Wintersemester 2011/2012 Trier, den 2.2.12

Probeklausur zur Einführung in die Mathematik

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $a_1 = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_{n+1} := \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4}$.

i) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

iii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{e^\nu}}$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{2^\nu}$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ fest.

Aufgabe 4 (4+4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1+(-1)^\nu 4)^\nu} z^{2\nu}$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \nu^{\nu+1}}{(\nu+1)^\nu} z^\nu$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgende Doppelreihe konvergiert und berechnen Sie ihren Wert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{n^\nu}{\nu!\, 6^n}.$$

Aufgabe 6 (4+4 Punkte)

i) Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & , \text{ falls } x \in \mathbb{Q}, \\ x^4 & , \text{ falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

ii) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $g_a : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_a(x) := \begin{cases} x^5 \cos(\frac{1}{x}) & , \text{ falls } x \neq 0, \\ a & , \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche Werte von a ist g_a stetig?

Aufgabe 7 (4+4 Punkte)
Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : (X, d) \to (\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$ stetig.

i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : |f(x)^2 + \sin(g(x))| \leq |g(x)|\}$$

abgeschlossen in (X, d) ist.

ii) Es sei $D \subset X$ dicht in (X, d) und es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.