L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

10. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 23.06.2008 vor der Übung

Aufgabe 30 (3+1+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die Residuen von f an den isolierten Singularitäten:

$$\text{(i)} \quad f(z) = \frac{z}{\sin(z)}\,, \qquad \text{(ii)} \quad f(z) = \frac{ze^z}{(z-1)^2}\,, \qquad \text{(iii)} \quad f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}\,.$$

b) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f \in H\big(G\backslash\{z_0\}\big)$. Zeigen Sie: Ist z_0 eine hebbare Singularität, so ist $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$. Gilt auch die Umkehrung?

c) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$ und $f \in H(G\backslash\{z_0\})$. Beweisen Sie:
f hat eine holomorphe Stammfunktion $\iff$ $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

Aufgabe 31 (4+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int\limits_{|z|=\pi} \tan(z)dz\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $P(z) = z^7 + z^5 - 8z^3 + 2z + 1$ im Kreisring $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Es sei P ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, und es seien $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von P. Zeigen Sie:

a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ gilt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z - z_\nu}\,.$$

b) Die Nullstellen von P' liegen in der konvexen Hülle der Menge $\{z_1, \ldots, z_n\}$ (d.h. ist z_0 eine Nullstelle von P', so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$ und $z_0 = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu z_\nu$.