

9. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 16.06.2008 vor der Übung

Aufgabe 27 (1+1+3+2+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases}$.

- (i) Zeigen Sie, dass $2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein einfacher Pol ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass f holomorph ist. Die Potenzreihenentwicklung sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?
- (iii) Berechnen Sie B_0 und B_1 . Zeigen Sie ferner, dass die Koeffizienten der Beziehung $\sum_{\nu=0}^n \binom{n+1}{\nu} B_\nu = 0$ ($n \geq 1$) genügen. (Die B_n heißen **Bernoullische Zahlen**.)
- (iv) Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist $B_{2n+1} = 0$. (Hinweis: Zeigen Sie $f(z) - f(-z) = -z$.)
- (v) Zeigen Sie: $B_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 28 (5 Punkte)

Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer cauchyverteilten Zufallsvariablen, d. h. berechnen Sie das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+x^2} d\lambda(x) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und $f : G \rightarrow E$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- α) f ist holomorph.
- β) $g : (G \times G) \setminus \Delta \rightarrow E$, $g(z, w) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$, hat eine stetige Fortsetzung nach $G \times G$.
- γ) $\lim_{\substack{(z,w) \rightarrow (z_0, z_0) \\ (z,w) \notin \Delta}} g(z, w)$ existiert für alle $z_0 \in G$.