L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

8. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 09.06.2008 vor der Übung

Aufgabe 24 (5+2+1 Punkte)

a) Bestimmen und klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(i) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$, (ii) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, (iii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z)}$,

(iv) $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$, (v) $f(z) = \dfrac{z^2+i}{z^4+1}$.

b) $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, $f\left(\frac{i}{n}\right) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Art von isolierter Singularität hat f in $z = 0$?

c) Bestimmen Sie alle beschränkten ganzen Funktionen f mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ und $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 25 (2+3+1+4 Punkte)
Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f um z_0 im angegebenen Kreisring U.

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$, $z_0 = 0$, $U = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ bzw. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

(ii) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$, $z_1 = 1$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ bzw. $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$.

(iii) $f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$, $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(iv) $f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$, $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 26 (4+2 Punkte) **(Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen)**

a) Es seien $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome mit $Q(z) = c \cdot \prod_{\nu=1}^{m} (z - z_\nu)^{k_\nu}$, $z_\nu \neq z_\mu$ für $\nu \neq \mu$. Zeigen Sie: Es gibt ein Polynom $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $a_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{a_{\nu\mu}}{(z-z_\nu)^\mu} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}).$$

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $R(z) = \dfrac{z-1}{z^4+z^2}$.