[x]\big| = \big|\big[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big| = \big[\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}\big].$$

2. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$|x_m| < \varepsilon - \delta, m \geq N,$$

so gilt mit 1. und der Definition der Ordnung auf $\mathbb{R}$:

$$\big|[x]\big| = \big[\big(|x_m|\big)_{m\in\mathbb{N}}\big] < [\varepsilon_{\mathbb{N}}].$$

3. Mit Satz 1.2.68 genügt es zu zeigen:
Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|\big[(r_n)_{\mathbb{N}}\big] - \big[(r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\big| < [\varepsilon_{\mathbb{N}}]$$

für alle $n \geq N$.
Wähle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ $(\varepsilon' \in \mathbb{Q})$ und setze $\delta := \varepsilon - \varepsilon' > 0$. Da $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|r_n - r_m| < \varepsilon' = \varepsilon - \delta, \ n, m \geq N.$$

Es sei nun $n \geq N$ beliebig.
Wendet man 2. auf $[x] = \big[(r_n)_{\mathbb{N}} - (r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]$ (also $x_m = r_n - r_m$) an, so folgt

$$\begin{aligned}\big|\big[(r_n)_{\mathbb{N}}\big] - \big[(r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\big| &= \big|\big[(r_n - r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\big| \\ &= \big[\big(|r_n - r_m|\big)_{m\in\mathbb{N}}\big] < [\varepsilon_{\mathbb{N}}].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.75 Wir haben bisher gezeigt, dass alle Regeln, die in $\mathbb{Q}$ gelten, nach Anwendung von j erhalten bleiben. Die Injektivität von j ermöglicht es daher, von jetzt an $\mathbb{Q}$ mit $j(\mathbb{Q})$ zu identifizieren. Weiter brauchen wir bei Folgen aus $\mathbb{Q}$ wegen 1.2.72 nicht mehr unterscheiden, ob sie $\mathbb{Q}$-Cauchyfolgen oder $\mathbb{R}$-Cauchyfolgen sind. Analoges gilt für konvergente Folgen.
Ab jetzt werden wir die Elemente von $\mathbb{R}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Beispielsweise liest sich dann Korollar 1.2.71 folgendermaßen:
Ist $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x - r| < \varepsilon.$$

Lemma 1.2.74 ii) lautet dann:
Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge rationaler Zahlen, so existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $r_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.
Weiter werden wir ab jetzt kommentarlos verwenden, dass für $\mathbb{R}$ der Satz von Archimedes gilt.

Satz 1.2.76 *Jede Cauchyfolge konvergiert in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
Nach Korollar 1.2.71 existiert dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $|x_n - r_n| < \frac{1}{n}$.

1. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
   Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{3}{\varepsilon}$.
   Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, können wir gleichzeitig

   $$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \; n, m \geq N,$$

   verlangen (evtl. ist N zu vergrößern).
   Es seien nun $n, m \geq N$. Dann gilt

   $$\begin{aligned} |r_n - r_m| &\leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Mit 1. und Lemma 1.2.74 folgt: $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Wir zeigen nun: Auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x_0.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und

$$|r_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \; n \geq N.$$

Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - r_n| + |r_n - x_0| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Satz 1.2.77 *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis. Die Behauptung folgt aus 1.2.51 ii) und 1.2.63 β) (bzw. 1.2.76). □

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium erhalten wir

Satz 1.2.78 *(Hauptsatz über monotone Folgen)*
In $\mathbb{R}$ konvergiert jede monotone und beschränkte Folge.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Ohne Einschränkung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, andernfalls betrachte man $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anstelle von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir nehmen an, die Folge konvergiere nicht. Dann ist sie nach dem Cauchykriterium keine Cauchyfolge, und somit existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existieren $n, m \geq N$ mit

$$|x_n - x_m| \geq \delta.$$

Wir dürfen annehmen, dass $n > m$ gilt (ansonsten vertausche n und m).
Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, gilt

$$x_n - x_N \geq x_n - x_m = |x_n - x_m| \geq \delta,$$

also können wir $m = N$ verwenden und erhalten: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert $n > N$ mit

$$x_n - x_N \geq \delta.$$

Es sei $n_1 := 1$. Dann existiert zu $N := n_1$ ein $n_2 > N(= n_1)$ mit

$$x_{n_2} - x_{n_1} = x_{n_2} - x_N \geq \delta.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und n_k bestimmt. Dann existiert zu $N := n_k$ ein $n_{k+1} > N(= n_k)$ mit

$$x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_N \geq \delta.$$

Wir erhalten

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{\nu=1}^{k} x_{n_{\nu+1}} - x_{n_\nu} \geq x_{n_1} + k \cdot \delta$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Damit ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit war die Annahme falsch, also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

Satz 1.2.79 *Es sei $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Dann existiert (genau ein) $x > 0$ mit $x^2 = y$.*

Beweis. Wir verwenden das „babylonische Wurzelziehen“.
Es sei $x_0 > 0$ fest und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right), n \in \mathbb{N}_0$.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$, und

$$\begin{aligned}
2x_n(x_n - x_{n+1}) &= 2x_n^2 - 2x_n\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)\right) \\
&= x_n^2 - y \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right)\right]^2 - y \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und durch 0 nach unten bestimmt. Mit dem Hauptsatz über monotone Folgen konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$.
Aus $x_1 \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2}\frac{y}{x_n}$ folgt $x_n \geq \frac{y}{2x_1}, n \in \mathbb{N}$, und damit gilt $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \frac{y}{2x_1} > 0$.
Die Folge $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also konvergiert sie auch gegen x. Es folgt

$$\begin{aligned} x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Dies ist aber äquivalent zu $x^2 = y$.
Ist $z^2 = y = w^2$, so folgt $(z-w)(z+w) = 0$, also $z = w$ oder $z = -w$. □

Bemerkung/Bezeichnung 1.2.80 a) Da offensichtlich 0 die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$ ist, setzen wir

$$\sqrt{y}$$

als die einzige nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = y$ für $y \geq 0$. $\sqrt{y}$ ist also die eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = y$.

b) Ist $x_0 = y = 2$, so ist obige Folge eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, aber sie konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$ (ansonsten gäbe es ja ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$).

Satz 1.2.81 *Es sei $n \geq 2, n \in \mathbb{N}, y > 0$. Ist $x_0 > 0$ und*

$$x_{k+1} := \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{y}{x_k^{n-1}}\right),\ k \in \mathbb{N}_0,$$

dann konvergiert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^n = y$.

Beweis. Übungen. □

Bemerkung/Bezeichnung 1.2.82 Analog oben setzen wir für $y \geq 0$ als $\sqrt[n]{y}$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = y$.

Satz 1.2.83 *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer.*

i) Ist M nach oben beschränkt, so existiert das Supremum $\sup M$ *von M.*

ii) Ist M nach unten beschränkt, so existiert das Infimum $\inf M$ *von M.*

Beweis. Wir zeigen i), die Behauptung ii) folgt analog oder durch Anwendung von i) auf die Menge $\tilde{M} := \{-x : x \in M\}$. Da M nach oben beschränkt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein k$\in \mathbb{Z}$ mit $\frac{k}{n} \geq x, x \in M$ (d.h. $\frac{k}{n}$ ist obere Schranke für M).
Da $M \neq \emptyset$, existiert auch ein kleinstes $k =: k_n$ mit dieser Eigenschaft, d.h. $z_n := \frac{k_n}{n} \geq x, x \in M$, und es existiert $w_n \in M$ mit $z_n - \frac{1}{n} = \frac{k_n - 1}{n} < w_n$.
Setzen wir $x_n := \max\{w_1, \ldots, w_n\}, y_n := \min\{z_1, \ldots, z_n\}$, so gilt

α) $x_n \in M, y_n$ ist obere Schranke für M, also $x_n \leq y_n$.

β) Die Folge $(x_n)_n$ ist monoton wachsend, die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

γ) Mit α) und β) sind die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_n$ beschränkt.

Wegen β) und γ) konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein x_0 und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein y_0 nach dem Hauptsatz über monotone Folgen.
Aus $z_n - \frac{1}{n} < w_n \leq x_n \leq y_n \leq z_n$ folgt $|y_n - x_n| < \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ und damit $x_0 = y_0$.
Ist $x \in M$ beliebig, so gilt nach α), dass $y_n \geq x$, also gilt auch $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq x$, x_0 ist also eine obere Schranke für M.
Ist y eine weitere obere Schranke für M, so gilt $x_n \leq y, n \in \mathbb{N}$, (da $x_n \in M$) und damit $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq y$.
Somit ist x_0 das Supremum von M. □

Bemerkung/Bezeichnung 1.2.84 i) Wir setzen für $M \subset \mathbb{R}$:

$\sup M := +\infty$, falls M nicht nach oben beschränkt,
$\inf M := -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt,
$\sup \emptyset := -\infty$,
$\inf \emptyset := +\infty$,

und wir schreiben

$$\sup M < +\infty, \text{ falls } M \text{ nach oben beschränkt,}$$
$$\inf M > -\infty, \text{ falls } M \text{ nach unten beschränkt.}$$

ii) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so setzen wir

$$\sup\{f(x) : x \in X\} =: \sup_{x \in X} f(x) \text{ und}$$
$$\inf\{f(x) : x \in X\} =: \inf_{x \in X} f(x).$$

Definition 1.2.85 Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Wir setzen

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ und}$$

$$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$$
$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$
$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.$$

Obige Mengen heißen Intervalle, a bzw. b heißen linke bzw. rechte Intervallgrenze.

Beispiel 1.2.86 Es sei I ein Intervall. Dann ist $\sup I$ gleich der rechten und $\inf I$ gleich der linken Intervallgrenze, z. B. $\sup(0, 1] = 1$, $\inf(0, 1] = 0$. $(0, 1]$ besitzt das Maximum 1, also $1 = \max(0, 1]$, aber $(0, 1]$ besitzt kein Minimum.

Definition 1.2.87 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

i) bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder auch konvergent gegen $+\infty$), falls für alle $R \geq 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n > R$ für alle $n \geq N$.
Wir schreiben: $x_n \to +\infty (n \to \infty)$ oder $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$,

ii) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (oder auch konvergent gegen $-\infty$), falls für alle $R \leq -1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n < R$ für alle $n \geq N$.
Wir schreiben: $x_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ oder $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$.

Bemerkung 1.2.88 i) Der Ausdruck „konvergent gegen ∞“ ist mit Vorsicht zu gebrauchen: Konvergiert eine Folge gegen ∞, so ist sie insbesondere unbeschränkt, also keine Cauchyfolge und damit NICHT konvergent.

ii) Mit obigen Bezeichnungen gilt für jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

und für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Beispiel 1.2.89 i) Die Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren bestimmt gegen ∞, die Folgen $(-3n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren bestimmt gegen $-\infty$.

ii) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

α) $x^n \to +\infty$, falls $x > 1$,

β) $x^n \to 1$, falls $x = 1$,

γ) $x^n \to 0$, falls $|x| < 1$,

δ) $(x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert und ist weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$ bestimmt divergent, falls $x \leq -1$.

α) Es sei $R \geq 1$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{R}{x-1}$. Dann gilt mit der Bernoullischen Ungleichung für $n \geq N$:

$$x^n = \big(1 + (x-1)\big)^n \geq 1 + n(x-1) \geq N(x-1) > R.$$

Also folgt $x^n \to +\infty$.

β) schon in 1.2.50 iii) β) gezeigt.

γ) Es sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x| < q < 1$ (so ein q existiert mit 1.2.63, α)). Dann gilt $0 \leq |x|^n \leq q^n \to 0$ $(n \to \infty)$ nach 1.2.50 iii) α). Nach dem Einschließungskriterium ist $\big(|x^n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, siehe 1.2.49 iii).

δ) Für $x = -1$ ist in 1.2.50 iii) γ) gezeigt, dass $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Da $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, kann $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt divergieren.

Ist $x < -1$, so ist mit α) $(|x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$, also ist insbesondere $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und damit divergent.
Wegen $x^n \geq 1$ für alle geraden n und $x^n \leq -1$ für alle ungeraden n kann $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt divergieren.

Satz 1.2.90 *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$.*

i) Es gelte $x_n \to +\infty$.

α) Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt $x_n + y_n \to +\infty$.

β) Existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \geq \delta, n \geq N$, so gilt $x_n y_n \to +\infty$.

γ) Existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \leq -\delta, n \geq N$, so gilt $x_n y_n \to -\infty$.

δ) Ist $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt* $\tilde{x_n} \to 0$.

Analoges gilt für $x_n \to -\infty$.

ii) Es gelte $x_n \to 0$.

α) Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0, n \geq N$, und ist $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt $\tilde{x_n} \to +\infty$.*

β) Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0, n \geq N$, und ist $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt $\tilde{x_n} \to -\infty$.*

Beweis. Die Beweise von i) α), β), γ) sind leicht und ähnlich denen von 1.2.57.

Zu i) δ): Zunächst existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq 1, n \geq N_1$, also $\tilde{x}_n = \frac{1}{x_n}, n \geq N_1$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}, n \geq N.$$

Also gilt $|\tilde{x}_n| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon, n \geq N$.

Zu ii) α): Es sei $R \geq 1$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \frac{1}{R},\ n \geq N.$$

Es folgt für $n \geq N$:

$$\tilde{x_n} = |\tilde{x}_n| = \Big|\frac{1}{x_n}\Big| > R.$$

ii) β) analog zu ii) α. □

Betrachten wir eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist definitionsgemäß $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Menge. Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch die Menge $\{x_k : k \geq n\}$ beschränkt; sie besitzt also ein Supremum.
Wegen $\{x_k : k \geq n+1\} \subset \{x_k : k \geq n\}$ gilt dann

$$\sup\{x_k : k \geq n+1\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\},$$

und damit ist die Folge

$$\big(\sup\{x_k : k \geq n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

monoton fallend, und durch $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge nach dem Hauptsatz über monotone Folgen und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \inf\{\sup\{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$.
Analoge Bemerkungen gelten, wenn man „sup“ durch „inf“ ersetzt.

Definition 1.2.91 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Wir setzen

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ heißt limes superior, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ heißt limes inferior der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Mit unserer Konvention aus 1.2.84 kann man auch $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ auf $\liminf\limits_{n\to\infty} x_k := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$ schreiben.

Beispiel 1.2.92 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(1+\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
1 \quad &\leq \quad \sup\{x_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & : n \text{ gerade} \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{n+1} & : n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&\leq \quad 1 + \frac{1}{n} \quad \text{und} \\
-1 - \frac{1}{n} \quad &\leq \quad \begin{cases} -1 - \dfrac{1}{n} & : n \text{ ungerade} \\[2ex] -1 - \dfrac{1}{n+1} & : n \text{ gerade} \end{cases} = \inf\{x_k : k \geq n\} \\
&\leq \quad -1.
\end{aligned}$$

Somit folgt nach dem Einschließungskriterium

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Satz 1.2.93 *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Dann ist*

i) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$,

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to\infty} y_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} x_n + y_n$ *und*
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n + y_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$.
Konvergiert eine der beiden Folgen, so gilt jeweils Gleichheit.

Beweis. (siehe Übungen) □

Satz 1.2.94 *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt*

i) $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *ist die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl $\overline{x}$ mit*

α) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ x_n < \overline{x} + \varepsilon$,

β) $\forall_{\substack{\varepsilon>0 \\ N\in\mathbb{N}}}\exists_{n\geq N}\ x_n > \overline{x} - \varepsilon$.

(Für $\varepsilon > 0$ gilt $x_n < \overline{x} + \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele n und $x_n > \overline{x} - \varepsilon$ für unendlich viele n.)

Weiter existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *ist die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl $\underline{x}$ mit*

α) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ x_n > \underline{x} - \varepsilon,$

β) $\forall_{\substack{\varepsilon>0\\ N\in\mathbb{N}}}\exists_{n\geq N}\ x_n < \underline{x} + \varepsilon.$

(Für $\varepsilon > 0$ gilt $x_n > \underline{x} - \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele n und $x_n < \underline{x} + \varepsilon$ für unendlich viele n.)

Weiter existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.

Beweis. Wir zeigen i), ii) folgt analog oder durch Betrachtung von $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei

$$\overline{x}_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

und

$$x_0 := \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n.$$

α) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\overline{x}_n - x_0| < \varepsilon, n \geq N$.
Hieraus folgt $x_n \leq \overline{x}_n < x_0 + \varepsilon, n \geq N$.

β) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $\overline{x}_N \geq \overline{x}_{N+1}, N \in \mathbb{N}$, folgt $\overline{x}_N \geq \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = x_0, N \in \mathbb{N}$.
Ist also $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so existiert nach der Definition des Supremums ein $n \geq N$ mit

$$x_n > \overline{x}_N - \varepsilon \geq x_0 - \varepsilon.$$

Es sei nun eine Zahl $\overline{x}$ mit α) und β) gegeben. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus α) folgt

$$\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ \overline{x}_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \leq \overline{x} + \varepsilon.$$

Mit β) folgt $\overline{x} - \varepsilon \leq \overline{x}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt für $n \geq N : \overline{x} - \varepsilon \leq \overline{x}_n \leq \overline{x} + \varepsilon$, also $|\overline{x}_n - \overline{x}| < \varepsilon$. Also gilt

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Zur Konstruktion der Teilfolge.
Wir setzen $n_1 := 1$.
Ist $n_k \in \mathbb{N}$ konstruiert, so existiert ein $N > n_k$ und ein $n_{k+1} := n > N$ mit

$\alpha)$ $x_{n_{k+1}} < \overline{x} + \dfrac{1}{k}$ und

$\beta)$ $x_{n_{k+1}} > \overline{x} - \dfrac{1}{k}$,

also $|x_{n_k} - \overline{x}| < \frac{1}{k}$. Wegen $n_{k+1} > n_k,\ k \in \mathbb{N}$, ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es folgt $x_{n_k} \to \overline{x}$ $(k \to \infty)$. □

Korollar 1.2.95 *(Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$)*
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 1.2.96 i) Es sei $x_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$.
Dann gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \neq 1 = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, wie wir in 1.2.93 gezeigt haben. Weiter ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

ii) Ist $x_n := 3 + \frac{(-1)^n}{n}$, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = 3 = \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

wie man leicht nachrechnet, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

Dass Konvergenz an das Übereinstimmen von lim sup und lim inf gekoppelt ist, zeigt

Satz 1.2.97 *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Genau dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} \underline{x}_n &:= \inf\{x_k : k \geq n\} \text{ und} \\ \overline{x}_n &:= \sup\{x_k : k \geq n\} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\underline{x}_n \leq x_n \leq \overline{x}_n, n \in \mathbb{N}, \qquad ,$$

Gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, so folgt mit dem Einschließungskriterium

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Ist andererseits $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_k > \lim_{n\to\infty} x_n - \varepsilon, k \geq N,$$

also auch $\underline{x_k} \geq \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \varepsilon, k \geq N$.
Hieraus folgt $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x_n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Analog zeigt man $\limsup\limits_{m\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Wegen Mit 1.2.93 ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. □

In einem geordneten Körper K, also auch in $\mathbb{R}$, gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in K$. Damit hat in geordneten Körpern die Gleichung $x^2 = y$ keine Lösung x für $y < 0$. Dies werden wir nun mit einer Vergrößerung von $\mathbb{R}$ beheben, leider hat diese Vergrößerung keine Ordnung mehr.

Definition/Bemerkung 1.2.98 Es sei

$$\mathbb{C} := \big\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\big\} \quad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2),$$

versehen mit der Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v),$$

und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist (siehe Übung). Das Nullelement ist $(0,0)$, und das Einselement ist $(1,0)$. Das additive Inverse zu $z = (x,y)$ ist $-z = (-x,-y)$, das multiplikative Inverse zu $z = (x,y) \neq (0,0)$ (d.h. $x \neq 0$ oder $y \neq 0$) ist $\frac{1}{z} = z^{-1} = \big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\big)$. Ist $z = (x,y) \in \mathbb{C}$, so sei

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &:= \operatorname{Re}(z) := x \quad \text{und} \\ \operatorname{Im} z &:= \operatorname{Im}(z) := y. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2.99 Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist dann gerade die Vektoraddition.

Definition/Bemerkung 1.2.100 Betrachten wir die injektive Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (x, 0)$, so erfüllt J (wie man leicht nachrechnet)

$$\begin{aligned} J(x + y) &= J(x) + J(y) \quad \text{und} \\ J(x \cdot y) &= J(x) \cdot J(y), x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie bei der Einbettung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ identifizieren wir ab jetzt $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$ und schreiben $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Der Kürze halber schreiben wir auch

$$x \text{ anstelle von } (x, 0)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$. Mit der Definition

$$i := (0, 1)$$

wird dies zu

$$z = x + iy.$$

Wegen $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ ist dann $i^2 = -1$ und $\frac{1}{i} = -i$.
Ist also $z = x + iy$ und $w = u + iv$, so ist

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) + i(y + u) \quad \text{und} \\ z \cdot w &= xu + iyiv + xiv + iyu \\ &= xu + i^2yv + ixv + iyu \\ &= xu - yv + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Weiter ist $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$ (wobei dann $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$).

Beispiel 1.2.101 i) $(1 + i) + \big(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\big) = \frac{1}{2} + i\,\frac{3}{2}$,

ii) $(1 + i) \cdot \big(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\big) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i0 = -1$.

Konvention 1.2.102 *Ist $z \in \mathbb{C}$, so bedeutet $z \geq 0$, dass $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$.*

Definition 1.2.103 Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{z} := \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z$$

heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl.

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad (\geq 0)$$

heißt der Betrag von z.
Ist also $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, so ist $\overline{z} = x - iy$ und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Satz 1.2.104 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \ \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \ \overline{\overline{z}} = z,$

ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$

iii) $|z|^2 = z\overline{z}, \ |z| = |\overline{z}|, \ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *für* $z \neq 0$.

iv) $|zw| = |z||w|,$

v) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$

vi) $|z+w| \leq |z| + |w|$, *insbesondere* $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Beweis. i) und ii) sind trivial.
Es sei $z = x + iy, w = u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

iii) $z\overline{z} = (x+iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 + iyx - ixy$
$= x^2 + y^2 = |z|^2$
$|\overline{z}|^2 = x^2 + (-y)^2 = |z|^2$, also $|\overline{z}| = |z|$.
Ist $z \neq 0$, so folgt $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ aus $z\overline{z} = |z|^2$.

iv) Mit i) und iii) folgt

$$\begin{aligned} |zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) &= |z|^2|w|^2 \\ &= \big(|z||w|\big)^2, \end{aligned}$$

also $|zw| = |z||w|$.

v) ist trivial.

vi) Mit i), ii), iii), iv) und v) folgt

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + \underbrace{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}_{=2\operatorname{Re}(z\overline{w})} + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2, \end{aligned}$$

also $|z+w| \leq |z| + |w|$.

□

Bemerkung 1.2.105 Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ hat insbesondere folgende Eigenschaften:

i) $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$,

ii) $|z + w| \leq |z| + |w|,\ z, w \in \mathbb{C}$,

iii) $|z| = 0$ nur für $z = 0$.

Satz 1.2.106 *Ist $y \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung $z^2 = y$ genau zwei Lösungen, falls $y \neq 0$, und genau eine Lösung (nämlich $z = 0$), falls $y = 0$.*

Beweis. Der Fall $y = 0$ ist trivial; sei also zunächst $y > 0$. Dann hat $z^2 = y$ nach Satz 1.2.79 eine positive Lösung $\sqrt{y}$. Ist $y < 0$, dann ist $-y > 0$, und somit gilt $\left(\sqrt{-y}\right)^2 = -y$ und damit $\left(i\sqrt{-y}\right)^2 = y$.
Ist $y \neq 0$ und sind z_1, z_2 zwei Lösungen von $z^2 = y$, so gilt $z_1^2 = y = z_2^2$, also $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2 = 0$ und damit $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.
Also hat die Gleichung $z^2 = y$ für alle $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau zwei Lösungen. □

1.3 Normierte und metrische Räume

Wir hatten in Kapitel 1 das Produkt $X \times Y := \big\{(x, y) : x \in X, y \in Y\big\}$ zweier Mengen X und Y definiert.
Analog setzt man für Mengen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, das Produkt

$$\prod_{j=1}^{n} X_j := X_1 \times \ldots \times X_n := \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in X_j, 1 \leq j \leq n\big\}$$

als die Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, wobei x_j die Menge X_j durchläuft.
Es gilt $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn $x_j = y_j,\ 1 \leq j \leq n$. Die Schreibweise $X_1 \times \ldots \times X_n$ ist gerechtfertigt, denn die Abbildung $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z), \big((x, y), z\big) \mapsto \big(x, (y, z)\big)$ ist bijektiv und man verwendet $(x, y, z), \big((x, y), z\big)$ und $\big((x, y), z\big)$ je nach Bedarf. Wir schreiben

auch $(x_j)_{1\leq j\leq n} := (x_1,\ldots,x_n)$.
Ist $X_1 = \ldots = X_n = X$, so schreibt man

$$X^n := \prod_{j=1}^{n} X = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{-mal}} = \big\{(x_1,\ldots,x_n) : x_j \in X,\ 1 \leq j \leq n\big\}.$$

Bemerkung 1.3.1 Eine andere Möglichkeit, X^n zu definieren, ist:

$$X^n := X^{\{1,\ldots,n\}} = \big\{x : \{1,\ldots,n\} \to X : x \text{ ist Abbildung}\big\}.$$

Denn einem n-Tupel $(x_1,\ldots,x_n)$ entspricht die Abbildung

$$x : \{1,\ldots,n\} \to X \text{ mit } x(j) = x_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

Im folgenden sei immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Beispiel 1.3.2 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathbb{K}^n := \big\{(z_1,\ldots,z_n) : z_j \in \mathbb{K},\ 1 \leq j \leq n\big\},$$

mit der Addition

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ (z_1,\ldots,z_n) + (w_1,\ldots,w_n) := (z_1+w_1,\ldots,z_n+w_n),$$

und der Skalarmultiplikation:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \lambda \cdot (z_1,\ldots,z_n) := (\lambda z_1,\ldots,\lambda z_n),$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Im Falle $n = 1$ erhält man gerade $\mathbb{K}$ zurück.
Wir hatten ja $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet, analog betrachten wir $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$:
Ist $z = (x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) \in \mathbb{C}^n$, so ist

$$x := (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad y := (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

und wir schreiben

$$z = x + iy.$$

Es sei für $z = (z_1,\ldots,z_n), w = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{K}^n$

$$< z,w >:= \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu.$$

Dann ist $< \cdot,\cdot >: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ein sogenanntes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $E := \mathbb{K}^n$, d. h. es gilt

i) $< \lambda x + y, z >= \lambda < x, z > + < y, z >, \ \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E$,

ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}, \ x, y \in E$,

iii) $< x, x >\geq 0$ und $< x, x >= 0$ nur für $x = 0, \ x \in E$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist natürlich $\overline{< y, x >} =< y, x >$ und damit wird in diesem Fall ii) zu: $< x, y >=< y, x >, \ x, y \in E$.

Definition 1.3.3 Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ setzen wir

$$|z| := \|z\|_2 := \sqrt{< z, z >} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2}.$$

Satz 1.3.4 *Sind $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$, so gilt*

i) $\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu\right| = | < z, w > | \leq |z||w| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2}.$

(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

ii) $\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^2} = |z + w| \leq |z| + |w| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2}.$

(Minkowskische Ungleichung)

Beweis. Ohne Einschränkung sei $w \neq 0$.

i) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$0 \leq< z - \lambda w, z - \lambda w > = < z, z > - \lambda < w, z > - \overline{\lambda} < z, w > + \lambda \overline{\lambda} < w, w > .$$

Setzen wir $\lambda = \frac{<z,w>}{|w|^2}$ ein, so gilt

$$0 \leq |z|^2 - \frac{< z, w >< w, z >}{|w|^2} - \frac{\overline{< z, w >} < z, w >}{|w|^2} + \frac{< z, w > \overline{< z, w >}}{|w|^4} \cdot |w|^2$$

$$= |z|^2 - \frac{| < z, w > |^2}{|w|^2}.$$

Es folgt $| < z, w > |^2 \leq |z|^2 |w|^2$ und damit $| < z, w > | \leq |z||w|$.

ii) Wegen $< z, w > + < w, z > = < z, w > + \overline{< z, w >} = 2\text{Re} < z, w >$ gilt:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= < z+w, z+w > = < z, z > + < z, w > + < w, z > + < w, w > \\ &= |z|^2 + 2\text{Re} < z, w > + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2| < z, w > | + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2. \end{aligned}$$

Also folgt $|z+w| \leq |z| + |w|$.

□

Bemerkung 1.3.5 Der Betrag $| \cdot | : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ erfüllt neben der Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z| + |w|$ auch noch $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K}^n$, und $|z| = 0$ nur für $z = 0$.

Allgemeiner setzt man:

Definition 1.3.6 Eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ auf einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E (wobei wie immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) heißt Norm auf E, falls gilt

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \ \lambda \in \mathbb{K}, \ x \in E,$
(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ x, y \in E,$
(N3) $\|x\| = 0$ nur für $x = 0$.

$E := (E, \| \cdot \|)$ heißt dann normierter Raum.

Beispiel 1.3.7 i) $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$ oder allgemeiner $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, sind normierte Räume.

ii) Ist $< \cdot, \cdot >$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum E und setzt man $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$, so ist $\| \cdot \|$ eine Norm auf E.
Dies folgt leicht aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und dem Beweis von Satz 1.3.4.

iii) Ist für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|z\|_1 := \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu| \quad \text{und} \quad \|z\|_\infty := \sup\big\{|z_\nu| : 1 \le \nu \le n\big\} = \sup_{1\le\nu\le n} |z_\nu|,$$

so sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{K}^n$, und es gilt

$$\|z\|_\infty \le \|z\|_2 \le \|z\|_1 \le n\|z\|_\infty \text{ für alle } z \in \mathbb{K}^n,$$

siehe Übungen.

Bezeichnung 1.3.8 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x \in E$ und $r > 0$. Dann setzt man

$$\begin{aligned}
U_r(x) &:= \big\{y \in E : \|y - x\| < r\big\},\\
B_r(x) &:= \big\{y \in E : \|y - x\| \le r\big\},\\
U_E &:= \big\{y \in E : \|y\| < 1\big\} \text{ und}\\
B_E &:= \big\{y \in E : \|y\| \le 1\big\}.
\end{aligned}$$

$U_r(x)$ heißt die offene Kugel mit Radius r um x, $B_r(x)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r um x, U_E heißt die offene Einheitskugel und B_E die abgeschlossene Einheitskugel. Im Falle $E = \mathbb{C}$ verwendet man $\mathbb{D} := U_{\mathbb{C}} = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\big\}$. $\mathbb{D}$ heißt der Einheitskreis in der komplexen Ebene.

Beispiel/Bemerkung 1.3.9 .

i) Ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\big\},$$

ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2} < r\big\},$$

und ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| < r\big\}.$$

ii) Ist $0 < r < r'$, so gilt für $x \in E$

$$U_r(x) \subset B_r(x) \subset U_{r'}(x).$$

Definition 1.3.10 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt beschränkt, falls ein $C \geq 1$ existiert mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in M$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder beschränkt ist.

Beispiel/Bemerkung 1.3.11 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

i) Gemäß unserer Bezeichnung 1.2.84 ist $M \subset E$ beschränkt genau dann, wenn $\sup\big\{\|x\| : x \in M\big\} = \sup\limits_{x\in M} \|x\| < \infty$.

ii) Teilmengen beschränkter Mengen sind beschränkt.

iii) Alle Mengen vom Typ $U_r(x)$ und $B_r(x)$ sind beschränkt.
Denn sei $C := r + \|x\|$, so gilt für $y \in B_r(x)$:

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq C.$$

iv) Untervektorräume $V \neq \{0\}$ sind niemals beschränkt:
Es sei $x \in V\backslash\{0\}$. Dann gilt $\|x\| > 0$. Wegen $nx \in V,\ n \in \mathbb{N}$, und

$$\|nx\| = n\|x\| \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

ist $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ und damit V nicht beschränkt. Hier wurde natürlich benutzt, daß $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

v) Endliche Vereinigungen beschränkter Mengen sind beschränkt.

vi) Sind $A, B \subset E$ beschränkt und ist $x \in E$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x + y : x \in A, y \in B\}, \\ x + B &:= \{x + y : y \in B\} \quad \text{und} \\ \lambda A &:= \{\lambda x : x \in A\} \end{aligned}$$

wieder beschränkt.

vii) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt genau dann, wenn $\operatorname{Re} M := \{\operatorname{Re} z : z \in M\}$ und $\operatorname{Im} M := \{\operatorname{Im} z : z \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt sind. Dies folgt aus

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,\ z \in \mathbb{C}.$$

Beispiel/Definition 1.3.12 Es sei X eine nichtleere Menge, $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Abbildung $f : X \to E$ heißt beschränkt, falls $f(X) = \big\{f(x) : x \in X\big\}$ beschränkt in E ist.
Gemäß 1.3.11 ist dies genau dann der Fall, wenn $\sup\limits_{x\in X} \|f(x)\| < \infty$ gilt, also wenn $\big\{\|f(x)\| : x \in X\big\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

i) Ist $E = \mathbb{K}$, so setzt man

$$\begin{aligned}
\ell_\infty(X,\mathbb{K}) := B(X,\mathbb{K}) &:= \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist beschränkte Abbildung}\} \\
&= \{f : X \to \mathbb{K} : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\} \\
&= \{f : X \to \mathbb{K} : \text{ es gibt } C > 0 \text{ mit } |f(x)| \le C \\
&\qquad \text{für alle } x \in X\}
\end{aligned}$$

als die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$.
Dann ist $B(X,\mathbb{K})$ ein Untervektorraum des Vektorraumes

$$\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist Abbildung}\}.$$

Hierbei ist die Addition und Skalarmultiplikation folgendermaßen definiert: Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so setzt man die Abbildungen $f + g : X \to \mathbb{K}$ und $\lambda f : X \to \mathbb{K}$ durch

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \\
&(\lambda f)(x) := \lambda f(x)
\end{aligned}$$

für $x \in X$.
$B(X,\mathbb{K})$ ist tatsächlich ein Untervektorraum:
Sind nämlich $f, g \in B(X,\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so existieren C_f und C_g mit $|f(x)| \le C_f$ sowie $|g(x)| \le C_g$ für alle $x \in X$.
Es folgt $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le C_f + C_g$ und $|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \le |\lambda| C_f$ für alle $x \in X$. Somit gilt $f + g \in B(X,\mathbb{K})$ und $\lambda f \in B(X,\mathbb{K})$.
Wir setzen

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| \quad (< \infty).$$

Dann ist $\|\cdot\|_\infty : B(X,\mathbb{K}) \to [0,\infty)$ eine Norm auf $B(X,\mathbb{K})$:

N1: Es sei $f \in B(X,\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$.
Ist $\lambda = 0$, so gilt $\|\lambda f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |0\cdot f(x)| = 0\cdot \sup\limits_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$.
Sei also $\lambda \neq 0$. Wir setzen $s := \|\lambda f\|_\infty = \sup\big\{|\lambda f(x)\big| : x \in X\big\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \big|\lambda(f(x)\big| \leq s,\ x \in X, \\ \Longrightarrow\quad & \big|f(x)\big| \leq \frac{s}{|\lambda|},\ x \in X, \\ \Longrightarrow\quad & \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \leq \frac{s}{|\lambda|} \\ \Longrightarrow\quad & |\lambda|\,\|f\|_\infty \leq s = \|\lambda f\|_\infty. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\,\|f\|_\infty$.
Insgesamt gilt also $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\,\|f\|_\infty$.

N2: Es seien $f, g \in B(X,\mathbb{K})$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \big|(f+g)(x)\big| &= \big|f(x)+g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leq \\ &= \sup_{y\in X}\big|f(x)\big| + \sup_{y\in X}\big|g(x)\big| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

also folgt auch

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X}\big|(f+g)(x)\big| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

N3: Es sei $f \in B(X,\mathbb{K})$ mit $\|f\|_\infty = 0$, d.h. $\sup\limits_{x\in X}\big|f(x)\big| = 0$. Also ist $\big|f(x)\big| = 0$ und damit $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, f ist also die Nullabbildung.

ii) Ist allgemeiner $(E, \|\cdot\|_E)$ ein beliebiger normierter Raum, so setzt man

$$\ell_\infty(X,E) := B(X,E) := \{f : X \to E :\ f \text{ ist beschränkte Abbildung}\}$$

als die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach E. $B(X,E)$ ist dann wieder ein Untervektorraum von $E^X := \{f : X \to E : f \text{ ist Abbildung}\}$, wobei die Addition und die Skalarmultiplikation wie in i) definiert ist.
Weiter definiert

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E,$$

eine Norm auf $B(X,E)$.
All dies folgt, indem man in i) einfach $\mathbb{K}$ durch E und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_E$ ersetzt.

Konvention 1.3.13 *Im Folgenden versehen wir die Räume* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{K}^n$ *immer mit der Norm* $|\cdot|$ $(= \|\cdot\|_2)$ *und* $B(X,E)$ *mit* $\|\cdot\|_\infty$.

Bemerkung 1.3.14 Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Untervektorraum. Dann ist

$$\|\cdot\|_F : F \to [0,\infty),\ \|x\|_F := \|x\|_E,$$

natürlich eine Norm auf F, und $(F, \|\cdot\|_F)$ ist selbst ein normierter Raum.

Definition 1.3.15 Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, und es sei $E := \prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$. Dann setzen wir

$$\|\cdot\| : E \to [0,\infty) \quad \text{durch} \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in E.$$

Satz 1.3.16 $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf* E.

Beweis.

N1: Es sei $x \in \prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu,\ \lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|\lambda x_\nu\|_\nu^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} = |\lambda|\,\|x\|.$$

N2: Es seien $x, y \in E$. Dann gilt $\|x_\nu + y_\nu\|_\nu \le \|x_\nu\|_\nu + \|y_\nu\|_\nu$, also auch $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \|x_\nu + y_\nu\|_\nu^2 \le \sum\limits_{\nu=1}^{n} \big(\|x_\nu\|_\nu + \|y_\nu\|_\nu\big)^2$. Es folgt mit der Minkowskischen Ungleichung

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu + y_\nu\|_\nu^2} \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \big(\|x_\nu\|_\nu + \|y\|_\nu\big)^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|y_\nu\|_\nu^2} = \|x\| + \|y\|.$$

N3: Ist $\|x\| = 0$, so sind alle $\|x_\nu\| = 0$, also alle $x_\nu = 0,\ 1 \le \nu \le n$, und damit $x = 0$.

□

Bemerkung/Bezeichnung 1.3.17 i) Sind $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, so schreibt man $\prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu) := (E, \|\cdot\|)$.

ii) Wir erhalten für $(E_\nu, \|\cdot\|_\nu) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$:

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} = \prod_{\nu=1}^{n} \mathbb{K} \quad \text{und} \quad |x| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu} = \|x\|,$$

also $\prod_{\nu=1}^{n} \big(\mathbb{K}, |\cdot|\big) = \big(\mathbb{K}^n, |\cdot|\big)$.

Satz 1.3.18 *Es seien $\big(E_1, \|\cdot\|_1\big), \ldots, \big(E_n, \|\cdot\|_n\big)$ normierte Räume. Eine Teilmenge $M \subset \prod_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist beschränkt genau dann, wenn $\{x_j : (x_1, \ldots, x_n) \in M\} =: M_\nu$ in E_ν beschränkt ist für alle $1 \le \nu \le n$. Insbesondere ist $\prod_{\nu=1}^{n} L_\nu$ beschränkt für beschränkte $L_\nu \subset E_\nu,\ 1 \le \nu \le n$.*

Beweis. Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\sup_{1 \le \nu \le n} \|x_\nu\|_\nu \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} \le \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu,\ x = (x_1, \ldots, x_n).$$

□

Bei der Definition der Begriffe „Cauchyfolge“ und „konvergente Folge“ hatten wir nur den Abstand $d(x, y) = |x - y|$ zweier Zahlen benutzt. Diesen Begriff des Abstandes wollen wir nun verallgemeinern.

Definition 1.3.19 Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt Metrik (oder Abstand) auf X, falls gilt

(M1) $d(x, y) = d(y, x),\ x, y \in X$,

(M2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ x,y,z \in X,$

(M3) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y,\ \ x,y \in X.$

Ist d eine Metrik auf X, so heißt (X,d) metrischer Raum.

Beispiel 1.3.20 i) Es sei $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{K}$. Dann ist

$$d := d_{|\cdot|} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to [0,\infty),\ d(x,y) := |x-y|,$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}$:

M1: $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x),$

M2: $d(x,z) = |x-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z),$

M3: $d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y.$

ii) Exakt der gleiche Beweis wie in i) liefert, dass

$$d_{|\cdot|} := d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\infty), \quad d(z,w) := |z-w|,\ z,w \in \mathbb{K}^n,$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}^n$ ist. $d_{|\cdot|}$ heißt euklidischer Abstand.
Ersetzt man $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$, so folgt genau so, dass für jeden normierten Raum $(E,\|\cdot\|)$ die Abbildung

$$d_{\|\cdot\|} := d : E \times E \to [0,\infty),\ d(x,y) := \|x-y\|,\ x,y \in E,$$

eine Metrik auf E ist.

iii) Es sei X eine Menge und es sei $d : X \times X \to [0,\infty)$ definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & : \quad x \neq y \\ 0 & : \quad x = y. \end{cases}$$

Dann ist (X,d) ein metrischer Raum:
Offensichtlich gilt $d(x,y) = d(y,x)$. Sind $x,y,z \in X$ und $x = z$, so folgt $d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$. Ist $x \neq z$, so gilt $x \neq y$ oder $y \neq z$. Also folgt auch hier

$$d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Ist $d(x,y) = 0$, so ist $x = y$ nach Definition von d.
d heißt diskrete Metrik auf X.

iv) α) Es sei $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty),\ d(n, m) := |n - m|$. Dann ist d eine Metrik (sie ist ja die Einschränkung des euklidischen Abstandes).

β) Eine andere interessante Metrik auf $\mathbb{N}$ entsteht folgendermaßen:
Wir setzen $d(n, m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$.
Dann ist auch $(\mathbb{N}, d)$ ein metrischer Raum.
Fügen wir einen zusätzlichen Punkt ∞ zu $\mathbb{N}$ hinzu und setzen wir also $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist

$$d : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to [0, \infty),\ d(n, m) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right| & : \ m, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{m} & : \ n = \infty,\ m \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n} & : \ n \in \mathbb{N},\ m = \infty \\ 0 & : \ n = m = \infty \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{N}^+$.

Bezeichnung 1.3.21 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sei für $x \in X$ und $r > 0$

$$U_r(x) := \{y \in X : d(y, x) < r\}$$

und

$$B_r(x) := \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

Diese Bezeichnung ist konsistent mit 1.3.8.

Bemerkung 1.3.22 Man kann auch in metrischen Räumen den Begriff Beschränkheit von Mengen definieren, siehe Übungen.

Definition/Bemerkung 1.3.23 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung

$$d_M : M \times M \to [0, \infty),\ d_M(x, y) := d(x, y),$$

von d auf $M \times M$ eine Metrik auf M.

Definition 1.3.24 Es seien $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, und es sei $X := \prod_{\nu=1}^{n} X_\nu = \{(x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in X_\nu,\ 1 \le \nu \le n\}$. Dann setzen wir

$$d : X \times X \to [0, \infty),\ d(x, y) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2},$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$.

Satz 1.3.25 *d ist eine Metrik auf $X := \prod_{\nu=1}^{n} X_\nu$.*

Beweis. Es seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in X$.

$$\text{M1:}\quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(y_\nu, x_\nu)^2} = d(y, x).$$

$$\begin{aligned}\text{M2:}\quad d(x, z) &= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, z_\nu)^2} \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \big(d_\nu(x_\nu, y_\nu) + d_\nu(y_\nu, z_\nu)\big)^2} \\ &\le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(y_\nu, z_\nu)^2} \\ &= d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}$$

nach der Minkowskischen Ungleichung.
M3: Ist $d(x, y) = 0$, so sind alle $d_\nu(x_\nu, y_\nu) = 0$, also $x_\nu = y_\nu,\ 1 \le \nu \le n$, und damit ist $x = y$. □

Bemerkung 1.3.26 Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, und es sei $\prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu)$ ihr Produkt, d.h. die Norm $\|\cdot\|$ auf $\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist definiert durch

$$\big\|(x_1, \dots, x_n)\big\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2}\ .$$

Ist nun d_ν die von $\|\cdot\|_\nu$ auf E_ν induzierte Metrik, also

$$d_\nu(x_\nu, y_\nu) = \|x_\nu - y_\nu\|_\nu,\ 1 \leq \nu \leq n,$$

und ist d die von $\|\cdot\|$ auf $\prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$ induzierte Metrik, also

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

dann gilt

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu - y_\nu\|_\nu^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$.
Also ist

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu, d_{\|\cdot\|}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, d_{\|\cdot\|_\nu})\ .$$

Insbesondere gilt $(\mathbb{K}^n, d_{|\cdot|}) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$.
Es ist also gleich, ob man zuerst das Produkt der normierten Räume bildet und dann die Metrik erzeugt, oder ob man zuerst die Metriken aus den Normen erzeugt und dann das Produkt der metrischen Räume bildet.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen in normierten und metrischen Räumen

Definition 2.1.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt

i) Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ gilt,

ii) konvergent gegen $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt,

iii) konvergent, falls ein $x_0 \in X$ existiert, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert.

iv) divergent, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

Bemerkung/Bezeichnung 2.1.2 i) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, so schreiben wir

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,$$

$$x_n \longrightarrow x_0 \ (n \to \infty),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

oder kürzer

$$x_n \longrightarrow x_0,$$
$$\lim x_n = x_0.$$

x_0 heißt Limes oder Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Es gilt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $\big(d(x_n, x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, d.h. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$.

iii) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt mit $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x-y\|, x, y \in E$:
Eine Folge $(x_n)_n$ in E ist Cauchyfolge genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

gilt.
Analog: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen x_0 genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ eixstiert, so dass für alle $n \geq N$

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

gilt.

Satz 2.1.3 *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (konvergent gegen z_0) genau dann, wenn $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind ($\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$ gilt).*

Beweis. Es gelte $z_n = x_n + iy_n \to x_0 + iy_0 = z_0\,(n \to \infty)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| < \varepsilon,\ n \geq N$. Dann folgt

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2} = |z_n - z_0| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0.
Analog zeigt man: $y_n \to y_0$.
Es gelte nun $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$, wobei $z_n = x_n + iy_n$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \varepsilon'$ und $|y_n - y_0| < \varepsilon',\ n \geq N$.
Dann gilt

$$|z_n - z_0| = |x_n + iy_n - (x_0 + iy_0)|$$
$$|x_n - x_0 + i(y_n - y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.
Die Aussagen über Cauchyfolgen beweist man analog. □

Beispiel 2.1.4 i) Es sei $z_n = 1 + \frac{1}{n} + i\big(-1 - \frac{1}{n^2}\big)$. Dann gilt $\operatorname{Re} z_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ $(n \to \infty)$ und $\operatorname{Im} z_n = -1 - \frac{1}{n^2} \to -1$ $(n \to \infty)$. Es folgt also $z_n \to 1 - i$.

ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $z_n = z^n, n \in \mathbb{N}$.

α) Ist $|z| < 1$, so gilt $z^n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Es gilt ja

$$0 \leq d_{|\cdot|}(z^n, 0) = |z^n - 0| = |z|^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Also ist $d_{|\cdot|}(z^n, 0)$ eine Nullfolge und damit gilt $z^n \to 0$.

β) Ist $z = 1$, so gilt $z^n = 1^n = 1 \to 1$ $(n \to \infty)$.

Satz 2.1.5 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann gilt*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

iii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x_0.

iv) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist auch jede Teilfolge eine Cauchyfolge.

v) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar zum selben Grenzwert.

Beweis. Ersetze im Beweis von 1.2.51 $|x - y|$ durch $d(x, y)$ und beachte Bemerkung 1.2.52. □

Satz 2.1.6 *Jede Cauchyfolge in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist beschränkt.*

Beweis. Ersetze im Beweis von 1.2.53 $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$. $\square$

Definition 2.1.7 i) Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in (X,d) konvergiert.

ii) Ein normierter Raum $(E,\|\cdot\|)$ heißt vollständig (oder Banachraum) , falls $(E,d_{\|\cdot\|})$ (mit $(d_{\|\cdot\|}(x,y)=\|x-y\|)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
Ein normierter Raum ist also vollständig genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{m,n\geq N}{\forall}\quad \|x_n-x_m\|<\varepsilon,$$

ein $x_0\in E$ existiert, so dass

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{n\geq N}{\forall}\quad \|x_n-x_0\|<\varepsilon \text{ gilt.}$$

Satz 2.1.8 $(\mathbb{K},|\cdot|)$ *ist vollständig.*

Beweis.

1. Ist $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, so konvergiert jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ nach Satz 1.2.77.

2. Ist $K=\mathbb{C}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, so sind nach Satz 2.1.3 $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$, also nach Satz 1.2.77 (oder i)) existieren $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} z_n\to x_0$ und $\operatorname{Im} z_n\to y_0$.
   Mit Satz 2.1.3 folgt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z_0:=x_0+iy_0$ konvergiert. $\square$

Satz 2.1.9 *Es seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ mit $z_n\to z_0$ und $w_n\to w_0$. Dann gilt*

i) $z_n+w_n\to z_0+w_0$ und $z_nw_n\to z_0\cdot w_0$.

ii) Ist $w_0\neq 0$ und setzt man

$$\tilde{w}_n:=\begin{cases} w_n & : \ w_n\neq 0\\ 1 & : \ w_n=0,\end{cases}$$

so gilt $\frac{z_n}{\tilde{w}_n}\to\frac{z_0}{w_0}$.

Beweis. Wie in 1.2.55, 1.2.56, 1.2.57. □

Völlig analog zu 1.2.55 oder durch Verwendung von $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \to 0$ beweist man allgemeiner

Satz 2.1.10 *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in E sowie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.*

i) Gilt $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$, so folgt $x_n + y_n \to x_0 + y_0$.

ii) Gilt $x_n \to x_0$ und $\lambda_n \to \lambda_0$, so folgt $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$.

iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\lambda_n \to 0$, so gilt $\lambda_n x_n \to 0$.

iv) Gilt $x_n \to 0$ und ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt $\lambda_n x_n \to 0$.

v) Gilt $x_n \to x_0$, so gilt $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Bemerkung 2.1.11 Analoge Sätze für Cauchyfolgen führen wir nicht auf, da wir üblicherweise vollständige normierte Räume betrachten, wo ja jede Cauchyfolge eine konvergente Folge ist.

Satz 2.1.12 *Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ metrische Räume, und es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod\limits_{\nu=1}^{k} X_\nu$.*
Dann gilt

i) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\prod\limits_{\nu=1}^{k} (X_\nu, d_\nu)$ genau dann, wenn $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X_ν, d_ν) für alle $1 \le \nu \le k$ ist.

ii) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}) \in \prod\limits_{\nu=1}^{k} X_\nu$ genau dann, wenn $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_\nu^{(0)}$ für alle $1 \le \nu \le k$ konvergiert.

In Worten: Eine Folge ist Cauchy (konvergent) genau dann, wenn jede Komponentenfolge Cauchy (bzw. konvergent) ist.

Beweis. (vgl. 2.1.3) Wir beweisen i), ii) folgt analog.

1. Es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\prod\limits_{\nu=1}^{k}(X_\nu, d_\nu)$, und es sei $1 \leq \nu \leq k$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig.
   Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon,\ n, m \geq N$. Aus $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) \leq \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} d_j(x_j^{(n)}, x_j^{(m)})^2} = d(x^{(n)}, x^{(m)})$ folgt
   $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

2. Es sei $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in (X_ν, d_ν), $1 \leq \nu \leq k$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N_\nu \in \mathbb{N}$ mit $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{k},\ n, m \geq N_\nu, 1 \leq \nu \leq k$, und setze $N := \max\{N_1, \ldots, N_k\}$.
   Dann folgt für $n, m \geq N$:

$$d(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)})^2} \leq \sum_{\nu=1}^{k} d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

□

Beispiel 2.1.13 i) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

α) Ist $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$, so divergiert die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

β) Ist $z = 1$, so gilt $z^n = 1 \to 1$.

γ) Ist $|z| < 1$, so gilt $z^n \to 0$.

Beweis: α) Ist $|z| > 1$, so gilt $|z^n| = |z|^n \to \infty$, also ist die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also kann sie keine Cauchyfolge sein und ist damit nicht konvergent.
Ist $|z| = 1$ und $z \neq 1$, so gilt

$$|z^n - z^{n+1}| = |1 - z||z|^n = |1 - z| \quad (> 0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, damit ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und damit nicht konvergent.
Für β und γ siehe 2.1.4. □

ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Betrachte die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$.
Nach Satz 1.2.13 (geometrische Summenformel) gilt $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, n \in$

$\mathbb{N}_0$, wenn $z \neq 1$.
Dann divergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn $|z| \geq 1$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-z}$, wenn $|z| < 1$.

Beweis: Ist $z = 1$, so gilt $s_n = n + 1$, also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt. Ist $|z| < 1$, so gilt mit Satz 2.1.5 und i)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{\lim(1 - z^{n+1})}{1 - z} \\ &= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}. \end{aligned}$$

Es sei $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$. Wir nehmen an, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dann konvergiert auch

$$(z^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} = \big(1 - (1 - z)s_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Dies widerspricht aber i) α).
Also divergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

iii) Es sei $s^{(n)} = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{2^\nu}, \frac{1}{3^\nu}, \frac{1}{4^\nu}\right) \in \mathbb{R}^3$.
Nach Definition der Vektoraddition gilt

$$s^{(n)} = \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu}, \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{3^\nu}, \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^\nu}\right)$$

und damit nach Satz 2.1.12 und i): $s^{(n)} \to \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ $(n \to \infty)$.

Satz 2.1.14 *Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ vollständige metrische Räume. Dann ist auch ihr Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{m} (X_\nu, d_\nu)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Es sei $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}), n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchyfolge. Dann sind $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nach 2.1.12 i) Cauchyfolgen in $(X_\nu, d_\nu), 1 \leq \nu \leq m$. Da (X_ν, d_ν) vollständig ist, existieren $x_\nu^{(0)} \in X_\nu$ mit $x_\nu^{(n)} \to x_\nu^{(0)}$, $1 \leq \nu \leq m$. Es sei $x^{(0)} := (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$. Nach 2.1.12 ii) gilt $x^{(n)} \to x^{(0)}$ in $\prod\limits_{\nu=1}^{m} (X_\nu, d_\nu)$. □

Korollar 2.1.15 *i) Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ Banachräume. Dann ist auch ihr Produkt $E = \prod\limits_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu)$ ein vollständiger normierter Raum.*

ii) $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ vollständig (also ein Banachraum).

Beweis.

i) Die Norm auf $\prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist definiert durch $\|x\| = \|(x, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2}$ und daher $d_E(x, y) = \|x - y\|$. Da $(E_\nu, \|\cdot\|_\nu), 1 \leq \nu \leq n$, nach Voraussetzung vollständig ist, folgt die Behauptung mit 2.1.14.

ii) ist i) angewendet auf $E_\nu = \mathbb{K}$ versehen mit dem Betrag als Norm.

$\square$

Satz 2.1.16 *(Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{K}^m$)*
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^m$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ eine konvergente Teilfolge.)

Beweis.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir führen einen Induktionsbeweis über die Dimension m.

   α) Für $m = 1$ gilt die Aussage nach 1.2.95.

   β) $m \mapsto m + 1$. Es gelte die Aussage des Satzes für m, und es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{m+1}$.
   Wir schreiben wie üblich $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}),\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left((x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^m$, nach Induktionsannahme existiert also eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$ mit $(x_1^{(n_k)}, \dots, x_m^{(n_k)}) \to (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})\,(k \to \infty)$. Nun ist $(x_{m+1}^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, also existiert mit 1.2.95 eine streng monoton wachsende Folge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und ein $x_{m+1}^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit $x_{m+1}^{(n_{k_\ell})} \to x_{m+1}^{(0)}$ $(\ell \to \infty)$. Es folgt mit 2.1.12 $x^{(n_{k_\ell})} \to (x_1^{(0)}, \dots, x_{m+1}^{(0)})$.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mit Hilfe der Abbildung

$$j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m},\ x{+}iy := (x_1{+}iy_1, \ldots, x_m{+}iy_m) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$$

dürfen wird $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{R}^{2m}$ als metrische Räume identifizieren, denn es gilt ja $|x{+}iy| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_\nu^2 + y_\nu^2} = |j(x{+}iy)|$ und damit $d(x{+}iy, u{+}iv) = d(j(x+iy), j(u+iv))$.
Somit folgt die Behauptung für $\mathbb{C}^m$ aus 1., angewandt auf $\mathbb{R}^{2m}$. $\square$

2.2 Reihen

Wir haben schon öfter Folgen der Form $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$, betrachtet, wobei $(a_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ war.
Wir definieren hierzu für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$:

Definition 2.2.1 Es sei $(z_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

i) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu,\ n \in \mathbb{N}_0$, heißt die mit $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Reihe, und anstelle von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schreibt man $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$. s_n heißt n-te Partialsumme von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

ii) Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt konvergent zur Summe $s \in \mathbb{K}$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ gegen s konvergiert.
In diesem Fall schreibt man $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu = s$.

Bemerkung 2.2.2 i) Manchmal betrachten wir auch Reihen der Form $\sum\limits_{\nu=M}^{\infty} z_\nu$ mit $M \in \mathbb{Z}$ fest. Hier ist dann $s_n = \sum\limits_{\nu=M}^{n} z_\nu,\ n \geq M$, und falls $(s_n)_{n\geq M}$ gegen s konvergiert, so schreibt man $\sum\limits_{\nu=M}^{\infty} z_\nu = s$.

ii) Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, wobei $(z_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen ist, konvergiert definitionsgemäß gegen die Summe s genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\left|\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu - s\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

iii) Wir können auch ganz allgemein die Konvergenz von Reihen in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ betrachten:
Dazu sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in E. Um zur erweiterten Definition zu gelangen muss man in 2.2.1 nur $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ durch $(E, \|\cdot\|_E)$ ersetzen.

Beispiel 2.2.3 i) Nach den Übungen divergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$.

ii) Wieder nach den Übungen konvergieren die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^k}$ (für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, fest).

iii) Ist $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert nach 2.1.13 ii) die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ genau dann, wenn $|z| < 1$ gilt. In diesem Fall ist $\frac{1}{1-z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ (geometrische Reihe).

Satz 2.2.4 *Es seien* $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *und* $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ *konvergente Reihen, und es sei* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann konvergiert auch* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda z_\nu + w_\nu$, *und es gilt* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda z_\nu + w_\nu = \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$.

Beweis. Dies folgt aus 2.1.10, angewendet auf die Partialsummen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda z_\nu + w_\nu &= \lim_{n\to\infty} \lambda \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu + \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu .
\end{aligned}$$

□

Auch im obigen Satz dürfen die z_ν und w_ν Elemente eines beliebigen normierten Raumes sein.

Satz 2.2.5 *Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *eine Reihe komplexer Zahlen.*

i) Dann konvergieren $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_\nu$ *und* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_\nu$ *genau dann, wenn* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert, und es gilt dann* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_\nu = \operatorname{Re} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *und* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_\nu = \operatorname{Im} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

ii) Falls $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert, so konvergiert auch* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu}$, *und es gilt* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}$.

Beweis. Der Teil i) folgt durch Anwendung von 2.1.3 auf die Partialsummen.

ii): $\left| \sum\limits_{\nu=0}^{n} \overline{z_\nu} - \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu} \right| = \left| \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu} \right| = \left| \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \right| \to 0$, also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \overline{z_\nu} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}$. □

Satz 2.2.6 *Ist die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergent, so gilt* $z_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

Beweis. Es sei $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu,\ n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.2.7 Ist $z_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, so gilt zwar $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, aber die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ divergiert.

Satz 2.2.8 *(Klammerung von Reihen)*
Es sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen mit $n_0 = -1$, und es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big(\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu\Big)$, und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big(\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu\Big) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

Beweis. Es sei $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu$ und $\sigma_\ell = \sum\limits_{k=0}^{\ell}\Big(\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu\Big) = (z_0 + z_1 + \ldots + z_{n_1}) + \ldots + (z_{n_\ell+1} + \ldots + z_{n_{\ell+1}}) = \sum\limits_{\nu=0}^{n_{\ell+1}} z_\nu = s_{n_{\ell+1}}$. Damit ist $(\sigma_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und damit nach 2.1.5 iii) ebenfalls konvergent mit gleichem Grenzwert. □

Bemerkung 2.2.9 Es kann vorkommen, dass die Klammerung konvergiert, ohne dass die Reihe selbst konvergiert: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu$ divergiert, aber
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{\nu=2k}^{2k+1}(-1)^\nu}_{=0} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 0$ konvergiert (gegen 0).

Satz 2.2.10 *(Cauchykriterium)*
Es sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Genau dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\Big|\sum_{\nu=n}^{m} z_\nu\Big| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq N$ gilt.

Beweis. Es sei $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu$. Die angegebene Bedingung besagt gerade (beachte: $s_m - s_{n-1} = \sum\limits_{\nu=n}^{m} z_\nu$), dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Da $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ vollständig ist, konvergiert also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

Definition 2.2.11 Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ in $\mathbb{K}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|$ (in $\mathbb{R}$) konvergiert.

Satz 2.2.12 *Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine absolutkonvergente Reihe in $\mathbb{K}$, so konvergiert sie und es gilt $|\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|$.*

Beweis. Dies folgt aus $\big|\sum_{\nu=n}^{m} z_\nu\big| \leq \sum_{\nu=n}^{m} |z_\nu| = \big|\sum_{\nu=n}^{m} |z_\nu|\big|$ und dem Cauchykriterium sowie aus 2.1.10 v). □

Satz 2.2.13 *(Majorantenkriterium)*
Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Gibt es eine Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ nichtnegativer reeller Zahlen, ein $C \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

i) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und

ii) $|z_\nu| \leq C a_\nu$ für alle $\nu \geq N$,

dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ absolut.

Beweis. Dies folgt aus $\sum_{\nu=n}^{m} |z_\nu| \leq C \cdot \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \big|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu\big|$ und dem Cauchykriterium. □

Beispiel 2.2.14 Es sei $(\varrho_\nu)_{\nu=\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und $|z| < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu z^\nu$ absolut. In der Tat, sei $a_\nu := |z|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, und $C := \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\varrho_\nu|$ $(< \infty)$. Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, und es gilt $|\varrho_\nu z^\nu| \leq C a_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 2.2.15 Die Sätze 2.2.6, 2.2.8, 2.2.10, 2.2.12 und 2.2.13 wie auch Definition 2.2.11 lassen sich ohne Schwierigkeit auf Banachräume $(E, \|\cdot\|_E))$ übertragen: Man muß nur überall $\mathbb{K}$ durch E und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_E$ ersetzen. Zum Beispiel nimmt das Cauchykriterium dann folgende Form an: Es sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in einem Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$. Genau dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\Big\| \sum_{\nu=n}^{m} z_\nu \Big\|_E < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq N$ gilt.

Das Majorantenkriterium (wie auch die Definition der absoluten Konvergenz) regt dazu an, Reihen nichtnegativer reeller Zahlen zu betrachten. Zunächst wollen wir aber zeigen, dass nicht alle konvergenten Reihen auch absolut konvergieren.

Satz 2.2.16 *(Leibnizkriterium)*
Es sei $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x_\nu$.

Beweis. O. E. sei $x_\nu > 0, \nu \in \mathbb{N}_0$.
Wir setzen wie üblich $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu x_\nu$, und wir betrachten zunächst die Teilfolgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:
Aus $s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} = -x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq 0$ folgt, dass $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist. Analog zeigt man, dass $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wächst.
Wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -x_{2n+1} \leq 0$ impliziert dies, dass $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$ gilt. $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also nach unten beschränkt. Mit dem Hauptsatz über monotone Folgen existiert also $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Analog gilt, dass $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt ist, also ist auch $s' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existent. Wegen $s - s' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$ gilt $s = s'$.
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |s_{2n+1} - s| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gilt für alle $n \geq 2N + 1$:

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 2.2.17 Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber wegen $\left|\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu}$ und der Divergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ nicht absolut.

Kommen wir zu Kriterien für Reihen in $\mathbb{R}$ mit nichtnegativen Gliedern:

Satz 2.2.18 *Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ reeller Zahlen mit $x_\nu \geq 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$, ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist, d.h. wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu = \sup\left\{ \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu : n \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty$ gilt.*

Beweis. Dies folgt aus dem Hauptsatz über monotone Folgen. □

Satz 2.2.19 *(Cauchyscher Verdichtungssatz)*
Es sei $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ genau dann (absolut), wenn $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu x_{2^\nu}$ konvergiert.

Beweis. O. E. $x_\nu > 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$.
Es sei $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu$ und $\sigma_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} 2^\nu x_{2^\nu}$.
Wir zeigen: ist $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, so auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$; die Umkehrung wird in den Übungen gezeigt.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \quad &\leq \quad \sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1} x_\nu = x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} x_\nu \\ &\leq \quad x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} x_{2^\mu} \\ &\leq \quad x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} 2^\mu x_{2^\mu} = x_0 + \sigma_n \leq x_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu x_{2^\nu}. \end{aligned}$$

Damit ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt, und die Behauptung folgt mit 2.2.18. $\square$

Beispiel 2.2.20 Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \sqrt[k]{\nu}}$.

Beweis. Nach dem Cauchyschen Verdichtungssatz genügt es, die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \frac{1}{2^\nu \sqrt[k]{2^\nu}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2^\nu}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)^\nu$ nachzuweisen.
Wegen $\left|\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt[k]{2}} < 1$ konvergiert aber diese geometrische Reihe nach Beispiel 2.1.13 ii). $\square$

Das folgende Kriterium basiert auf dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe und den Majorantenkriterium.

Satz 2.2.21 *(Wurzelkriterium)*
Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$.

(i) Gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|} < 1$, *so konvergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *(absolut).*

(ii) Gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|} > 1$, *so divergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

Beweis. Es sei $x_\nu := |z_\nu|,\ \nu \in \mathbb{N}_0$, und es sei $\alpha := \limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu}$.

(i) Es sei $\alpha < 1$. Wähle $\alpha < x < 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{\nu\geq N} \sqrt[\nu]{x_\nu} < x$.
Hieraus folgt $0 \leq x_\nu < x^\nu,\ \nu \geq N$. Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ ergibt sich mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$.

(ii) Ist $\alpha > 1$, dann gibt es nach 1.2.94 eine Teilfolge $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{x_{\nu_k}} = \alpha$.
Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $\alpha-\varepsilon > 1$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[\nu_k]{x_{\nu_k}} > \alpha-\varepsilon$ für alle $k \geq K$, d.h. $x_{\nu_k} > (\alpha-\varepsilon)^{\nu_k} \geq (\alpha-\varepsilon)^k, k \geq K$.
Wegen $(\alpha-\varepsilon)^k \to \infty\ (k \to \infty)$ ist dann $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und somit auch $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Nach 2.2.6 kann $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ nicht konvergieren.

□

Beispiel/Bemerkung 2.2.22 (i) Auch das Wurzelkriterium (sowie das gleich folgende Quotientenkriterium) gilt in Banachräumen E: Ersetze $|z_\nu|$ durch $\|z_\nu\|_E$.

(ii) Um das Wurzelkriterium anzuwenden, benötigt man häufig

α) $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1$ $(\nu \to \infty)$, $\sqrt[\nu]{x} \to 1$ $(\nu \to \infty)$ für alle $x > 0$,

β) $\sqrt[\nu]{\nu^k} \to 1$ $(\nu \to \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

γ) $\sqrt[\nu]{\nu!} \to \infty$ $(\nu \to \infty)$,

δ) $\sqrt[\nu]{\frac{R^\nu}{\nu!}} \to 0$ $(\nu \to \infty)$ für alle $R \geq 0$.

zu α): 1. Es sei $\varepsilon > 0$. Sei $\varepsilon' > 0$ mit $(1+\varepsilon')^2 = 1+\varepsilon$. Die Bernoulliungleichung liefert

$$(1+\varepsilon)^\nu = (1+\varepsilon')^\nu(1+\varepsilon')^\nu \geq (1+\nu\varepsilon')(1+\nu\varepsilon') \geq \varepsilon'^2\nu^2.$$

Damit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq (1+\varepsilon)^\nu, \nu \geq N$ (siehe A.7.1), also auch $\sqrt[\nu]{\nu} \leq 1+\varepsilon, \nu \geq N$. Hieraus folgt $1 \leq \liminf\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \leq \limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \leq 1+\varepsilon$ und damit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.
2. $1 \leq \sqrt[\nu]{x} \leq \sqrt[\nu]{\nu}$ für $\nu \geq x \geq 1$ sowie $1 \leq \frac{1}{\sqrt[\nu]{x}} \leq \sqrt[\nu]{\nu}$ für $\nu \geq \frac{1}{x} \geq 1$. Verwende 1. und das Einschließungskriterium.

β) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu^k} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^k = 1$ mit α).

γ) Es gilt (siehe 1.2.59 iii), dass $\frac{x^\nu}{\nu!} \to 0$ $(\nu \to \infty)$ für alle $x \geq 0$, ist also $R \geq 1$ beliebig, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R^\nu}{\nu!} \leq 1, \nu \geq N$, also $\frac{\nu!}{R^\nu} \geq 1, \nu \geq N$, und damit $\sqrt[\nu]{\nu!} \geq R, \nu \geq N$.

δ) Aus γ) folgt $\sqrt[\nu]{\frac{R^\nu}{\nu!}} = R \cdot \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu!}} \to 0$ $(\nu \to \infty)$.

iii) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ absolut. Dies folgt aus $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|z^\nu|}{\nu!}} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|z|^\nu}{\nu!}} = 0 < 1$.
$\exp(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ heißt **Exponentialreihe**, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$ heißt **Exponentialfunktion**.

iv) Es sei $x_\nu = \nu\left(\frac{2\nu+1}{3\nu+2}\right)^\nu$. Dann gilt

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{2\nu+1}{3\nu+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$.

Satz 2.2.23 *(Quotientenkriterium)*
Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$ *und es gebe ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $z_\nu \neq 0$ *für alle* $\nu \geq N$.
Gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|} < 1$, *so konvergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *(absolut).*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_\nu := |z_\nu| > 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen

$$\alpha := \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} =: \beta.$$

Die Behauptung folgt dann mit dem Wurzelkriterium.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{\nu\geq N} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \leq \beta+\varepsilon, \nu \geq N$.
Für $\nu > N$ folgt dann

$$\begin{aligned} x_\nu &= x_N \cdot \prod_{k=N}^{\nu-1} \left(\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}\right) \leq x_N \cdot (\beta+\varepsilon)^{\nu-N} \\ &= (\beta+\varepsilon)^\nu \cdot \frac{x_N}{(\beta+\varepsilon)^N}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{(\beta+\varepsilon)^\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\frac{x_N}{(\beta+\varepsilon)^N}} \\ &= (\beta+\varepsilon) \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{x_N}{(\beta+\varepsilon)^N}} = \beta+\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\alpha \leq \beta$. □

Beispiel 2.2.24 Es sei $z_\nu = \frac{z^\nu}{\nu!}, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $z \neq 0$

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|} = \limsup_{\nu\to\infty} \frac{|z|}{\nu+1} = 0 < 1.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, siehe 2.2.22 ii).

Definition 2.2.25 Für eine Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$ setzt man $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ s_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die mit $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ und z_0 gebildete Potenzreihe. Anstelle $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schreibt man $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt s_n die n-te Partialsumme der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$.
$R := \frac{1}{\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe. Hierbei ist $+\infty := \frac{1}{0}$ und $0 := \frac{1}{+\infty}$ gesetzt.

Satz 2.2.26 *Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ absolut für $|z-z_0| < R$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ divergiert für $|z-z_0| > R$.*
R ist also das eindeutig bestimmte $x \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

i) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ *konvergiert für alle* $|z-z_0| < x$,

ii) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ *divergiert für alle* $|z-z_0| > x$.

Konvergiert also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so gilt $R \geq |z-z_0|$, divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so gilt $R \leq |z-z_0|$.

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Wir setzen $z_\nu := a_\nu(z-z_0)^\nu, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|} = \frac{|z-z_0|}{R}$.
Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ sicher dann (absolut), falls $\frac{|z-z_0|}{R} < 1$, d.h. $|z-z_0| < R$, und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ divergiert sicher dann, wenn $\frac{|z-z_0|}{R} > 1$, d.h. $|z-z_0| > R$. □

Bemerkung 2.2.27 i) Sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_1)^\nu$ zwei Potenzreihen und existiert $N \in \mathbb{N}$ und $C \geq 1$ mit $\frac{1}{C}|a_\nu| \leq |b_\nu| \leq$

$C|a_\nu|, \nu \geq N$, so haben $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_1)^\nu$ den selben Konvergenzradius. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} &= \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|a_\nu|}{C}} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{C|a_\nu|} \\ &= \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}.\end{aligned}$$

ii) Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$, so macht obiger Satz keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ für $|z-z_0| = R$.

Nochmal: Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ für alle $z \in U_R(z_0)$ (sogar absolut) und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}\backslash B_R(z_0) = B_R(z_0)^c$.

Beispiel 2.2.28 i) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ hat Konvergenzradius ∞.

ii) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ hat Konvergenzradius 1, für alle $|z| = 1$ divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$.

iii) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$ hat Konvergenzradius 1, für $z = 1$ divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$, für $z = -1$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$.

iv) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$ hat Konvergenzradius 1, für $|z| = 1$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$.

v) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \nu! z^\nu$ hat Konvergenzradius 0.

Satz 2.2.29 *Sind* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ *und* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$ *Potenzreihen mit Konvergenzradien* R_1 *bzw.* R_2*, ist* $\lambda \in \mathbb{C}$*, und ist* R *der Konvergenzradius von*

$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu$, *so gilt* $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ *(wobei* $\min\{s, +\infty\} =: s$*)* *und* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu = \lambda\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$ *für alle* $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$. Aus 2.2.26 und 2.2.4 folgt, dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu$ konvergiert und dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu = \lambda\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^\nu$ gilt.
Mit 2.2.26 folgt $R \geq |z-z_0|$. Da $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$ beliebig war, gilt $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. □

Bemerkung 2.2.30 Es sei $\exp(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}, z \in \mathbb{C}$, die Exponentialreihe. Wir wollen die fundamentale Gleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w),\ \ z, w \in \mathbb{C},$$

beweisen. Nach Anwendung des binomischen Satzes ist diese äquivalent zu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!(\nu-k)!}\,z^k w^{\nu-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,w^k\Big),\ \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Wir stehen vor dem Problem, folgende Menge von komplexen Zahlen „aufzusummieren“:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & z & \frac{z^2}{2} & \frac{z^3}{6} & \cdots \\[2ex]
w & zw & \frac{z^2}{2}w & \frac{z^3}{6}w & \cdots \\[2ex]
\frac{w^2}{2} & z\frac{w^2}{2} & \frac{z^2}{2}\frac{w^2}{2} & \frac{z^3}{6}\frac{w^2}{2} & \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Summieren wir zunächst die „Antidiagonalen“ auf, bilden dann eine Reihe, so erhalten wir die linke Seite obiger Gleichung.
Bilden wir aber zunächst die Reihen, welche den Zeilen entsprechen, und

dann die Reihe dieser Reihen, so erhalten wir die rechte Seite der Gleichung. Analoges gilt, wenn wir zunächst spaltenweise und dann zeilenweise „aufaddieren“.
Wir müssen noch beweisen, um unsere Gleichung zu zeigen, dass es gleich ist, wie wir „summieren“.
Wir beginnen mit

Definition 2.2.31 Es sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $z : I \to \mathbb{K}$ eine Abbildung. Man setzt $z_\iota := z(\iota), \iota \in I$, und schreibt

$$z = (z_\iota)_{\iota \in I}.$$

$(z_\iota)_{\iota \in I}$ heißt Familie in $\mathbb{K}$. Ist $J \subset I$ endlich und ist $|J| = n, J = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$, so setzt man

$$\sum_{\iota \in J} z_\iota := \sum_{\nu=1}^{n} z_{\iota_\nu}.$$

Ist $J = \emptyset$, so sei $\sum\limits_{\iota \in J} z_\iota =: 0$.
Die Familie $(z_\iota)_{\iota \in I}$ heißt summierbar zur Summe $s \in \mathbb{K}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subset I$ existiert, so dass für alle endlichen Teilmengen $M \subset \hat{M} \subset I$

$$|\sum_{\iota \in \hat{M}} z_\iota - s| < \varepsilon$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir $\sum\limits_{\iota \in I} z_\iota := s$.

Ersetzt man $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ durch einen beliebigen Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ so erhält man die Definition der Summierbarkeit in E. Alle folgenden Sätze (mit Ausnahme von 2.2.41) bis Satz 2.2.44 gelten dann auch in dieser verallgemeinerten Situation.

Beispiel 2.2.32 Es sei $I = \mathbb{N}_0^2 = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}_0\}, z, w \in \mathbb{C}$ und $z_{(n,m)} := \frac{w^n}{n!}\frac{z^m}{m!}, (n,m) \in \mathbb{N}_0^2$.
Ist $J = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2)\}$, so gilt $\sum\limits_{(n,m)\in J} z_{(n,m)} = 1 + w + z + zw + \frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2}$.

Satz 2.2.33 *Es sei $(z_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie in $\mathbb{K}$, die summierbar zur Summe s sei. Ist $\tau : J \to I$ bijektiv, so ist auch die Familie $(z_{\tau(j)})_{j \in J}$ summierbar zur Summe s.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $M \subset I, |M| < \infty$, so dass

$$\Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big| < \varepsilon$$

für alle $M \subset \hat{M} \subset I, |\hat{M}| < \infty$.
Es sei $L := \tau^{-1}(M) \subset J$. Dann ist $|L| = |M| < \infty$. Ist $L \subset \hat{L} \subset J, |\hat{L}| < \infty$, so setzen wir $\hat{M} := \tau(\hat{L})$.
Aus

$$\sum_{j\in\hat{L}} z_{\tau(j)} \quad = \sum_{j\in\{\tau^{-1}(\iota):\iota\in\hat{M}\}} z_{\tau(j)} = \sum_{\iota\in\hat{M}} z_{\tau(\tau^{-1}(\iota))} = \sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota$$

folgt

$$\Big|\sum_{j\in\hat{L}} z_{\tau(j)} - s\Big| = \Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big| < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 2.2.34 Satz 2.2.33 besagt gerade, dass summierbare Familien stabil unter Umordnungen sind.
Der Riemannsche Umordnungssatz, den wir hier nicht beweisen wollen, besagt, dass für eine beliebige konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ reeller Zahlen, und für jedes $s \in \mathbb{R}$ man eine Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ finden kann, so dass

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\tau(\nu)}.$$

Wir werden später zeigen, dass Summierbarkeit einer Familie $(x_n)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ reeller (oder komplexer) Zahlen gerade die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ bedeutet und dass in diesem Fall $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0} x_\nu$ gilt.

Satz 2.2.35 *Sind $(z_\iota)_{\iota\in I}$ und $(w_\iota)_{\iota\in I}$ summierbare Familien und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist auch $(\lambda z_\iota + w_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar, und es gilt $\sum\limits_{\iota\in I} \lambda z_\iota + w_\iota = \lambda \sum\limits_{\iota\in I} z_\iota + \sum\limits_{\iota\in I} w_\iota$.*

Beweis. Dies folgt aus $\sum\limits_{\iota\in M} \lambda z_\iota + w_\iota = \lambda \sum\limits_{\iota\in M} z_\iota + \sum\limits_{\iota\in M} w_\iota$ für alle $M \subset I, |M| < \infty$. □

Satz 2.2.36 *Ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie komplexer Zahlen, so ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ genau dann summierbar, wenn $(\operatorname{Re} z_\iota)_{\iota\in I}$ und $(\operatorname{Im} z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar sind. In diesem Fall gilt $\sum_{\iota\in I} z_\iota = \sum_{\iota\in I} \operatorname{Re}(z_\iota) + i \sum_{\iota\in I} \operatorname{Im} z_\iota$ und auch $\sum_{\iota\in I} \overline{z_\iota} = \overline{\sum_{\iota\in I} z_\iota}$.*

Beweis. Übungen. □

Auch im Fall der Summierbarkeit zeigen wir ein Cauchykriterium:

Lemma 2.2.37 *Eine Familie $(z_\iota)_{\iota\in I}$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann summierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $M \subset I$ endlich mit*

$$\Big|\sum_{\iota\in K} z_\iota\Big| < \varepsilon$$

für alle $K \subset I\backslash M, |K| < \infty$, existiert.

Beweis.

1. Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar, und es sei $\varepsilon > 0$.
Wähle $M \subset I$ endlich mit $\Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $M \subset \hat{M} \subset I$.
Ist nun $K \subset I\backslash M$ endlich, so folgt
$$\begin{aligned} \Big|\sum_{\iota\in K} z_\iota\Big| &= \Big|\sum_{\iota\in K\cup M} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota + \sum_{\iota\in I} z_\iota - \sum_{\iota\in M} z_\iota\Big| \\ &\le \Big|\sum_{\iota\in K\cup M} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| + \Big|\sum_{\iota\in I} z_\iota - \sum_{\iota\in M} z_\iota\Big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Es gelte die Cauchyeigenschaft. Wir wählen gemäß dieser eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlichen Teilmengen von I mit $M_{n+1} \supset M_n$ und $\Big|\sum_{\iota\in K} z_\iota\Big| < \frac{1}{2^n}$ für alle $K \subset I\backslash M_n$ endlich und setzen $s_n := \sum_{\iota\in M_n} z_\iota$. Es folgt für $m \ge n$: $|s_m - s_n| = \Big|\sum_{\iota\in M_m\backslash M_n} z_\iota\Big| < \frac{1}{2^n}$, also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $s \in \mathbb{K}$ konvergiert. Es folgt $|s - s_n| \le \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ und setze $M := M_N$. Dann

folgt für $M \subset \hat{M} \subset I$ mit $|\hat{M}| < \infty$:

$$\Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big| \leq \Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in M_N} z_\iota\Big| + \Big|\sum_{\iota\in M_N} z_\iota - s\Big|$$

$$\leq \Big|\sum_{\iota\in\hat{M}\setminus M_N} z_\iota\Big| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Korollar 2.2.38 *Ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine summierbare Familie in $\mathbb{K}$ und ist $J \subset I$, so ist auch $(z_\iota)_{\iota\in J}$ summierbar.*

Beweis. Die Cauchyeigenschaft aus 2.2.37 überträgt sich offensichtlich auf Teilfamilien (Ist $K \subset J\setminus M$, so gilt $K \subset I\setminus M$). □

Satz 2.2.39 *Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in $\mathbb{K}$. Ist*

$$\Big\{\sum_{\iota\in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\Big\}$$

beschränkt (in $\mathbb{R}$), so ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar und es gilt

$$\Big|\sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| \leq \sum_{\iota\in I} |z_\iota|.$$

Beweis. Wegen

$$\Big|\sum_{\iota\in K} z_\iota\Big| \leq \sum_{\iota\in K} |z_\iota|$$

für $K \subset I$ endlich, genügt es die Cauchyeigenschaft aus 2.2.37 für $(|z_\iota|)_{\iota\in I}$ nachzurechnen. Es sei $c := \sup\Big\{\sum_{\iota\in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\Big\}$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $M \subset I, |M| < \infty$ mit $\sum_{\iota\in M} |z_\iota| > c - \varepsilon$. Dann gilt für alle $K \subset I\setminus M,\ |K| < \infty$:

$$\begin{aligned}\sum_{\iota\in K} |z_\iota| &= \sum_{\iota\in K\cup M} |z_\iota| - \sum_{\iota\in M} |z_\iota| \\ &< c - (c - \varepsilon) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also hat $(|z_\iota|)_{\iota\in I}$ die im Lemma 2.2.37 geforderte Cauchyeigenschaft. $\square$

Korollar 2.2.40 *Es sei $(x_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie nichtnegativer reeller Zahlen. Dann sind äquivalent*

i) $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *summierbar,*

ii) $\sup\big\{\sum_{\iota\in M} x_\iota : M\subset I, |M|<\infty\big\}<\infty.$

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i) folgt aus 2.2.39.
i) $\Rightarrow$ ii) Nach der Definition der Summierbarkeit existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $M\subset I,\ |M|<\infty$, so dass

$$\Big|\sum_{\iota\in\hat M} x_\iota - \sum_{\iota\in I} x_\iota\Big| < \varepsilon\ (=1)$$

für alle $M\subset\hat M\subset I, |\hat M|<\infty$.
Also gilt

$$\sum_{\iota\in\hat M} x_\iota \le 1+\sum_{\iota\in I} x_\iota$$

für alle $\hat M\subset I, |\hat M|<\infty$. $\square$

Satz 2.2.41 *Ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in $\mathbb{K}$, so sind äquivalent*

i) $(z_\iota)_{\iota\in I}$ *ist summierbar,*

ii) $\sup\big\{\sum_{\iota\in M} |z_\iota| : M\subset I, |M|<\infty\big\}<\infty.$

Beweis. ii) $\Rightarrow$ i) folgt aus 2.2.39.
i) $\Rightarrow$ ii)

1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Es sei $\varepsilon>0$ beliebig. Nach 2.2.37 existiert ein $M\subset I, |M|<\infty$ mit

$$\Big|\sum_{\iota\in L} z_\iota\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $L \subset I \backslash M, |L| < \infty$.
Ist nun $K \subset I \backslash M, |K| < \infty$, so sei

$$K^+ := \{\iota \in K : z_\iota \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad K^- := \{\iota \in K : z_\iota \leq 0\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\iota \in K} |z_\iota| \Big| &= \sum_{\iota \in K} |z_\iota| = \sum_{\iota \in K^+} z_\iota - \sum_{\iota \in K^-} z_\iota \\ &= \Big| \sum_{\iota \in K^+} z_\iota \Big| + \Big| \sum_{\iota \in K^-} z_\iota \Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also hat $\big(|z_\iota|\big)_{\iota \in I}$ die in 2.2.37 geforderte Cauchyeigenschaft, und mit 2.2.40 folgt dann $\sup\big\{ \sum_{\iota \in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty \big\} < \infty$.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Da $(z_\iota)_{\iota \in I}$ summierbar, sind mit 2.2.36 auch $(\operatorname{Re} z_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\operatorname{Im} z_\iota)_{\iota \in I}$ summierbar. Es folgt mit 1.

$$\sup\Big\{ \sum_{\iota \in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty \Big\}$$

$$\leq \sup\Big\{ \sum_{\iota \in M} |\operatorname{Re} z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty \Big\} +$$

$$\sup\Big\{ \sum_{\iota \in M} |\operatorname{Im} z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty \Big\} < +\infty.$$

□

Satz 2.2.42 *Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann sind äquivalent*

i) Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert absolut,

ii) $\big(|z_\nu|\big)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ ist summierbar.

Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so gilt für alle bijektiven Abbildungen $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z_{\tau(\nu)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} z_{\tau(\nu)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} z_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu.$$

Beweis. i) und ii) sind gemäß den Sätzen 2.2.18 und 2.2.39 jeweils äquivalent zu

$$\sup\Big\{\sum_{\nu=0}^{n}|z_\nu| : n\in\mathbb{N}\Big\}<\infty.$$

Aufgrund von Satz 2.2.33 genügt es, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ zu zeigen. Es sei dazu $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $M\subset\mathbb{N}_0$ endlich mit $\big|\sum\limits_{n\in\hat{M}} z_n - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} z_n\big|<\varepsilon$ für alle $M\subset\hat{M}\subset\mathbb{N}_0, |\hat{M}|<\infty$. Sei $N:=\sup M$. Dann gilt für alle $n\geq N$:

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu\Big| = \Big|\sum_{\nu\in\{0,\dots,n\}} z_\nu - \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu\Big|<\varepsilon,$$

da $\{0,\dots,n\}\supset M$. □

Satz 2.2.43 *(Umordnungssatz)*
Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine summierbare Familie in $\mathbb{K}$, und es sei $(I_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Zerlegung von I (d.h. $\bigcup\limits_{\kappa\in K} I_\kappa = I, I_{\kappa_1}\cap I_{\kappa_2}=\emptyset$, falls $\kappa_1\neq\kappa_2$, und $I_\kappa\neq\emptyset$ für alle $\kappa\in K$). Dann ist $(z_\iota)_{\iota\in I_\kappa}$ für alle $\kappa\in K$ summierbar, die Familie $\big(\sum\limits_{\iota\in I_\kappa} z_\iota\big)_{\kappa\in K}$ ist summierbar, und es gilt

$$\sum_{\kappa\in K}\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota = \sum_{\iota\in I} z_\iota.$$

Beweis. Da $I_\kappa\subset I$, folgt mit 2.2.38, dass $(z_\iota)_{\iota\in I_\kappa}$ summierbar ist.
Es sei $\varepsilon>0$. Da $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar ist, existiert ein $M\subset I, |M|<\infty$ mit

$$\Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big|\leq\frac{\varepsilon}{2},\quad \hat{M}\supset M, |\hat{M}|<\infty.$$

Sei $L\subset K$ definiert durch $L:=\{\kappa\in K : I_\kappa\cap M\neq\emptyset\}$. Dann ist $|L|<\infty$ (da M endlich und $(I_\kappa)_{\kappa\in K}$ Zerlegung). Sei nun $K\supset\hat{L}\supset L, |\hat{L}|<\infty$.
Wähle $I_\kappa\supset S_\kappa$ endlich mit

α) $\Big|\sum\limits_{\iota\in S_\kappa} z_\iota - \sum\limits_{\iota\in I_\kappa} z_\iota\Big| < \dfrac{\varepsilon}{2|\hat{L}|},\ \kappa\in\hat{L}$ und

β) $S_\kappa\supset M\cap I_\kappa,\ \kappa\in L.$

Aus β) folgt $\hat{M} := \bigcup_{\kappa\in\hat{L}} S_\kappa \supset \bigcup_{\kappa\in L} S_\kappa \supset M$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\kappa\in\hat{L}}\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| \\
&= \Big|\sum_{\kappa\in\hat{L}}\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\kappa\in\hat{L}}\sum_{\iota\in S_\kappa} z_\iota + \sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{\kappa\in\hat{L}}\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\kappa\in\hat{L}}\sum_{\iota\in S_\kappa} z_\iota\Big| + \Big|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big| \\
&\leq \sum_{\kappa\in\hat{L}}\Big|\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\iota\in S_\kappa} z_\iota\Big| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.2.44 *(Doppelreihensatz)*

Es sei $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ *eine Familie in* $\mathbb{K}$*, und es gelte* $\sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |a_{n,k}| < \infty$.
Dann ist $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ *(absolut) summierbar, und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$

sowie

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu}.$$

Beweis. Die Voraussetzung impliziert $\sup\big\{\sum_{(n,k)\in M} |a_{n,k}| : M \subset \mathbb{N}_0^2, |M| < \infty\big\} < \infty$ (also ist $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ absolutsummierbar), und da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist nach 2.2.39 $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ auch summierbar.
Aus dem Umordnungssatz und Satz 2.2.42 folgt mit $I_n := \big\{(n,k) : k \in \mathbb{N}_0\big\}$:

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{(n,k)\in I_n} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.$$

Analog zeigt man $\sum\limits_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$.
Es sei $I_n := \big\{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}_0^2 : \nu+\mu = n\big\}$.
Dann gilt wieder mit dem Umordnungssatz und 2.2.42

$$\begin{aligned}\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\ \sum_{(\nu,\mu)\in I_n} a_{\nu,\mu}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.2.45 Wir wollen für $z,w\in\mathbb{C}, |z|,|w|<1$ die Familie $(z^n w^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2}$

$$\begin{matrix} 1 & w & w^2 & \dots\\ z & zw & zw^2 & \dots\\ z^2 & z^2w & z^2w^2 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

auf Summierbarkeit untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}|z^n w^m| &= \sum_{n=0}^{N}|z|^n\cdot\sum_{m=0}^{N}|w|^m\\ &\le \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{1}{1-|w|}.\end{aligned}$$

Also folgt aus dem Doppelreihensatz, dass $(z^n w^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2}$ summierbar ist und dass

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2} z^n w^m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^n w^m = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\sum_{m=0}^{\infty} w^m = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-w}.$$

Korollar 2.2.46 *(Satz vom Cauchyprodukt)*
Sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *und* $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} w_\mu$ *zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen, so gilt*

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z_n w_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_n w_k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu w_{n-\nu}.\end{aligned}$$

Beweis. Die Familie $(z_n w_k)_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ erfüllt wegen

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |z_n w_k| = \Big(\sum_{n=0}^{N} |z_n|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{N} |w_k|\Big) \le \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} |w_k|\Big)$$

die Voraussetzung des Doppelreihensatzes. □

Korollar 2.2.47 *(Produktsatz für Potenzreihen)*
Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *und* $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu$ *zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien* R_1 *bzw.* R_2.
Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\big)z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \ge \min\{R_1, R_2\}$, *und es gilt*

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\Big)\cdot\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big)z^\nu$$

für $|z| < \min\{R_1, R_2\}$.

Beweis. Es sei $|z| < \min\{R_1, R_2\}$.
Dann folgt aus dem vorhergehenden Korollar

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu b_{n-\nu} z^{n-\nu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big)z^n.$$

□

Beispiel 2.2.48 Es sei $|z| < 1, z \in \mathbb{C}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} z^\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} 1 \Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Elementare Funktionen I

Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann heißt $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, die durch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (z-z_0)^\nu$ dargestellte Funktion.
Die einfachsten dieser Funktionen sind die Polynome, d.h. Funktionen der Form $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$.

Wir wollen in diesem Kapitel etwas kompliziertere Funktionen betrachten, nämlich die Exponentenfunktion und ihre Ableger, die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, welche auch durch Potenzreihen dargestellt werden.

3.1 Die Exponentialfunktion

Definition 3.1.1 Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, heißt Exponentialfunktion.

Lemma 3.1.2 *Sind* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_\nu|, |b_\nu| \le 1,\ 1 \le \nu \le n$, *so gilt*

$$\Big| \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu \Big| \le \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu|.$$

Beweis. (durch vollständige Induktion)
$n = 1$. Ist offensichtlich.

$n-1 \mapsto n$. Es sei $a := \prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu$ und $b := \prod_{\nu=1}^{n-1} b_\nu$.
Dann folgt

$$\Big|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu\Big| = |a(a_n - b_n) + b_n(a-b)|$$

$$\leq |a_n - b_n| + \Big|\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n-1} b_\nu\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu|.$$

□

Satz 3.1.3 *Es gilt* $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $s_n(z) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}$ und $t_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$.
Wir zeigen $|s_n(z) - t_n(z)| \to 0\,(n \to \infty)$.
Denn dann folgt $t_n(z) = \big(t_n(z) - s_n(z)\big) + s_n(z) \to \exp(z)\,(n \to \infty)$.
Mit dem binomischen Lehrsatz gilt

$$t_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{n^\nu} z^\nu = 1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}.$$

Mit 3.1.2 folgt dann für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
|s_n(z) - t_n(z)| &= \Big|1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} - \Big(1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} 1 - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big| \\
&\leq \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \Big|\prod_{k=0}^{\nu-1} 1 - \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big| \\
&\leq \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \Big|1 - \frac{n-k}{n}\Big| \\
&= \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{k}{n} = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \frac{(\nu-1)\nu}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}|z|^2 \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \leq \frac{1}{2n}|z|^2 \exp(|z|) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.1.4 *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

Beweis. Nach dem Satz über das Cauchyprodukt und dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(z) \exp(w) &= \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^\mu\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} n! \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(n-\nu)!} z^\nu w^{n-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w).
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.5 Es sei

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Korollar 3.1.6 *Es gilt*

i) $\exp(z) \neq 0$, $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$ *und* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

ii) $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$, $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$ *und* $\exp(x) < \exp(y)$ *für* $x < y$.
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist also injektiv.*

iii) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

iv) $|\exp(ix)| = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

v) $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis.

i) Mit 3.1.4 gilt $\exp(z)\cdot\exp(-z) = \exp(0) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{0^\nu}{\nu!} = 1$. Also ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
Der zweite Teil folgt aus $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{\frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{\nu!} = \exp(\overline{z})$.

ii) Ist $x > 0$, so gilt $\exp(x) = 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} > 1 > 0$.
Mit i) ist dann auch $\exp(-x) > 0$ für $x > 0$.
Aus 3.1.3 folgt $\exp(1) = e$.
Ist $x < y$, so ist $\exp(y) = \exp(y - x) \cdot \exp(x) > \exp(x)$, da $y - x > 0$.

iii) $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z+\overline{z}) = \exp(\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2$.
Mit ii) folgt $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

iv) folgt aus iii), $\exp(0) = 1$ und $\operatorname{Re}(ix) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

v) $\exp(n) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} \exp(1) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} e = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$,
$\exp(0) = 1 = e^0$ und
$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n = e^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Wegen v) setzt man:

Definition 3.1.7 Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$e^z := \exp(z).$$

Bemerkung 3.1.8 (stetige Verzinsung)
Ein Anfangskapital K wächst bei einem Jahreszins q (> 0) und bei Verzinsung jeweils nach dem n-ten Teil eines Jahres auf das Endkapital $K_n = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{n}\right)^n \cdot K$, z. B.

$$K_1 = \left(1 + \frac{q}{100}\right) K \qquad \text{(jährliche Verzinsung)}$$

$$K_{12} = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{12}\right)^{12} K \qquad \text{(monatliche Verzinsung)}$$

$$K_{365} = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{365}\right)^{365} K \quad \text{(tägliche Verzinsung)}$$

Im Grenzfall (sogenannte stetige Verzinsung) erhält man

$$K_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{n}\right)^n K = e^{\frac{q}{100}} K.$$

Satz 3.1.9 *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.*

i) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^k} = +\infty \textit{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

ii) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k e^{x_n} = 0 \textit{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

iii) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 (\in \mathbb{C})$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^{z_n} = e^{z_0} \quad \textit{(Stetigkeit der Exponentialfunktion).}$$

Beweis. i) und ii) in den Übungen.
Zu iii):
Aus der Bernoulliungleichung folgt $(1+\frac{-y}{n})^n \geq 1-y$ für genügend große n. Limesbildung liefert $e^{-y} \geq 1-y$ und hieraus folgt $e^y \leq \frac{1}{1-y}$ für $y<1$. Anwendung auf $y=|z_n-z_0|$ ergibt (für genügend große n):

$$\begin{aligned} |e^{z_n}-e^{z_0}| &= |e^{z_0}||e^{z_n-z_0}-1| = |e^{z_0}||\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(z_n-z_0)^\nu| \\ &\leq |e^{z_0}|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}|z_n-z_0|^\nu = |e^{z_0}|(e^{|z_n-z_0|}-1) \\ &\leq |e^{z_0}|(\frac{1}{1-|z_n-z_0|}-1). \end{aligned}$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ folgt hiermit $\lim\limits_{n\to\infty} e^{z_n} = e^{z_0}$. □

3.2 Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

Definition 3.2.1 (trigonometrische Funktionen)
Es seien $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cos z := \cos(z) := \frac{1}{2}\,(e^{iz}+e^{-iz}) \quad \text{und}$$

$$\sin z := \sin(z) := \frac{1}{2i}\,(e^{iz}-e^{-iz}),\ z \in \mathbb{C}.$$

Satz 3.2.2 *Es gilt*

i) $\cos z = \cos(-z),\ \sin z = -\sin(-z),\ z \in \mathbb{C}$.

ii) $e^{iz} = \cos z + i \sin z,\ z \in \mathbb{C}$ *(Eulersche Formel).*

iii) $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$, *für* $x \in \mathbb{R}$ *und sogar* $-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

iv) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1,\ z \in \mathbb{C}$.

v) $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix},\ \sin x = \operatorname{Im} e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$, *und* $e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

vi) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ *und*
$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,\ z,w \in \mathbb{C}$ *(Additionstheoreme).*

vii) $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ *und*

$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \; z \in \mathbb{C}.$

Beweis.

i) $\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{-iz} + e^{iz}\right) = \cos z$, für sin analog.

ii) $\cos z + i \sin z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + \frac{i}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = e^{iz}$.

iii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\cos x} &= \overline{\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} = \frac{1}{2}\left(\overline{e^{ix}} + \overline{e^{-ix}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) = \cos x, \end{aligned}$$

damit $\cos x \in \mathbb{R}$. Weiter folgt $|\cos x| \le \frac{1}{2}\left(|e^{ix}| + |e^{-ix}|\right) = 1$.
Analog zeigt man die Behauptung für sin.

iv) $\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2$
$= \frac{1}{4}\left(2e^{iz} \cdot 2e^{-iz}\right) = e^0 = 1.$

v) folgt aus ii) und iii).

vi) $\cos(z + w) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\right)$
$= \frac{1}{2}\Big((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w)\Big)$
$\quad +\big(\cos(-z) + i \sin(-z)\big)\big(\cos(-w) + i \sin(-w)\big)$
$= \frac{1}{2}\Big(\cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\sin z \cos w + \cos z \sin w)$
$\quad + \cos z \cos w - \sin z \sin w - i(\sin z \cos w + \cos z \sin w)\Big)$
$= \cos z \cos w - \sin z \sin w.$

Analog für $\sin(z + w)$.

vii) Aus $e^z = \exp(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ erhalten wir

$$e^{iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^\nu}{\nu!} z^\nu \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^\nu}{\nu!} z^\nu.$$

Für die Potenzreihe $\cos z = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(i^\nu + (-i)^\nu)\frac{1}{\nu!}}_{=:a_\nu} z^\nu$ gilt also $a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{1}{(2\nu)!}$ und $a_{2\nu+1} = 0$ und somit

$$\cos z = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Analog zeigt man die Darstellung für $\sin z$.

□

Definition 3.2.3 (hyperbolische Funktionen)
Es seien die Abbildungen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cosh z := \cosh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \quad \text{und}$$
$$\sinh z := \sinh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

Es gilt

Satz 3.2.4 *Es gilt*

i) $\cosh(-z) = \cosh(z), \;\; \sinh(-z) = -\sinh(z), \;\; z \in \mathbb{C}.$

ii) $\cosh(z) = \cos(iz), \;\; \sinh(z) = -i\sin(iz), \;\; z \in \mathbb{C}.$

iii) $\cosh x, \sinh x \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $\frac{1}{2}\, e^{|x|} \le \cosh x \le e^{|x|}, \;\; x \in \mathbb{R}.$

iv) $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1.$

v) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$
$\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$ *(Additionstheoreme).*

vi) $\cosh(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \;\; \sinh(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \;\; z \in \mathbb{C}.$

Beweis. Analog zu 3.2.2. □

Kapitel 4

Topologische Grundbegriffe

4.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann hat das Intervall (a, b) die folgende Eigenschaft: Für alle $x \in (a, b)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(x) = \big\{y \in \mathbb{R} : |y - x| = d_{|\cdot|}(y, x) < \varepsilon\big\} \subset (a, b).$$

Man wähle zum Beispiel $\varepsilon := \min\big\{|x - a|, |x - b|\big\}$ oder ε kleiner.
Allgemeiner setzen wir

Definition 4.1.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen (in X), falls für alle $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$U_\varepsilon(x) = \big\{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\big\} \subset A.$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $A^c = X \backslash A$ offen ist.

Bemerkung 4.1.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $r > 0$ und $z \in X$. Dann gilt

i) $U_r(z)$ ist offen: Es sei $x \in U_r(z)$. Dann gilt $d(x, z) < r$, also ist $\varepsilon := r - d(x, z) > 0$. Ist nun $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig, so gilt $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \varepsilon + d(x, z) = r$.
Also gilt $U_\varepsilon(x) \subset U_r(z)$.

ii) $B_r(z)$ $(= \{y \in X : d(y, z) \leq r\})$ ist abgeschlossen: Es sei $x \in B_r(z)^c$. Dann gilt $d(x, z) > r$, also ist $\varepsilon := d(x, z) - r > 0$. Ist $y \in U_\varepsilon(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} d(y,z) &\geq |d(y,x) - d(x,z)| \\ &\geq d(x,z) - d(y,x) > d(x,z) - \varepsilon = r. \end{aligned}$$

Also gilt $U_\varepsilon(x) \subset B_r(z)^c$.

Beispiel 4.1.3 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Dann sind alle Intervalle der Form (a, b) offen und alle Intervalle der Form $[a, b]$ abgeschlossen. Weiter sind $(-\infty, a), (b, \infty)$ offen und $(-\infty, a], [b, \infty)$ abgeschlossen.
$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

Satz 4.1.4 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

- *(T1)* *$\emptyset$ ist offen, und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.*
- *(T2)* *X ist offen, und der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist wieder offen.*
- *(H)* *Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen U und V mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Da die leere Menge $\emptyset$ kein Element enthält, gilt für jedes ihrer Elemente x (nämlich keines), dass $U_\varepsilon(x) \subset \emptyset$. Trivialerweise ist X offen.
Es sei nun $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf X, so dass jedes $F \in \mathscr{F}$ offen ist.
Es sei $x \in \cup\mathscr{F} = \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}} F$. Dann existiert ein $F \in \mathscr{F}$ mit $x \in F$. Da F offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset F$. Es folgt $U_\varepsilon(x) \subset F \subset \cup\mathscr{F}$. Also ist auch $\cup\mathscr{F}$ offen.
Es sei nun zusätzlich $\mathscr{F}$ endlich (d.h. $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ mit F_j offen, $1 \leq j \leq n$). Es sei $x \in \cap\mathscr{F} = \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F$. Da jedes $F \in \mathscr{F}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon_F > 0$ mit $U_{\varepsilon_F}(x) \subset F$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_F : F \in \mathscr{F}\}$ (> 0). Dann folgt $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} U_{\varepsilon_F}(x) \subset \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} = \cap\mathscr{F}$. Also ist auch $\cap\mathscr{F}$ offen.
Zu (H): Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}\, d(x, y) > 0$ und $U := U_\varepsilon(x), V := U_\varepsilon(y)$. Dann sind U und V offen, weiter ist $x \in U$ und $y \in V$.
Nehmen wir an, es existiere ein $z \in U \cap V$. Für dieses z gilt dann $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x, y)$, Widerspruch! Also ist $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Korollar 4.1.5 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind $\emptyset, X$ abgeschlossen, der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die Aussage über den Durchschnitt. Sei also $\mathscr{F}$ ein Mengensystem in X, so dass alle $F \in \mathscr{F}$ abgeschlossen sind. Dann ist F^c offen für alle $F \in \mathscr{F}$. Also ist nach 4.1.4 $\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F^c$ offen. Aus den deMorganschen Regeln folgt $\big(\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F\big)^c = \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F^c$. Also ist $\big(\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F\big)^c$ offen und damit $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F = \cap\mathscr{F}$ definitionsgemäß abgeschlossen. □

Definition 4.1.6 Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Dann heißt

i) $\mathring{A} := \bigcup\limits_{\substack{O\subset A \\ O \text{ offen}}} O$ das Innere von A,

ii) $\overline{A} := \bigcap\limits_{\substack{B\supset A \\ B \text{ abgeschlossen}}} B$ der Abschluss von A,

iii) $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$ der Rand von A,

iv) $x \in A$ innerer Punkt von A, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset A$,

v) $x \in X$ Randpunkt von A, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.

Satz 4.1.7 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

i) $\mathring{A}$ *ist offen und* $\mathring{A}$ *ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.*

ii) $\overline{A}$ *und* ∂A *sind abgeschlossen,* $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.*

iii) $\overline{A} = X \backslash \big(\overset{\circ}{\widehat{X\backslash A}} \big)$,

$\mathring{A} = X \backslash \big(\overline{X\backslash A}\big)$,

$\partial A = \overline{A} \cap \big(\overline{X\backslash A}\big)$,

iv) *A ist offen* $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$,
A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,

v) $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow$ *x ist innerer Punkt von A,*

vi) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$,*

vii) $x \in \partial A \Leftrightarrow$ *x ist Randpunkt von A.*

Beweis.

i) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{O \subset A \\ O \text{ offen}}} O$ ist Vereinigung offener Mengen, also mit 4.1.4 wieder offen.

ii) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abgeschlossen}}} B$ ist Durchschnitt abgeschlossener Mengen, also mit 4.1.5 wieder abgeschlossen.
$X \backslash \overset{\circ}{A}$ ist mit i) abgeschlossen, $\overline{A}$ ist mit ii) abgeschlossen, also ist $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (X \backslash \overset{\circ}{A})$ als Durchschnitt (zweier) abgeschlossener Mengen nach 4.1.5 wieder abgeschlossen.

iii) Mit den deMorganschen Regeln gilt

$$\begin{aligned} X \backslash \overline{A} &= X \backslash \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{abgeschlossen}}} B = \bigcup_{\substack{B \supset A \\ B \text{abgeschlossen}}} X \backslash B = \bigcup_{\substack{C \subset X \backslash A \\ C \text{offen}}} C \\ &= \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}} . \end{aligned}$$

Also gilt $\overline{A} = X \backslash (X \backslash \overline{A}) = X \backslash \big(\overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}} \big)$.
Es sei $B := X \backslash A$. Dann gilt $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash B}} = X \backslash \overline{B} = X \backslash \big(\overline{X \backslash A}\big)$.
$\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \big(X \backslash \overset{\circ}{A}\big) = \overline{A} \cap \big(\overline{X \backslash A}\big)$.

iv) folgt aus i) und ii).

v) ist eine Umformulierung der Definitionen.

vi) $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$

$$\underset{\text{v)}}{\Leftrightarrow} \exists_{\varepsilon > 0} \; U_\varepsilon(x) \subset X \backslash A.$$

Damit gilt $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \not\subset X\backslash A$

$$\Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

vii) $X \in \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X\backslash A}\right)$

$\underset{\text{vi)}}{\Leftrightarrow} \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$.

$\square$

Beispiel 4.1.8 i) Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

Ist I ein beschränktes Intervall mit linker Grenze a und rechter Grenze b, so gilt

$$\overset{\circ}{I} = (a, b), \quad \overline{I} = [a, b], \quad \partial I = \{a, b\}.$$

Analoges gilt für unbeschränkte Intervalle. Leicht einzusehen ist auch $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$:

Wir zeigen $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und nehmen dazu an, dass $x_0 \in \mathbb{Q}$ innerer Punkt ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{Q}.$$

Nun wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}\sqrt{2} < \varepsilon$.

Dann gilt $x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2} \in U_\varepsilon(x_0)\backslash\mathbb{Q}$. Widerspruch!

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ folgt aus 1.2.71, vgl. 1.2.75.

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $\overset{\circ}{\widehat{\{x_0\}}} = \emptyset$, $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$, und allgemeiner $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\overline{M} = M$ für jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$.

ii) Ist $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, so gilt z.B.

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ ist offen}$$
$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \text{ also } \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} =: S^1$$
$$\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset, \; \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \text{ also } \partial\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

(Achtung: Hier wird $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet!)

Wir zeigen z.B. $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$.
Wir nehmen an, $x_0 \in \mathbb{R}$ sei innerer Punkt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dann ist

$$x_0 + \frac{1}{n} i \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \mathbb{R}, \text{ Widerspruch!}$$

Bemerkung 4.1.9 i) Endliche Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen. In der Tat, da endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, muss man nur zeigen, dass Mengen der Form $\{x_0\}$ abgeschlossen sind. Dies folgt aber aus $\{x_0\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(x_0)$ und der Tatsache, dass beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

ii) Es gibt metrische Räume, in denen jede Teilmenge sowohl abgeschlossen als auch offen ist. Hierzu sein M eine beliebige Menge und

$$d : M \times M \to [0, \infty), \ d(x, y) := \begin{cases} 1 & : \ x \neq y \\ 0 & : \ x = y. \end{cases}$$

Es sei $A \subset M$ und $x_0 \in A$. Für $\varepsilon = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x_0) &= \{x \in M : d(x, x_0) < 1\} \\ &= \{x_0\} \subset A. \end{aligned}$$

Eine Beschreibung des Abschlusses liefert

Satz 4.1.10 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt $x_0 \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A existiert, so dass $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.*

Beweis. Es sei $x_0 \in \overline{A}$. Dann existiert mit 4.1.7 vi) zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Es folgt $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, also konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x_0.
Gilt andererseits $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ mit $x_n \in A, \ n \in \mathbb{N}$, und ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt $x_N \in U_\varepsilon(x_0)$ und damit $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$.
Mit 4.1.7 vi) folgt $x_0 \in \overline{A}$. □

Definition 4.1.11 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

i) $x_0 \in X$ Häufungspunkt von A, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\big(U_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset$.

ii) $x_0 \in A$ isolierter Punkt von A, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\{x_0\} = U_\varepsilon(x_0) \cap A$ gilt.

Satz 4.1.12 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

i) $x_0 \in \overline{A}$ genau dann, wenn x_0 entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt von A ist.

ii) Die Menge der Häufungspunkte von A ist abgeschlossen.

iii) Ist $A = X$, so ist $\{x_0\}$ genau dann isolierter Punkt von X, wenn $\{x_0\}$ offen ist.

Beweis. In den Übungen. □

Beispiel 4.1.13 Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in dem metrischen Raum (Y, d_Y) (also zum Beispiel in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ mit Grenzwert x_0, und es gelte $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, $d_X(x, y) := d_Y(x, y)$, $x, y \in X$, so gilt für $A \subset X$.

α) Ist $x_0 \in A$, so ist A offen in (X, d_X) genau dann, wenn $X \backslash A$ endlich.

β) Ist $x_0 \notin A$, so ist A offen in (X, d_X).

Beweis. In den Übungen. □

Definition 4.1.14 Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt dicht, falls $\overline{A} = X$ gilt.

Beispiel 4.1.15 i) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ (siehe 4.1.8).

ii) $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{C}$. Sei dazu $z_0 = x_0+iy_0 \in \mathbb{C}$. Wähle $x_n \in \mathbb{Q}, y_n \in \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$. Es folgt $x_n + iy_n \to x_0 + iy_0 = z_0$.

Satz 4.1.16 *(Baire)*
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und es sei $O_n \subset X$ offen und dicht, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht.

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir konstruieren ein $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n \cap U_\varepsilon(x_0)$.
Dann folgt mit 4.1.7 vi), dass $x_0 \in \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n}$, und da x_0 beliebig, $X = \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n}$.
Es sei $0 < \varepsilon_0 < \min\{\varepsilon, 1\}$. Da O_1 dicht ist, existiert (mit 4.1.7 vi)), ein $x_1 \in B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x_0) \cap O_1$. Wähle $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ mit $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_1$. Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gewählt, so existiert mit 4.1.7 vi) ein $x_{n+1} \in B_{\frac{\varepsilon_n}{2}}(x_n) \cap O_{n+1}$, da $\overline{O_{n+1}} = X \supset \{x_n\}$. Wähle $0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{2}$ mit $B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{n+1}$.
Es gilt nun für $m > n$, dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le \sum_{\nu=n}^{m-1} d(x_\nu, x_{\nu+1}) \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{2} \\ &\le \varepsilon_n \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert dies zunächst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da (X, d) nach Voraussetzung vollständig ist, besitzt diese einen Grenzwert x^*.
Es folgt

$$\begin{aligned} d(x^*, x_n) &\le d(x^*, x_m) + d(x_m, x_n) \\ &\le d(x^*, x_m) + \varepsilon_n \to \varepsilon_n \ (m \to \infty), \end{aligned}$$

also $d(x^*, x_n) \le \varepsilon_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, insbesondere ist $x^* \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U_\varepsilon(x_0)$ und $x^* \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset O_n$, also $x^* \in U_\varepsilon(x_0) \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. □

Korollar 4.1.17 *(Baire)*
Es sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum, und es sei $A_n \subset X$ abgeschlossen, $n \in \mathbb{N}$. Gilt $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{A}_N \neq \emptyset$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathring{A}_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Setze $O_n := X \setminus A_n$. Dann ist O_n offen und wegen $\overline{O_n} = \overline{X \setminus A_n} = X \setminus \mathring{A}_n = X$ auch dicht, $n \in \mathbb{N}$.
Mit 4.1.16 ist dann auch $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht, und wegen $X \neq \emptyset$ folgt hieraus, dass $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$.
Damit gilt $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \setminus \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq X$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{A}_N \neq \emptyset$. □

Definition 4.1.18 Es sei M eine Menge. M heißt abzählbar, falls M endlich oder eine Bijektion von $\tau : \mathbb{N} \to M$ existiert.
Im zweiten Fall heißt M abzählbar unendlich.
Ist M nicht abzählbar, so heißt M überabzählbar.

Satz 4.1.19 *Es sei M eine Menge. Dann sind äquivalent:*

i) M ist abzählbar.

ii) Es existiert eine Injektion $\iota : M \to \mathbb{N}$.

iii) Es existiert eine Surjektion $\sigma : \mathbb{N} \to M$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii), iii) ist trivial.
ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $n_1 = \min \iota(M)$ und

$$n_k = \min \iota(M) \setminus \{n_1, \ldots, n_{k-1}\},\ k \geq 2.$$

Dann ist $\iota : M \to \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ bijektiv. Setze $\tau(k) := \iota^{-1}(n_k),\ k \in \mathbb{N}$.
iii) $\Rightarrow$ i): Es sei $n_1 := 1$ und

$$n_k = \min \mathbb{N} \setminus \sigma^{-1}\big(\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_{k-1})\}\big),\ k \geq 2,$$

d.h. n_k ist die kleinste natürliche Zahl n mit $\sigma(n) \notin \big\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_{k-1})\big\}$.
Dann ist $\sigma : \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \to M$ bijektiv. Setze $\tau(k) := \sigma(n_k),\ k \in \mathbb{N}$. □

Satz 4.1.20 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar, und damit ist $M \times N$ abzählbar für M, N abzählbar.*

Beweis. Es sei $\iota : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\iota(m,n) = 2^{m+n} + m,$$

ι ist injektiv: Sei $\iota(m,n) = \iota(k,\ell)$, also

$$2^{m+n} + m = 2^{k+\ell} + k.$$

Wir nehmen an, dass $m+n > k+\ell$ gilt. Dann folgt $2^{k+\ell}\underbrace{(2^{m+n-k-\ell} - 1)}_{>1} = k - m$ und daraus wiederum $2^{k+\ell} < k - m < k$, Widerspruch.
Analog zeigt man, dass der Fall $k+\ell > m+n$ nicht auftreten kann, also gilt $m+n = k+\ell$, also dann auch $m = k$ und schließlich $n = \ell$. □

Man kann auch konkrete Abzählungen $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ angeben. Beispielsweise:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) \\
\downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
(4,1) & & & & & &
\end{array}$$

$$\tau(1) = (1,1),\ \tau(2) = (2,1),\ \tau(3) = (1,2),$$
$$\tau(4) = (3,1),\ \tau(5) = (2,2),\ \tau(6) = (1,3), \ldots$$

Beispiel 4.1.21 $\mathbb{Z}$ ist abzählbar nach Beispiel 1.1.33 iii).
Mit 4.1.20 ist dann auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar, also existiert $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ bijektiv. Da $\sigma : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}(n,m) \mapsto \frac{n}{m}$ surjektiv ist, ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar, denn $\sigma \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist surjektiv und 4.1.19 liefert die Behauptung.
Dieses Beispiel zeigt, dass 4.1.17 ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit falsch ist.

Satz 4.1.22 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist.
Dann existiert eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, und daher gilt mit $A_n := \{\tau(n)\}$, $n \in$

$\mathbb{N}$, dass $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach 4.1.17 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\{ \overset{\circ}{\tau_{(n)}} \right\} = \overset{\circ}{A}_N \neq \emptyset$ im Widerspruch zu 4.1.8 i). □

Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Mit der eingeschränkten Metrik $d_M : M \times M \mapsto [0, \infty), d_M(x, y) := d_X(x, y)$, ist (M, d_M) wieder ein metrischer Raum. Es gilt dann

Satz 4.1.23 *Ist (X, d_X) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so folgt*

i) *$A \subset M$ ist offen in (M, d_M) genau dann, wenn es ein $\tilde{A} \subset X, \tilde{A}$ offen in (X, d_X) gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$.*

ii) *$A \subset M$ ist abgeschlossen in (M, d_M) genau dann, wenn es ein $\tilde{A} \subset X, \tilde{A}$ abgeschlossen in (X, d_X) gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$*

iii) *Ist (M, d_M) vollständig, so ist M abgeschlossen in (X, d_X).*
Ist (X, d_X) vollständig und M abgeschlossen in (X, d), so ist (M, d_M) vollständig.

Beweis.

i) Es sei $A \subset M$ in M offen.
Wähle zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit

$$U^M_{\varepsilon_x}(x) := \{y \in M : d_M(x, y) < \varepsilon_x\} \subset A$$

und setze

$$\tilde{A} := \bigcup_{x\in A} U^X_{\varepsilon_x} = \bigcup_{x\in A} \{y \in X : d_X(x, y) < \varepsilon_x\}.$$

Dann ist $\tilde{A}$ offen in X, und es gilt

$$\tilde{A} \cap M = \Big(\bigcup_{x\in A} U^X_{\varepsilon_x}(x) \Big) \cap M = \bigcup_{x\in A} \left(U^X_{\varepsilon_x} \cap M\right) = \bigcup_{x\in A} U^M_{\varepsilon_x}(x) = A.$$

Es sei $\tilde{A} \subset X$ offen in X. Dann existiert zu $x \in \tilde{A} \cap M$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U^X_\varepsilon(x) \subset \tilde{A}$.
Es folgt $U^M_\varepsilon(x) = U^X_\varepsilon(x) \cap M \subset \tilde{A} \cap M$.
Also ist $\tilde{A} \cap M$ offen in M.

ii) folgt aus i) durch Komplementbildung.

iii) Es sei (M, d_M) vollständig und $x_0 \in \overline{M}$.
Nach 4.1.10 existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $x_n \to x_0$. Insbesondere ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X und damit auch in M. Also besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert y in M. Da Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, gilt $x_0 = y \in M$.
Es sei M abgeschlossen in (X, d_X) und $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in M. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in X, sie besitzt daher einen Grenzwert x_0. Mit 4.1.10 folgt $x_0 \in M$, d.h. $x_n \to x_0$ in (M, d_M).

□

Satz 4.1.24 *Es sei $M \subset \mathbb{K}^n$ nicht leer und perfekt (d.h. M ist abgeschlossen, und jeder Punkt von M ist Häufungspunkt). Dann ist M überabzählbar.*

Beweis. Es sei $d_M : M \times M \to [0, \infty)$, $d_M(x,y) := |x-y|$. Nach 4.1.23 ist dann (M, d_M) vollständig. Ist $x_0 \in M$ beliebig, so gilt $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$ nach 4.1.9 i) und $\widehat{\{x_0\}}^{\circ} = \emptyset$, da x_0 kein isolierter Punkt von M ist, siehe 4.1.12 iii). Derselbe Beweis wie in 4.1.22 zeigt, dass M überabzählbar ist. □

Beispiel 4.1.25 (Cantormenge)
Es sei $C_0 := [0,1]$ und $C_{n+1} := \left\{\frac{1}{3}\,x : x \in C_n\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x : x \in C_n\right\}, n \in \mathbb{N}_0$.
Wir setzen $C := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Die Menge C heißt Cantormenge.
C_n besteht aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_k^{(n)}, k = 1, \ldots, 2^n$, der Länge $\frac{1}{3^n}$, also ist C_n abgeschlossen und somit ist auch $\bigcap\limits_n C_n = C$ abgeschlossen.
Weiter gilt $C_{n+1} \subset C_n$, wie man mit vollständiger Induktion zeigt (Fallunterscheidung nötig!). Überdies gilt $\sup I_k^{(n)} = \sup I_{2k}^{(n+1)}$ und $\inf I_k^{(n)} = \inf I_{2k-1}^{(n+1)}$, was zusammen mit $C_{n+1} \subset C_n, n \in \mathbb{N}_0$, schon $\inf I_k^{(n)} \in C$ und $\sup I_k^{(n)} \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ impliziert. (Mit anderen Worten: Die Intervallgrenzen der $I_k^{(n)}$ liegen in C.)
Insbesondere ist C nicht leer. Ist $x \in C$, so liegt x für alle $n \in \mathbb{N}$ in genau einem $I_{k_n}^{(n)}$.
Es sei $x_n := \sup I_{k_n}^{(n)} \in C$ und $y_n := \inf I_{k_n}^{(n)} \in C$. Dann gilt $y_n \leq x \leq x_n$

und $|x_n - y_n| = \frac{1}{3^n}$.
Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Dann gilt $x_n, y_n \in U_\varepsilon(x)$ und wegen $x_n \neq y_n$ auch

$$C \cap U_\varepsilon(x) \backslash \{x\} \supset \{x_n, y_n\} \backslash \{x\} \neq \emptyset.$$

Also ist x Häufungspunkt von C.
Insgesamt ist C perfekt und nach 4.1.24 überabzählbar.
Es gilt $\overset{\circ}{C} = \emptyset$: Sei dazu $x \in C$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

α) $x \in U_\varepsilon(x) \cap C \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$.

β) Es sei $\big(I_{k_n}^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Da $I_{k_n}^{(n)}$ die Länge $\frac{1}{3^n}$ hat, muss $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash C) \supset U_\varepsilon(x) \backslash C_n \neq \emptyset$ gelten.

Mit $\alpha), \beta)$ ist $x \in \partial C$, es gilt also $C = \partial C$ und damit $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

4.2 Stetige Abbildungen

Definition 4.2.1 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt

i) stetig in $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in X \\ d_X(x,x_0)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

ii) f heißt stetig (auf X), falls f in allen $x_0 \in X$ stetig, ist, d.h.

$$\underset{\substack{x_0\in X \\ \varepsilon>0}}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in X \\ d_X(x,x_0)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

iii) f heißt gleichmäßig stetig (auf X), falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) <$

δ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d_X(x_1, x_2) < \delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon.$$

Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so heißt f stetig (bzw. gleichmäßig stetig) auf A, falls $f|_A : A \to Y$ stetig (bzw. gleichmäßig) ist.

Bemerkung 4.2.2 Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $x_0 \in X$ und $A \subset X$. Weiter sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

i) f ist stetig auf $A \subset X$ genau dann, wenn

$$\underset{\substack{\varepsilon > 0 \\ x_0 \in A}}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x \in A \\ d_X(x, x_0) < \delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

ii) f ist gleichmäßig stetig auf $A \subset X$ genau dann, wenn

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x_1, x_2 \in A \\ d_X(x_1, x_2) < \delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon.$$

iii) Ist f gleichmäßig stetig auf A, so ist f stetig auf A; setze in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit $x_2 := x_0$ und $x_1 := x$. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet, dass δ nur von ε abhängt, in der Definition der Stetigkeit darf δ von ε und x_0 abhängen.

iv) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big),$$

denn es gilt ja $d_X(x, x_0) < \delta \Leftrightarrow x \in U_\delta(x_0)$ und $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.

v) f ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn es ein $\varrho > 0$ gibt, so dass $f|_{U_\varrho(x_0)}$ stetig in x_0 ist.
Es sei dazu $f|_{U_\varrho(x_0)}$ stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass für alle $x \in U_\varrho(x_0)$ mit $d_X(x, x_0) < \tilde{\delta}$ gilt, dass

$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.
Setze $\delta := \min\{\tilde{\delta}, \varrho\}$. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$, dass $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.
Also ist f stetig an x_0.
Mit anderen Worten: f ist stetig an x_0 genau dann, wenn es eine offene Menge $O \subset X$ gibt mit $x_0 \in O$, so dass $f|_O$ an x_0 stetig ist.

vi) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so sei wie üblich $d_E := d_{\|\cdot\|}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik (d.h. $d_E(x, y) = \|x-y\|,\ x, y \in E$). Damit ist die Stetigkeit von Abbildungen ausgehend von E oder von Abbildungen in E erklärt.

Beispiel 4.2.3 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

i) Ist $y_0 \in Y$, so ist die Abbildung $f : X \to Y,\ f(x) := y_0$, gleichmäßig stetig.
Sie hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := 1$ (oder irgendeine andere positive Zahl). Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$, dass $d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \varepsilon$.
Also ist insbesondere für $a_0 \in \mathbb{K}$ die Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, f(x) := a_0$, gleichmäßig stetig.

ii) $\mathrm{id}_X : X \to X,\ \mathrm{id}_X(x) = x$, ist gleichmäßig stetig. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$, dass

$$d_X\big(\mathrm{id}_X(x_1), \mathrm{id}_X(x_2)\big) = d_X(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon.$$

Also ist insbesondere $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ f(z) = z$, gleichmäßig stetig.

iii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so ist f gleichmäßig stetig auf I (und mit 4.2.2 v) ist dann f stetig auf $\mathbb{R}$).
Sie hierzu I ein beliebiges beschränktes Intervall und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2\cdot\sup\{|x|:x\in I\}+1}$ (> 0). Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$, dass

$$\begin{aligned} \big|f(x_1) - f(x_2)\big| &= |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \\ &< \delta\big(|x_1| + |x_2|\big) \leq \delta 2 \sup\big\{|x| : x \in I\big\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

f ist aber **nicht** gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
Nehmen wir dies nämlich an, so existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon = 1$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Es sei $x_1 := \frac{1}{\delta}$ und $x_2 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ Dann gilt $|x_1 - x_2| < \delta$, aber $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2}\big(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\big) > 1 = \varepsilon$, Widerspruch.

iv) Es sei M eine Teilmenge des metrischen Raumes (X, d). Die charakteristische Funktion

$$\chi_M : X \to \mathbb{R},\ \chi_M(x) := \begin{cases} 1 & : x \in M \\ 0 & : x \in X \backslash M \end{cases}$$

ist stetig an $x_0 \in X$ genau dann, wenn $x_0 \notin \partial M$.

Es sei $x_0 \notin \partial M$, also $x_0 \in X \backslash \partial M = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash M}} \cup \overset{\circ}{M}$.

Es sei zunächst $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{X \backslash M}} =: O$. Da $f|_O(x) = 0, x \in O$, ist $f|_O$ nach 4.2.3 i) stetig (insbesondere an x_0), also ist mit 4.2.2 v) f stetig an x_0. Analog zeigt man, dass χ_M stetig an $x_0 \in \overset{\circ}{M}$.
Es sei $x_0 \in \partial M$. Wir nehmen an, dass χ_M stetig an x_0 sei. Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| < \varepsilon = 1 \text{ für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Da $x_0 \in \partial M$, ist $U_\delta(x_0) \cap M \neq \emptyset$ und $U_\delta(x_0) \cap (X \backslash M) \neq \emptyset$.
Wenn $x_0 \in M$, so wähle $x \in U_\delta(x_0) \cap (X \backslash M)$. Dann gilt $\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$, und wenn $x_0 \in X \backslash M$, so wähle $x \in U_\delta(x_0) \cap M$, dann gilt $\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch.
Also kann χ_M nicht stetig an x_0 sein.
Ist speziell $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist

$$\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_I(x) := \begin{cases} 1 & : x \in I \\ 0 & : x \notin I \end{cases}$$

stetig an $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x_0 \notin \partial I$, d.h. x_0 ist keine Intervallgrenze.

Satz 4.2.4 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

i) Ist $x_0 \in X$, so ist f stetig in x_0 genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $x_n \to x_0$ schon $f(x_n) \to f(x_0)$ gilt.

ii) *f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_X(x_n, y_n) \to 0$ schon $d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) \to 0$ gilt.*

iii) *Ist f gleichmäßig stetig und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, so ist $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y.*

Beweis.

i) Es sei f stetig in x_0 und $x_n \to x_0$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$. Da $x_n \to x_0$, existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \delta$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta$ für alle $n \geq N$. Es folgt $d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Es gelte die angegebene Bedingung. Wir nehmen an, f sei nicht stetig an x_0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ein $x_n \in X$ existiert mit $d_X(x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$, aber $d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$ gilt. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0, aber $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, Widerspruch.
Also ist f stetig an x_0.

ii) Dies beweist man analog zu i).

iii) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und f sei gleichmäßig stetig. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert also ein $\delta > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$. Wir wählen zu $\tilde{\varepsilon} := \delta$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_m) < \tilde{\varepsilon} = \delta,\ n, m \geq N$. Mit $x := x_n,\ y := x_m$ folgt

$$d_Y\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

□

Satz 4.2.5 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist* $\operatorname{graph}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\}$ *in $X \times Y$ abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $(x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph}(f)}$. Dann existiert nach 4.1.10 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\big(x_n, f(x_n)\big) \to (x_0, y_0)$, d.h. $x_n \to x_0$ in X und $f(x_n) \to y_0$

in Y. Da f stetig an x_0, folgt mit 4.2.4, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Da Grenzwerte eindeutig sind, gilt $y_0 = f(x_0)$ und es folgt $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big) \in \operatorname{graph}(f)$. □

Bemerkung/Beispiel

i) Die Umkehrung von 4.2.5 gilt nicht, ein Beispiel ist
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}.$$
f hat abgeschlossenen Graphen, aber f ist unstetig an $x_0 = 0$.

ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x = 0 \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$
Nach 4.2.3 iv) ist f unstetig an $x_0 = 0$. Auch ist $\operatorname{graph}(f)$ nicht abgeschlossen.

Satz 4.2.6 *Es seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3)$ metrische Räume und $f_1 : X_1 \to X_2$ sowie $f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Ist f_1 stetig in $x_0 \in X_1$ und ist f_2 stetig in $f_1(x_0)$, so ist $f_2 \circ f_1$ stetig in x_0.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X_1 mit $x_n \to x_0$. Nach 4.2.4 i) folgt $f_1(x_n) \to f_1(x_0)$ und hieraus wieder mit 4.2.4 i): $f_2\big(f_1(x_n)\big) \to f_2\big(f_1(x_0)\big)$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ beliebig, folgt mit 4.2.4 i), dass $f_2 \circ f_1$ stetig an x_0 ist. □

Bemerkung 4.2.7 Ist in 4.2.6 zusätzlich f_1 gleichmäßig stetig auf X_1 und f_2 gleichmäßig stetig auf $f(X_1)$, so ist $f_2 \circ f_1$ gleichmäßig stetig auf X_1. Dies beweist man analog mit Hilfe von 4.2.4 ii) anstelle von 4.2.4 i).

Beispiel 4.2.8 Es sei $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$.

i) Sind $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ und ist $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ f(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$, ein Polynom, so ist f stetig. Es sei dazu $x_0 \in \mathbb{K}$ beliebig.
Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ ist mit $x_n \to x_0$, so folgt aus 2.1.9, dass $f(x_n) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu \to \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x_0^\nu = f(x_0)$ gilt.
Mit 4.2.4 ist f stetig.

ii) Sind $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$, ist $M := \Big\{z \in \mathbb{K} : \sum\limits_{\nu=0}^{k} b_\nu z^\nu \neq 0\Big\}$, und ist $f : M \to \mathbb{K},\ f(x) = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x^\nu}$ eine rationale Funktion, so ist $f : M \to \mathbb{K}$ stetig. Sei dazu $x_0 \in M$ beliebig. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $x_n \to x_0$, so folgt wieder mit 2.1.9, dass $f(x_n) = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x_n^\nu} \to \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x_n^\nu} = f(x_0)$ gilt. Mit 4.2.4 ist f stetig.
Insbesondere ist $f : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K},\ f(z) = \frac{1}{z}$, stetig!

iii) Mit 3.1.9 iii) ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

iv) Mit obigen Beispielen und 4.2.6 erhalten wir eine Fülle stetiger Abbildungen, z.B. sind

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) := \exp(x^2) \quad \text{oder}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) := \exp(-x),$$

stetig.

v) Die Abbildungen $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \mathrm{Re}\, z$, und $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \mathrm{Im}\, z$, sind stetig wegen 2.1.3 und 4.2.4.
(2.1.3: $z_n \to z_0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z_0$ und $\mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z_0$)

vi) Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist die Abbildung $\sqrt[k]{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt[k]{x}$, stetig. Es sei dazu $x_0 \in [0, \infty)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty)$ mit $x_n \to x_0$. Nehmen wir an, dass $\big(\sqrt[k]{x_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $\sqrt[k]{x_0}$ konvergiert, so folgt aus der Beschränktheit von $\big(\sqrt[k]{x_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (beachte: $\sqrt[k]{x_n} \leq 1 + x_n,\ n \in \mathbb{N}$) mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß die Existenz eines $y \in [0, \infty) \backslash \sqrt[k]{x_0}$ und einer Teilfolge $\big(\sqrt[k]{x_{n_\ell}}\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\sqrt[k]{x_{n_\ell}} \to y$ $(\ell \to \infty)$.
Wegen $y \neq \sqrt[k]{x_0}$ gilt auch $y^k \neq x_0$, also folgt mit i)

$$x_{n_\ell} = \big(\sqrt[k]{x_{n_\ell}}\big)^k \to y^k \neq x_0 \quad (\ell \to \infty),$$

im Widerspruch zu $x_n \to x_0$.

Satz 4.2.9 *Es sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann ist* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *stetig.*

Beweis. Es sei $(x_0, y_0) \in X \times X$ und $\big((x_n, y_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Dann gilt: $|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_0)| + |d(x_n, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq d(y_n, y_0) + d(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty)$. □

Satz 4.2.10 *Es sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum.*

i) $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ *ist stetig.*

ii) $+ : E \times E \to E, \ (x, y) \mapsto x + y$ *ist stetig.*

iii) $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E, \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *ist stetig.*

Beweis.

i) Es sei $x_0 \in E$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E mit $x_n \to x_0$. Dann gilt

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \leq \|x_n - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ii), iii) folgen aus 2.1.10 i) und ii).

□

Bemerkung 4.2.11 In 4.2.9 sowie 4.2.10 i) und ii) kann man auch gleichmäßige Stetigkeit nachweisen, hierzu muss man auf die $\varepsilon - \delta-$Definition oder auf 4.2.4 ii) zurückgreifen.
Ist $E \neq \{0\}$, so ist in 4.2.10 die Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ **nicht** gleichmäßig stetig.

Satz 4.2.12 *Die Abbildungen*

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\cdot \ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy \ \textit{und}$$

$$\div : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

sind stetig.

Beweis. Für die ersten beiden Abbildungen setze $E := \mathbb{K}$ in 4.2.9, die Stetigkeit der dritten Abbildung folgt aus 2.1.9 iii). $\square$

Satz 4.2.13 *Es seien (X, d) und $(Y_1, d_1), \ldots, (Y_m, d_m)$ metrische Räume und $f_\nu : X \to Y_\nu$ Abbildungen. Für $x_0 \in X$ sind äquivalent:*

i) $f_\nu : X \to Y_\nu$ *ist stetig in* x_0, $1 \leq \nu \leq m$.

ii) $f := (f_1, \ldots, f_m) : X \mapsto \prod\limits_{\nu=1}^{n} Y_\nu$, $f(x) := \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$ *ist stetig in* x_0.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Es sei $x_0 \in X$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x_0$ und sind alle f_ν an x_0 stetig $(1 \leq \nu \leq n)$, so gilt $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0), 1 \leq \nu \leq m$, also mit 2.1.12 ii) $f(x_n) \to f(x_0)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $x_n \to x_0$ und f an x_0 stetig. Dann gilt $f(x_n) \to f(x_0)$, also mit 2.1.12 ii) $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0), 1 \leq \nu \leq m$. $\square$

Bemerkung 4.2.14 Auch in 4.2.13 kann man "stetig in x_0" durch "gleichmäßig stetig" ersetzen.

Korollar 4.2.15 *Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum.*

i) *Ist (Y, d_Y) ein metrischer Raum und sind $f, g : X \to Y$ stetig in x_0, so ist auch $F : X \to [0, \infty)$, $F(x) := d_X\big(f(x), g(x)\big)$, stetig in x_0. Insbesondere ist für $z_0 \in X$ fest, der Abstand zu z_0, $d_{z_0} : X \to [0, \infty)$, $d_{z_0}(x) := d(x, z_0)$, stetig.*

ii) *Ist $(E, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum, so gilt:*

α) *Ist $f : X \to E$ stetig in x_0, so ist auch $F : X \to [0, \infty)$, $F(x) := \|f(x)\|$, stetig in x_0.*

β) *Sind $f, g : X \to E$ stetig in x_0, so ist auch $f + g : X \to E$, $x \mapsto f(x) + g(x)$, stetig in x_0.*

γ) *Sind $g : X \to \mathbb{K}$ und $f : X \to E$ stetig in x_0, so ist auch $g \cdot f : X \to E$, $x \mapsto g(x)f(x)$, stetig in x_0.*

iii) Sind $f : X \to \mathbb{K}$ und $g : X \to \mathbb{K}$ stetig in x_0, so sind auch folgende Abbildungen stetig in x_0:

$$|f| : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto |f(x)|$$
$$f + g : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$g \cdot f : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x)g(x)$$

und gilt zusätzlich noch $g(X) \subset \mathbb{K}^*$ (d.h. g hat keine Nullstelle), so ist auch

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

stetig in x_0.

Beweis.

i) Gemäß 4.2.13 ist $(f, g) : X \to Y \times Y$ stetig in x_0, und gemäß 4.2.9 ist $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$ stetig. Also ist mit 4.2.6 auch die Verkettung $F = d \circ (f, g)$ in x_0 stetig.

ii) α) Wegen 4.2.10 i) ist $\|\cdot\|$ stetig. Mit 4.2.6 folgt, dass dann $F = \|\cdot\| \circ f$ stetig in x_0 ist.

β) Gemäß 4.2.13 ist $(f, g) : X \to E \times E$ stetig in x_0, und gemäß 4.2.10 ii) ist $+ : E \times E \to E$ stetig. Also ist mit 4.2.6 auch die Verkettung $f + g = + \circ (f, g)$ stetig in x_0.

γ) und iii) beweist man analog unter Verwendung von 4.2.10 iii) bzw. 4.2.12 anstelle von 4.2.10 ii).

□

Bemerkung 4.2.16 In 4.2.15 i) sowie ii) α), β) kann man "stetig (in x_0)" durch "gleichmäßig stetig" ersetzen. Dies folgt aus 4.2.7, 4.2.11 und 4.2.14. Also, im Falle f, g gleichmäßig stetig, sind auch in 4.2.15 iii) die Abbildungen $|f| : X \to \mathbb{K}$ und $f + g : X \to \mathbb{K}$ gleichmäßig stetig.
Analoge Aussagen gelten nicht bei $g \cdot f$ und $\frac{f}{g}$.

Beispiele:

i) $X = \mathbb{R},\ g = f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Dann ist $g \cdot f(x) = x^2$, und $g \cdot f$ ist nicht gleichmäßig stetig nach 4.2.3 iii).

ii) $X = (0,\infty),\ g = \mathrm{id}_{(0,\infty)},\ f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 1.$
Dann ist $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$. $\frac{f}{g}$ ist ebenfalls nicht gleichmäßig stetig: Sei $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$.

Dann gilt $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0,$

aber $\left|\frac{f}{g}(x_n) - \frac{f}{g}(y_n)\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1 \not\to 0.$

Korollar 4.2.17 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $C(X,E) := \{f : X \to E : f \text{ stetig}\}$ ein Untervektorraum von E^X. Insbesondere ist $C(X) := C(X,\mathbb{K})$ ein Vektorraum.*

Beweis. Es seien $f, g \in C(X,E)$.
Mit 4.2.14 β) ist $f + g \in C(X,E)$.
Ist $f \in C(X,E), \lambda \in \mathbb{K}$, so ist mit $g(x) := \lambda$ nach 4.2.14 γ) auch $\lambda f = g \cdot f \in C(X,E)$. □

Korollar 4.2.18 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist*

$$CB(X,E) := \{f : X \to E : f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

ein Untervektorraum des normierten Raumes $B(X,E)$.
Insbesondere ist $CB(X) := CB(X,\mathbb{K})$ ein normierter Raum.

Beweis. Es gilt $CB(X,E) = C(X,E) \cap B(X,E)$.
Man beachte, dass der Schnitt von Untervektorräumen wieder ein Vektorraum ist. □

Ein wichtiges Kriterium für die Stetigkeit ist

Satz 4.2.19 *Es seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*
Dann sind äquivalent:

i) f ist stetig.

ii) $f^{-1}(O)$ *ist offen für alle* $O \subset Y$ *offen.*

iii) $f^{-1}(A)$ *ist abgeschlossen für alle* $A \subset Y$ *abgeschlossen.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Es sei $O \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(O)$ (d.h. $f(x_0) \in O$). Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset O$. Da f stetig in x_0, existiert $\delta > 0$ mit $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset O$, also $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(O)$.
ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $x_0 \in X$ beliebig. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist nach ii) $f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$ offen in X, damit existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$, also gilt $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) folgt aus $X \backslash f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \backslash M)$ für alle $M \subset Y$. □

Beispiel 4.2.20 Obigen Satz kann man dazu verwenden, um Offenheit bzw. Abgeschlossenheit von Teilmengen metrischer Räume nachzuweisen:

i) α) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ist offen.

β) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 1\}$ ist abgeschlossen.

Zu α): Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(z) = \operatorname{Im} z$.
Dann ist f nach 4.2.8 v) stetig, und mit obigem Satz ist

$$\big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\big\} = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) \in (0,\infty)\big\} = f^{-1}\big((0,\infty)\big)$$

offen als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung.

Zu β): Verwende $[1,\infty)$ anstelle von $(0,\infty)$.

ii) $\big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 > 0, \big|(x_1,x_2,x_3)\big| < 1\big\}$ ist offen. Es sei

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x_1,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x_2,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_3(x) = |x|.$$

Dann sind f_1, f_2, f_3 stetig, mit obigem Satz sind dann $O_1 = f_1^{-1}\big((0,\infty)\big), O_2 = f_2^{-1}\big((0,\infty)\big)$ und $O_3 = f_3^{-1}\big((-\infty,1)\big)$ offen, also ist auch der endliche

Schritt $O_1 \cap O_2 \cap O_3$ offen. Wegen

$$\begin{aligned}
& \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0 \text{ und } x_2 > 0 \text{ und } |x| < 1\big\} \\
= \;& \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\} \\
= \;& \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_1(x) \in (0,\infty)\big\} \cap \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_2(x) \in (0,\infty)\big\} \\
& \cap \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_3(x) \in (-\infty, 1)\big\} \\
= \;& O_1 \cap O_2 \cap O_3
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

Korollar 4.2.21 *Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv. Sind f und f^{-1} stetig, so gilt*

i) $f(O)$ ist offen genau dann, wenn O offen ist.

ii) $f(A)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

Beispiel 4.2.22 Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x_0 \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Ist $O \subset E$ offen, so sind $\lambda O := \{\lambda x : x \in O\}$ und $x_0 + O := \{x_0 + x : x \in O\}$ offen.
Analoges gilt für "abgeschlossen" anstelle von "offen".
Dies folgt aus obigem Korollar, da die Abbildungen $M_\lambda : E \to E,\ x \mapsto \lambda x$, und $T_{x_0} : E \to E,\ x \mapsto x + x_0$ stetig sowie bijektiv sind und ihre Inversen vom selben Typ, also auch stetig, sind.

Definition 4.2.23 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $\varphi : M \to X$ heißt Kontraktion, falls ein $\gamma < 1$ existiert, so dass

$$d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \leq \gamma d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$ gilt.

Bemerkung 4.2.24 Eine Kontraktion ist gleichmäßig stetig (wähle $\delta := \varepsilon$) und daher stetig.

Satz 4.2.25 *(Banachscher Fixpunktsatz)*
Es sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $\varphi : X \to X$ eine Kontraktion.
Dann existiert genau ein $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$. (Ein solches x^* heißt Fixpunkt von φ.)

Beweis. Es sei $\gamma < 1$ mit $d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \leq \gamma d(x, y),\ x, y \in X$.
Wir wählen $x_0 \in X$ und setzen rekursiv $x_n := \varphi(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Aus

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d\big(\varphi(x_k), \varphi(x_{k-1})\big) \\ &\leq \gamma d(x_k, x_{k-1}) \end{aligned}$$

erhalten wir per Induktion

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma^n d(x_1, x_0),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ist nun $m > n$, so folgt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \gamma^k d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^k = d(x_1, x_0) \cdot \frac{\gamma^n}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, welche aufgrund der Vollständigkeit von (X, d) gegen ein $x^* \in X$ konvergiert. Es folgt

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x^*),$$

da jede Kontraktion stetig ist. Damit existiert $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$.
Es sei nun $y \in X$ mit $\varphi(y) = y$. Dann gilt

$$d(x^*, y) = d\big(\varphi(x^*), \varphi(y)\big) < \gamma d(x^*, y),$$

also ist $d(x^*, y) = 0$ und somit $x^* = y$.
Insgesamt folgt, dass genau ein $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$ existiert. $\square$

Bemerkung 4.2.26 Es ergibt sich aus dem Beweis folgende Fehlerabschätzung:

$$d(x^*, x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ d \text{ stetig}}}{=} \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \le d(x_1, x_0)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}.$$

Satz 4.2.27 *Es sei U eine offene Teilmenge des vollständigen normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$, und es sei $\phi : U \to E$ eine Kontraktion. Ist $f : U \to E,\ f(x) := x + \phi(x)$, so gilt*

i) *f ist injektiv.*

ii) *$f(U)$ ist offen.*

iii) *$f^{-1} : f(U) \to U$ ist stetig.*

Beweis. Es sei $\gamma < 1$ mit $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \le \gamma\|x_1 - x_2\|,\ x_1, x_2 \in U$.

i) Sind $x_1, x_2 \in U$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so gilt

$$\|x_1 - x_2\| = \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \le \gamma\|x_1 - x_2\|$$

und damit $x_1 = x_2$.

ii) Es sei $x_0 \in U$ beliebig. Wir zeigen, dass $f(x_0)$ innerer Punkt von $f(U)$ ist, d.h. wir konstruieren $\varrho > 0$ mit $f(U) \supset B_\varrho\big(f(x_0)\big)$. Dazu sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset U$. Es sei $\varrho := (1-\gamma)r$. Ist $y \in B_\varrho\big(f(x_0)\big)$, so setzen wir $\varphi : B_r(0) \to E,\ \varphi(x) = y - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)$.
Es gilt für alle $\|x\| \le r$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)\| &= \|y - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)\| \\
&\le \|y - f(x_0)\| + \|f(x_0) - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)\| \\
&\le \varrho + \|\phi(x_0) - \phi(x + x_0)\| \\
&\le \varrho + \gamma\big\|x_0 - (x + x_0)\big\| \\
&\le (1-\gamma)r + \gamma r = r.
\end{aligned}$$

Also gilt $\varphi\big(B_r(0)\big) \subset B_r(0)$.
Weiter gilt für $x_1, x_2 \in B_r(0)$

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = \big\|\phi(x_2 + x_0) - \phi(x_1 + x_0)\big\| \le \gamma\|x_1 - x_2\|.$$

Also ist $\varphi : B_r(0) \to B_r(0)$ eine Kontraktion und nach dem Banachscher Fixpunktsatz existiert $z \in B_r(0)$ mit $\varphi(z) = z$. Dann ist $z + x_0 \in B_r(x_0) \subset U$, und es gilt

$$\begin{aligned} f(z+x_0) &= z + x_0 + \phi(z+x_0) = \varphi(z) + x_0 + \phi(z+x_0) \\ &= y - \big(x_0 + \phi(z+x_0)\big) + x_0 + \phi(z+x_0) = y. \end{aligned}$$

iii) Es sei $x_0 \in U$ beliebig. Im Beweis von ii) haben wir gezeigt: Für alle $r > 0$ (mit $B_r(x_0) \subset U$) existiert ein $\varrho > 0$ mit $f\big(B_r(x_0)\big) \supset B_\varrho\big(f(x_0)\big)$. Da f injektiv ist, ist dies äquivalent zu:
Für alle $r > 0$ existiert ein $\varrho > 0$ mit $f^{-1}\big(B_\varrho(f(x_0))\big) \subset B_r(x_0)$. Mit anderen Worten: f^{-1} ist stetig an $f(x_0)$.

□

Beispiel 4.2.28 i) Da $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig in 0 ist und $\exp(0) = 1$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\exp(\varepsilon) - 1 \le \frac{1}{2}$. Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ und $\phi : U \to \mathbb{C},\ \phi(z) = \exp(z) - z$. Sind $z, w \in U$, so gilt nach A. 5.1

$$\frac{|\phi(z) - \phi(w)|}{|z-w|} = \left| \frac{\exp(z) - \exp(w)}{z-w} - 1 \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{z-w} (z^\nu - w^\nu) \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} z^k w^{\nu-k-1} \right|$$

$$\le \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \varepsilon^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \varepsilon^\nu = \exp(\varepsilon) - 1 \le \frac{1}{2}.$$

Somit ist $\phi : U \to \mathbb{C}$ eine Kontraktion. Wegen $\exp(z) = z + \phi(z)$ folgt mit 4.2.27, dass $\exp(U)$ eine offene Menge mit $1 \in \exp(U)$ ist.

ii) Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (z.B. $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}^n, |\cdot|)$), und es sei $A : E \to E$ eine lineare Abbildung auf E, so dass ein $\gamma < 1$ existiert mit

$$\big\|A(x)\big\| \le \gamma \|x\|,\ x \in E.$$

Dann gilt $\big\|A(z) - A(w)\big\| = \big\|A(z-w)\big\| \leq \gamma\|z-w\|,\ z, w \in E$, also ist A eine Kontraktion.
Damit ist nach 4.2.25 $S := \mathrm{id} - A$ injektiv, $S(E)$ ist offen in E und $S^{-1} : S(E) \to E$ ist stetig. Da $S(E)$ ein Untervektorraum von E ist, ist $0 \in S(E)$, und es existiert (da $S(E)$ offen) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) = \big\{x \in E : \|x\| < \varepsilon\big\} \subset S(E)$.
Sei $y \in E \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\frac{\varepsilon}{2\|y\|} y \in U_\varepsilon(0) \subset S(E)$, und damit ist auch $y = \frac{2\|y\|}{\varepsilon}\big(\frac{\varepsilon}{2\|y\|}y\big) \in S(E)$ (da $S(E)$ Untervektorraum).
Es folgt: S ist auch surjektiv. Damit ist S ein Vektorraumisomorphismus.
Man beachte: Wir benutzten keine Dimensionsformel!

4.3 Zusammenhang und Konvexität

Definition 4.3.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

i) Sind $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen von X mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$, so heißt $\{U, V\}$ offene Zerlegung von X.

ii) (X, d) heißt zusammenhängend, falls für jede offene Zerlegung $\{U, V\}$ von X schon $X = U$ oder $X = V$ gilt. Mit anderen Worten: $\{X, \emptyset\}$ ist die einzige offene Zerlegung von X.

iii) $M \subset X$ heißt zusammenhängend, falls (M, d_M) (mit $d_M(x, y) = d(x, y)$) zusammenhängend ist.

Satz 4.3.2 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

i) X ist zusammenhängend.

ii) Ist $\emptyset \neq A \subset X$ offen und abgeschlossen, dann gilt $A = X$.

iii) $\emptyset$ und X sind die einzigen Teilmengen von X, die offen und abgeschlossen sind.

Ist $M \subset X$, so ist M genau dann zusammenhängend, wenn für alle $U, V \subset X$ offen in X mit $U \cap V \cap M = \emptyset$ und $M \subset U \cup V$ schon $M \subset U$ oder $M \subset V$ folgt.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei $A \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen. Setze $U := A, V := X \backslash A$. Dann gilt mit i) $X = U$ oder $X = V$. Wegen $A \neq \emptyset$ ist $V \neq X$, also gilt $X = U = A$.

ii) $\Rightarrow$ i): Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$. Wegen $U \cup V = X \neq \emptyset$ ist dann ohne Einschränkung $U \neq \emptyset$. Ansonsten vertausche U und V. Setze $A := U$. Dann ist $X \backslash A = V$ offen, also A abgeschlossen. Damit gilt $A = X$ nach ii), also $X = U$.

ii) $\Rightarrow$ iii) ist nur eine Umformulierung.

Der zweite Teil des Satzes ist eine Umformulierung der Definition unter Beachtung, dass mit 4.1.22 eine Menge $S \subset M$ genau dann offen in M ist, wenn ein $U \subset X$ offen in X existiert mit $S = U \cap M$. □

Beispiel 4.3.3 Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

i) $M := [-2, -1] \cup [1, 2]$ ist nicht zusammenhängend. Wähle $U := (-\infty, 0)$, $V := (0, \infty)$.

ii) $M := \mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend. Wähle $U := \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$, $V := \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$.

Satz 4.3.4 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $\{U, V\}$ eine offene Zerlegung von $A \cup B$. Dann ist $\{U \cap A, V \cap A\}$ offene Zerlegung von A, also gilt $A = U \cap A$ oder $A = V \cap A$.
Ohne Einschränkung sei $A = U \cap A$. Da auch $\{U \cap B, V \cap B\}$ eine offene Zerlegung von B ist und $U \cap B \supset U \cap A \cap B = A \cap B \neq \emptyset$, gilt $U \cap B = B$.
Insgesamt folgt $U \cap (A \cup B) = A \cup B$, also $U = A \cup B$. □

Satz 4.3.5 *Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.*

Beweis. 1. Es sei $I = X$ ein Intervall. Angenommen, es existiert eine offene Zerlegung $\{U, V\}$ von I mit $U \neq \emptyset \neq V$. Wähle $u \in U$ und $v \in V$, ohne Einschränkung sei $u < v$, sonst vertausche U und V. Da I ein Intervall ist, gilt $[u, v] \subset I$.
Es sei $S := U \cap [u, v]$. Da $U = I \backslash V$ abgeschlossen in I, ist S abgeschlossen in $[u, v]$, also auch in $\mathbb{R}$.
Da S auch beschränkt ist, gilt mit A 13.1, dass $s := \sup S \in S$, s ist also das größte Element von $U \cap [u, v]$, damit ist $s < v$ wegen $v \notin U$ und $(s, v] \subset V \cap [u, v]$. Auf der anderen Seite existiert aufgrund der Offenheit von U ein $v - s > \varepsilon > 0$, so dass $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U$. Damit ist $s + \frac{\varepsilon}{2} \in U \cap V$, Widerspruch. Also ist I zusammenhängend.
2. Es sei X kein Intervall. Dann existieren $u, v \in X$ und $s \in \mathbb{R} \backslash X$ mit $s \in [u, v]$.
Setze $U := X \cap (-\infty, s)$, $V := S \cap (s, \infty)$, sind offen, $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$, aber $U \neq \emptyset \neq V$. Also ist X nicht zusammenhängend. □

Satz 4.3.6 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M)$ zusammenhängend.*
Mit anderen Worten: Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen sind zusammenhängend.

Beweis. $f|_M : (M, d_M) \to \big(f(M), d_{f(M)}\big)$ ist stetig. Ist nun $\emptyset \neq A \subset f(M)$ offen und abgeschlossen, so ist $f|_M^{-1}(A) \subset M$ offen, abgeschlossen und nicht leer, also gilt mit 4.3.2, dass $(f|_M)^{-1}(A) = M$, also $f(M) = f|_M(M) = f|_M\big(f|_M^{-1}(A)\big) \subset A$. Mit 4.3.2 folgt die Behauptung. □

Korollar 4.3.7 *(Zwischenwertsatz)*
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(M)$ ein Intervall, d.h. für alle $a, b \in M$ mit $f(a) < y < f(b)$ existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

Beweis. 4.3.5 und 4.3.6. □

Korollar 4.3.8 *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. 4.3.7 und 4.3.5. □

Definition 4.3.9 Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt f

i) monoton (streng monoton) wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

ii) monoton (streng monoton) fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

iii) monoton (streng monoton), falls f monoton (streng monoton) wachsend oder fallend ist.

Bemerkung 4.3.10 i) Streng monotone Funktionen sind injektiv, und die Inverse ist wieder streng monoton vom selben Typ.

ii) Genau dann ist f monoton (streng monoton) wachsend, wenn $-f$ monoton (streng monoton) fallend ist.

Satz 4.3.11 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend) und stetig. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall, und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f streng monoton wachsend. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist.
Sei dazu $f(x_0) \in J$ beliebig. Nehmen wir an, dass f^{-1} an $f(x_0)$ unstetig ist, so existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I und $\varepsilon > 0$ mit $f(x_n) \to f(x_0)$ aber $|x_n - x_0| = \left|f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x_0))\right| \geq \varepsilon$. Ohne Einschränkung sei $N := \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_0\}$ unendlich. Da I ein Intervall ist, gilt $[x_1, x_0] \subset I$, und daher ist $y := \sup\limits_{n\in N} x_n \in I$. Es folgt $y \leq x_0 - \varepsilon$ und damit liefert die strenge Monotonie $f(x_0) > f(y) \geq f(x_n)$ für alle $n \in N$. Somit ergibt sich $f(x_0) > \sup\limits_{n\in N} f(x_n) \geq \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in N}} f(x_n) = f(x_0)$, Widerspruch. □

Definition 4.3.12 Eine Teilmenge A eines Vektorraumes E heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass auch $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

Bemerkung 4.3.13 i) Setzt man für $x_1, x_2 \in E$

$$[x_1, x_2] := \big\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \lambda \in [0,1]\big\},$$

so ist A konvex genau dann, wenn $[x_1, x_2] \subset A$ für alle $x_1, x_2 \in A$.

ii) Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie ein Intervall ist.

Satz 4.3.14 *Eine konvexe Teilmenge eines normierten Raumes ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen an, A sei nicht zusammenhängend. Dann existiert eine offene Zerlegung $\{U, V\}$ von A mit $U \neq \emptyset \neq V$. Es seien $x_1 \in U, x_2 \in V$ und

$$f : [0,1] \to A,\ x \mapsto \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Dann ist f stetig, und daher ist $\big\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\big\}$ eine offene Zerlegung von $[0,1]$. Wegen $0 \in f^{-1}(V)$ und $1 \in f^{-1}(U)$ gilt $f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V)$ im Widerspruch zur Tatsache, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist. □

Beispiel/Bemerkung 4.3.15 i) Es sei E ein normierter Raum. Dann ist E und seine Untervektorräume konvex. Weiter sind für alle $r > 0$ und $x_0 \in E$ die Kugeln $B_r(x_0)$ und $U_r(x_0)$ konvex.
Sei dazu $x, y \in B_r(x_0)$, d.h. $\|x - x_0\|, \|y - x_0\| \leq r$. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$:

$$\big\|(\lambda x + (1-\lambda)y) - x_0\big\| = \big\|\lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - x_0)\big\|$$
$$\leq \lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)\|y - y_0\| \leq r,$$

also ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_r(x_0)$.
Im Falle $U_r(x_0)$ verfährt man analog.

ii) Die Menge $\mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ ist nicht konvex, aber zusammenhängend im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $n \geq 2$. Wir zeigen dies am Beispiel $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Dann seien

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \qquad A_2 := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$$

$$A_3 := \{z : \operatorname{Im} z < 0\}, \qquad A_4 := \{z : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Dann sind alle A_ν konvex, $1 \leq \nu \leq 4$.
Hierzu seien $z = x + iy,\ w = u + iv \in A_1$, d.h. $y, v > 0$. Ist $\lambda \in [0,1]$, so gilt $\lambda y + (1-\lambda)v > 0$, also $\operatorname{Im}(\lambda z + (1-\lambda)w) > 0$.
Analog zeigt man die Konvexität der anderen Mengen. Insbesondere sind die $A_\nu, 1 \leq \nu \leq 4$, zusammenhängend. Wegen $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ist mit 4.3.4 auch $A_1 \cup A_2$ zusammenhängend.
Wegen $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \neq \emptyset$ ist wieder mit 4.3.4 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ zusammenhängend. Wegen $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 \neq \emptyset$ ist schließlich auch

$$\mathbb{C}^* = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \text{ zusammenhängend.}$$

iii) Aus dem Beweis von Satz 4.2.14 ersieht man, dass eine Menge A in einem metrischen Raum X zusammenhängend ist, falls folgendes gilt: Für je zwei Punkte $x, y \in A$ gibt es eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. (Man sagt in diesem Fall auch: A ist bogenzusammenhängend). Mit diesem Kriterium kann man auch die Menge $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ als zusammenhängend nachweisen.

Definition 4.3.16 Eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer konvexen Menge A heißt

i) konvex, falls $f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

ii) konkav, falls $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

Bemerkung 4.3.17 i) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
Denn sind $y_1 > y_2$ und $\mu \in [0,1]$, so gilt mit $x_1 := y_2$ und $x_2 :=$

$y_1, \lambda := 1 - \mu$:

$$f(\mu y_1 + (1-\mu)y_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq$$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \mu f(y_1) + (1-\mu) f(y_2).$$

Eine analoge Bemerkung gilt für konkave Funktionen.

ii) f ist konvex genau dann, wenn $-f$ konkav ist.

Satz 4.3.18 *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so ist f genau dann konvex, wenn f^{-1} konkav ist.*

Beweis. Es gilt mit $f(x_\nu) = y_\nu,\ \nu = 1, 2$, dass

$$\begin{aligned} & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ \Leftrightarrow\quad & f\big(\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2)\big) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.3.19 i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, ist konvex. Es seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \\ & = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2 - \lambda^2 x_1^2 - 2\lambda(1-\lambda) x_1 x_2 - (1-\lambda)^2 x_2^2 \\ & = \lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Mit i) und 4.3.18 ist $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$, konkav.

iii) Ist E ein reeller Vektorraum (z.B. $E = \mathbb{R}^n$) und ist $f : E \to \mathbb{R}$ linear, so ist f konvex und konkav, da $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Kapitel 5

Elementare Funktionen II

5.1 Der Logarithmus

Satz/Definition 5.1.1 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) Logarithmus. log ist stetig.

Beweis. Wir haben in 3.1.6 und 3.1.9 gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend und stetig ist. Also ist mit 4.3.11 $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall und $\log : \exp(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt. Dazu sei $y_0 \in (0, \infty)$ beliebig. Wegen $\exp(n) \to +\infty\,(n \to \infty)$ und $\exp(-n) \to 0\,(n \to \infty)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y_0 \in \big[\exp(-n), \exp(n)\big]$. Da $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall ist, gilt $y_0 \in \exp(\mathbb{R})$. $\square$

Bemerkung 5.1.2 Für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt also $y = \log x \Leftrightarrow e^y = \exp(y) = x$.

Satz 5.1.3 *Es seien $x, x_1, x_2 > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

i) $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$,

ii) $\log(x^n) = n \log x$, *also ist insbesondere* $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$.

Beweis.

i) Nach 3.1.4 gilt

$$\begin{aligned}\exp(\log x_1 + \log x_2) &= \exp(\log x_1)\exp(\log x_2) = x_1 x_2 \\ &= \exp\big(\log(x_1 x_2)\big),\end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned}\log(x_1) + \log(x_2) &= \log\big(\exp(\log x_1 + \log x_2)\big) \\ &= \log\exp\log(x_1 x_2) = \log x_1 x_2.\end{aligned}$$

ii) Nach 3.1.4 und 3.1.6 gilt

$$x^n = \exp\big(\log(x)\big)^n = \exp(n\log x),$$

also folgt

$$\log x^n = \log\exp(n\log x) = n\log x.$$

□

5.2 Allgemeine Potenzen

Definition 5.2.1 Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned}&a^z := \exp(z\log a), \\ &0^z = 0,\ z \neq 0,\ \text{und} \\ &0^0 = 1.\end{aligned}$$

Man beachte, dass dies in Konsistenz mit früheren Definitionen steht!

Satz 5.2.2 *(allgemeine Potenzgesetze)*
Es seien $a, a_1, a_2 > 0$ und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

i) $a^{z_1}a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$ *und im Falle* $z_1 \in \mathbb{R}$ *auch* $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 z_2}$.

ii) $a_1^z a_2^z = (a_1 a_2)^z$.

Beweis. Wir verwenden 3.1.4 und 5.1.3

i)
$$\begin{aligned} a^{z_1}a^{z_2} &= \exp(z_1 \log a) \cdot \exp(z_2 \log a) \\ &= \exp\big((z_1 + z_2)\log a\big) = a^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^{z_1})^{z_2} &= \exp\big(z_2 \log(a^{z_1})\big) \\ &= \exp\big(z_2 \log(\exp(z_1 \log a))\big) \\ &= \exp(z_2 z_1 \log a) = a^{z_1 z_2} \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} a_1^z a_2^z &= \exp(z \log a_1) \cdot \exp(z \log a_2) \\ &= \exp\big(z(\log a_1 + \log a_2)\big) \\ &= \exp(z \log a_1 a_2) = (a_1 a_2)^z. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.2.3 *Ist $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.*

Beweis. $\big(\sqrt[k]{a}\big)^k = a = \big(a^{\frac{1}{k}}\big)^k$, und da die Gleichung $x^k = a$ nur eine positive Lösung hat, muss $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$ gelten. □

Satz 5.2.4 *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

Beweis. Ist $\alpha = 1$, so ist die vorgelegte Reihe gerade die harmonische und deren Divergenz folgt zum Beispiel mit dem Cauchyschen Verdichtungssatz.
Ist $\alpha < 1$, so folgt $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ und die Divergenz folgt aus dem Fall $\alpha = 1$ und dem Majorantenkriterium.
Es sei also $\alpha > 1$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \varepsilon := \alpha - 1$.
Dann gilt
$$n^\alpha = n^{1+\varepsilon} \geq n^{1+\frac{1}{k}} = n \cdot n^{\frac{1}{k}} = n \cdot \sqrt[k]{n},$$
also $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n\sqrt[k]{n}}$. Die Konvergenz folgt dann aus dem Majorantenkriterium und 2.2.20. □

5.3 Anwendung: Höldersche Ungleichung

Satz 5.3.1 $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist konvex und* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist konkav.*

Beweis. Es sei $0 \leq \lambda \leq 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung sei $x_1 > x_2$, ansonsten vertausche x_1 und x_2 und verwende $(1 - \lambda)$ anstelle von λ. Für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\big(\lambda(x_1 - x_2)\big)^\nu \leq \lambda(x_1 - x_2)^\nu.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&\exp\big(\lambda(x_1 - x_2)\big) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\big(\lambda(x_1 - x_2)\big)^\nu \\
&\leq 1 + \lambda \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(x_1 - x_2)^\nu = (1 - \lambda) + \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(x_1 - x_2)^\nu \\
&= \lambda \exp(x_1 - x_2) + (1 - \lambda).
\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $\exp(x_2)$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\exp(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \exp(\lambda(x_1 - x_2) + x_2) \\
&= \exp\big(\lambda(x_1 - x_2)\big) \cdot \exp(x_2) \leq \lambda \exp(x_1 - x_2) \exp(x_2) \\
&+(1 - \lambda) \exp(x_2) = \lambda \exp(x_1) + (1 - \lambda) \exp(x_2).
\end{aligned}$$

Also ist exp konvex. Satz 4.3.18 liefert, dass $\log = \exp^{-1}$ konkav ist. □

Lemma 5.3.2 *Ist* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine konkave Funktion auf einem Intervall* I, *so gilt für alle* $x_1, \ldots, x_n \in I$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *mit* $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$, *dass*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \leq f\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\Big).$$

Beweis. (durch Induktion).
$n = 1$ ist trivial.
$n \mapsto n + 1$. Sind $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ mit $\sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu = 1$

gegeben, so sei ohne Einschränkung $0 < \lambda_{n+1} < 1$. Setze $\lambda := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \in (0,1)$. Dann gilt $\lambda_{n+1} = (1-\lambda)$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu f(x_\nu) &= \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda} f(x_\nu) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \\
&\leq \lambda f\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda}\, x_\nu\Big) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \\
&\leq f\Big(\lambda \cdot \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda}\, x_\mu\Big) + (1-\lambda) x_{n+1}\Big) \\
&= f\Big(\sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu x_\nu\Big).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.3.3 i) Analog zeigt man: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex auf einem Intervall I, so gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$, dass

$$f\big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\big) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu).$$

ii) Man kann in 5.3.2 und 5.3.3 i) natürlich das Intervall durch eine beliebige konvexe Menge ersetzen.

Korollar 5.3.4 *(Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und dem gewichteten geometrischen Mittel).*
Sind $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$, so gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{\lambda_\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu,$$

insbesondere gilt $\sqrt[n]{\prod\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

Beweis. Ohne Einschränkung seien $x_\nu, \lambda_\nu > 0$, $1 \leq \nu \leq n$, da

$$0^{\lambda_\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda_\nu = 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda_\nu > 0. \end{cases}$$

Aus der Konkavität von log (siehe 5.3.1) folgt mit 5.3.2, dass $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \log x_\nu \leq \log\big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\big)$. Die Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten dieser Ungleichung ergibt (exp ist streng monoton wachsend!)

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{\lambda_\nu} &= \prod_{\nu=1}^{n} \exp(\lambda_\nu \log x_\nu) = \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \log x_\nu\Big) \\ &\leq \exp\Big(\log\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\Big)\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu. \end{aligned}$$

□

Definition 5.3.5 Die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to [0,\infty),\ \|z\|_p := \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1,\infty),$$

heißt die p-Norm auf $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung 5.3.6 i) Für $p = \infty$ haben wir

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to [0,\infty),\ \|z\|_\infty := \sup_{1\leq\nu\leq n} |z_\nu|,$$

gesetzt, und wir hatten schon gezeigt, dass $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen sind.

ii) Wir haben noch nicht gezeigt, dass $\|\cdot\|_p$ für $p \in (1,\infty)$ eine Norm ist. Offensichtlich gilt

α) $\|z\|_p = 0 \Leftrightarrow z = 0$ und

β) $\|\lambda z\|_p = |\lambda|\|z\|_p$

für $z \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Das Problem ist die Dreiecksungleichung.

Satz 5.3.7 *(Höldersche Ungleichung) Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\begin{aligned} | < z, w > | &= \Big|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu\Big| \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \\ &\le \|z\|_p \|z\|_q \end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$.

Beweis. Ohne Einschränkung seien $z, w \neq 0$. Aus 5.3.4 folgt $\big($mit $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = \frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p}$, $x_2 = \frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}\big)$, dass

$$\frac{|z_\nu w_\nu|}{\|z\|_p \|w\|_q} = \Big(\frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}\Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}\frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}$$

für alle $1 \le \nu \le n$. Aufsummieren ergibt

$$\frac{1}{\|z\|_p \|w_q\|} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \le \frac{1}{p}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^q}{\|w\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{also}$$

$$| < z, w > | \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \le \|z\|_p \|w\|_q.$$

□

Korollar 5.3.8 *(Minkowskische Ungleichung)*
Es sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt

$$\|z + w\|_p \le \|z\|_p + \|w\|_p$$

für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$.

Beweis. Es sei $s_\nu := |z_\nu + w_\nu|^{p-1}, s := (s_1, \ldots, s_n)$. Ist $q := \frac{p}{p-1}$, so gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also liefert Hölder

$$\|z + w\|_p^p = \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^p$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu| s_\nu \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu| s_\nu + |w_\nu| s_\nu$$

$$\le \|z\|_p \|s\|_q + \|w\|_p \|s\|_q.$$

Wegen

$$\|s\|_q = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \big(|z_\nu + w_\nu|^{p-1}\big)^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \Big(\Big(\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{p-1} = \|z+w\|_p^{p-1}$$

folgt $\|z+w\|_p^p \leq \big(\|z\|_p + \|w\|_p\big)\|z+w\|_p^{p-1}$, also gilt auch $\|z+w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$. □

Korollar 5.3.9 *Für alle $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.*

Beweis. $p = 1, \infty$ sind in den Übungen behandelt worden. Mit 5.3.6 ii) und 5.3.8 folgt die Behauptung für $p \in (1,\infty)$. □

5.4 Mehr zu exp, die Zahl π und Polarkoordinaten

Satz 5.4.1 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig, und es gilt* $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Beweis. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion ist schon in 3.1.9 iii) gezeigt worden. In Beispiel 4.2.28 haben wir eine offene Menge U mit $0 \in U$ konstruiert, für die $\exp(U) = \{\exp(u) : u \in U\}$ offen ist. Nach 4.2.22 ist dann $w \cdot \exp(U) = \{w \cdot \exp(u) : u \in U\}$ offen für alle $w \in \mathbb{C}^*$.
Aus $\exp(z) \cdot \exp(U) = \{\exp(z+u) : u \in U\} \subset \exp(\mathbb{C})$ folgt

$$\exp(\mathbb{C}) = \bigcup_{z\in\mathbb{C}} \exp(z) \cdot \{1\} \subset \bigcup_{z\in\mathbb{C}} \exp(z) \cdot \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C})$$

und damit ist $\exp(\mathbb{C})$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen in $\mathbb{C}$ und damit offen in $\mathbb{C}^*$.
Ist $A := \mathbb{C}^* \setminus \exp(\mathbb{C})$ und ist $w \in A$, so gilt

$$w \cdot \exp(\mathbb{C}) \cap \exp(\mathbb{C}) = \emptyset,$$

da ansonsten $w \exp(z_1) = \exp(z_2)$ mit $z_i \in \mathbb{C}$ gilt, was aber $w = \exp(z_2 - z_1) \in \exp(\mathbb{C})$ und damit $w \notin A$ nach sich zöge.
Also gilt $w \cdot \exp(\mathbb{C}) \subset A$ für alle $w \in A$. Es folgt

$$A = \bigcup_{w \in A} w \cdot \{1\} \subset \bigcup_{w \in A} w \cdot \exp(U) \subset A,$$

also ist auch A offen.
$\{\exp(\mathbb{C}), A\}$ ist somit eine offene Zerlegung von $\mathbb{C}^*$. Da $\mathbb{C}^*$ nach Beispiel 4.3.15 iii) zusammenhängend ist, muss also $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ gelten. $\square$

Korollar 5.4.2 $e^{i\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{iz}$, *ist stetig. Weiter sind* $\cos, \sin, \cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *stetig.*

Korollar 5.4.3 $e^{i\cdot} = \exp(i\cdot) : \mathbb{R} \to S^1 := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\},\ x \mapsto e^{ix}$, *ist surjektiv (und stetig).*

Beweis. Es sei $|w| = 1$. Dann existiert ein $z = a + ix \in \mathbb{C}$, wobei $a, x \in \mathbb{R}$, mit $e^z = w$. Wegen $e^a = |e^z| = |w| = 1$ gilt $a = 0$, also $e^{ix} = w$. $\square$

Satz/Definition 5.4.4 Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl π mit

$$e^{i\pi} = -1.$$

Beweis. Es sei $M = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = -1\}$. Da $e^{i\cdot}$ stetig ist, folgt, dass $M = (e^{i\cdot})^{-1}\big(\{-1\}\big)$ abgeschlossen ist. Daher ist $M \cap [0, \infty)$ abgeschlossen, nach unten beschränkt und wegen $M = -M$ auch nicht leer.
Es sei $\pi := \inf M \cap [0, \infty)$. Dann gilt $\pi \in M$ nach A 13.1. Aus $e^{i0} = 1 \neq -1$ folgt $\pi > 0$. $\square$

Satz 5.4.5 *Es gilt* $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z} = \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis.

1. Aus $e^{i\pi} = -1$ folgt $e^{i2\pi} = e^{i\pi} \cdot e^{i\pi} = 1$.
   Es folgt $e^{k2\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

2. Es sei nun $e^z = 1$. Dann gilt (siehe oben) $z = ix$ mit einem $x \in \mathbb{R}$.
   Ohne Einschränkung sei $x \geq 0$. Sei $k = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : x - 2\pi n \geq 0\}$.
   Dann ist $y := x - 2\pi k \in [0, 2\pi)$, und es gilt $e^{iy} = 1$ nach 1.
   Wir nehmen an, dass $y > 0$ ist, so folgt $0 < \frac{y}{2} < \pi$. Aus $(e^{i\frac{y}{2}})^2 = e^{iy} = 1$ folgt $e^{i\frac{y}{2}} \in \{1, -1\}$. Die Minimalität von π erzwingt $e^{i\frac{y}{2}} = 1$.
   Mit demselben Argument folgt induktiv $e^{i\frac{y}{2^n}} = 1,\ n \in \mathbb{N}$, und damit $e^{i\frac{m}{2^n}\cdot y} = \left(e^{i\frac{y}{2^n}}\right)^m = 1^m = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Ist $m_n = \inf\left\{m \in \mathbb{N} : \frac{my}{2^n} \geq \pi\right\}$, so gilt wegen $\frac{(m_n-1)y}{2^n} < \pi \leq \frac{m_n y}{2^n}$, dass $\frac{m_n y}{2^n} \to \pi\,(n \to \infty)$.
   Es folgt $1 = e^{\frac{im_n y}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{i\pi} = -1$, Widerspruch.
   Also ist $y = 0$ und damit $z \in \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

□

Korollar 5.4.6 *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z), k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z)\exp(2\pi ik) = \exp(z)$ für $k \in \mathbb{Z}$. □

Satz 5.4.7 *Für* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp : \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\right\} \to \mathbb{C}^*$ *bijektiv.*

Beweis. Es sei $M := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\right\}$.
Ist $w \in \mathbb{C}^*$, so wähle man ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z_1) = w$ und dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z := z_1 - 2\pi ik \in M$. Es folgt $\exp(z) = \exp(z_1) = w$. Also ist $\exp(M) = \mathbb{C}^*$.
Seien $z_1, z_2 \in M$ mit $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, so gilt $\exp(z_1 - z_2) = 1$, also $z_1 = z_2 + 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Sei ohne Einschränkung $k \geq 0$.
Dann gilt $x_0 + 2\pi > \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 + 2\pi k \geq x_0 + 2\pi k$, also muss $k = 0$ und damit $z_1 = z_2$ gelten.
Also ist $\exp : M \to \mathbb{C}^*$ auch injektiv. □

Korollar 5.4.8 *(Polarkoordinaten)*
Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$*. Dann ist* $P : (0,\infty) \times [x_0, x_0 + 2\pi) \to \mathbb{C}^*, (r,\varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ *bijektiv.*

Beweis. Es sei $f : (0,\infty) \times [x_0, x_0 + 2\pi) \to M, f(r,\varphi) := \log r + i\varphi$, wobei wieder $M := \big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\big\}$.
Dann ist f bijektiv (beachte: $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv), und wegen $P = \exp \circ f$ ist auch P bijektiv. $\square$

Korollar 5.4.9 *Es sei* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Die Abbildung* $e^{i\cdot} : [x_0, x_0 + 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *ist bijektiv.*

Satz 5.4.10 *Es sei* $z \in \mathbb{C}$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}&\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \Big\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\Big\}\\ &\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z} = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}2i \sin z &= e^{-iz}(e^{2iz} - 1),\\ 2\cos z &= e^{i(\pi - z)}\big(e^{2i(z - \frac{1}{2}\pi)} - 1\big).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}&\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz \in 2\pi i\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}&\cos z = 0 \Leftrightarrow 2i\Big(z - \frac{1}{2}\pi\Big) \in 2\pi i Z\\ &\Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 5.4.11 $\sin > 0$ *auf* $(0,\pi)$ *und damit* $\sin\frac{\pi}{2} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ *und* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Beweis. Nach 5.4.10 gilt dass $\sin x \neq 0$ auf für alle $x \in (0, \pi)$. Also ist nach dem Zwischenwertsatz entweder $\sin > 0$ auf $(0, \pi)$ oder $\sin < 0$ auf $(0, \pi)$. In Beispiel 4.2.28 wurde gezeigt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\sup_{|z|,|w| \leq \varepsilon} \Big| \frac{\exp(z) - \exp(w)}{z - w} - 1 \Big| \leq \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $x = \min\left\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$, so gilt mit $z = ix, w = 0$

$$1 - \frac{\sin x}{x} \leq \Big| \mathrm{Re}\Big(\frac{\exp(ix) - 1}{ix} - 1 \Big) \Big| \leq \Big| \frac{\exp(ix) - 1}{ix} - 1 \Big| \leq \frac{1}{2},$$

und somit $\sin x > \frac{1}{2} x > 0$. Es folgt $\sin > 0$ in $(0, \pi)$. Wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ gilt $\left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1$ und somit $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
Es folgt $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.
Wegen $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ muss also $e^{i\frac{\pi}{4}} \in \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$ gelten. Da $\sin \frac{\pi}{4} > 0$, folgt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. $\square$

Bemerkung 5.4.12 Aus $e^{kz} = (e^z)^k$ erhalten wir folgende Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
e^{ix}	1	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{i-1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{i+1}{\sqrt{2}}$	$-i$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	1

Verwendet man die Eulersche Formel, so ergibt sich

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\cos x$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Satz 5.4.13 *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^{z+i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^z, \quad e^{z+i\frac{\pi}{2}} = i e^z,$$
$$e^{z+i\pi} = -e^z \qquad \textit{und} \qquad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Insbesondere gilt also, dass $\exp(z + 2\pi i k) = \exp(z),\ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$

Beweis. Dies folgt aus $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ und $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i2\pi} = 1$.
Der letzte Teil wurde schon in 5.4.5 gezeigt. □

Korollar 5.4.14 *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*
$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = -\cos z$

$\cos(z + 2\pi) = \cos z$,

$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$,

$\sin\left(z + 2\pi\right) = \sin z$,

insbesondere gilt $\cos(z+2\pi k) = \cos z$ *und* $\sin(z+2\pi k) = \sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Identitäten folgen aus obigem Satz, z.B.

$$\begin{aligned} cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz+i\frac{\pi}{2}} + e^{-iz-i\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\ &= -\sin z. \end{aligned}$$

□

Definition 5.4.15 Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt ω-periodisch, falls $f(x+\omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Korollar 5.4.16 cos *und* sin *sind* 2π*-periodisch, aber nicht* ω*-periodisch für* $0 < |w| < 2\pi$.

Beweis. Die 2π-Periodizität folgt aus obigem Korollar.
Es habe sin die Periode $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$. Es sei ohne Einschränkung $w > 0$ (Ist f ω-periodisch, so auch $-\omega$-periodisch: $f(x) = f\big((x-w)+w\big) = f(x-w)$.)

Für $x \in [0, 2\pi]$ gilt $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, also gilt $\omega \in \{\pi, 2\pi\}$. Wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq -1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$ muss $\omega = 2\pi$ gelten.
Die Behauptung für cos folgt z. B. aus $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. $\square$

Bemerkung 5.4.17 Die Identitäten aus 5.4.14 liefern sofort wegen $\cosh z = \cos(iz)$ und $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ ähnliche Identitäten für cosh und sinh.