

11. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 01.07.2008 vor der Übung

Aufgabe 33 (2+2+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx, \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx,$$

$$(iii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 34 (3+4 Punkte)

- a) Es sei $R(x, y)$ ein rationaler Term in den Variablen x, y . Ferner sei $R^*(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$. Zeigen Sie: Ist R^* holomorph in $U_r(0) \setminus A$ mit $r > 1$, $A \subset \mathbb{D}$ endlich und hat f nur Pole in A , so gilt $\int_0^{2\pi} R(\cos(x), \sin(x)) dx = 2\pi \cdot \sum_{a \in A} \text{Res}(R^*, a)$.

- b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin(x)}, \quad (ii) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{1 + 8 \cos^2(x)} dx, \quad (iii) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{2 + \cos(x)} dx.$$

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \left(\sin\left(\frac{m}{n} \cdot \pi\right) \right)^{-1}.$$