Wintersemester 2011/2012 Trier, den 20.12.11

Probeklausur zur Einführung in die Mathematik

Der Umfang dieser Probeklausur entspricht in etwa 2/3 einer normalen Klausur. Beachten Sie, dass in der Klausur keinerlei Hilfsmittel erlaubt sein werden!

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für $\sum_{k=1}^{n} k$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $b_1 = \frac{1}{8}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $b_{n+1} := b_n(2 - 4b_n)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu(\nu+1)^\nu}{\nu^{\nu+1}}$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^\nu)\sqrt{\nu}}{2^\nu}$.

Aufgabe 4 (4+4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 z^{2\nu}$,

ii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(k\nu)!}{k^\nu(\nu!)^k}(z-1)^\nu$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei (X, d) ein metrischer Raum sowie $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in X$ die folgende Ungleichung gilt

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y).$$