L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

7. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 02.06.2008 vor der Übung

Aufgabe 19 (4+2+4 Punkte)

a) Es seien $R \in (0, \infty]$ und $f \in H\big(U_R(0)\big)$, wobei $U_\infty(0) := \mathbb{C}$. Dann heißt die Funktion $M(\cdot, f) : [0, R) \to \mathbb{R}$ mit $M(r, f) := \max\limits_{|z|=r} \big|f(z)\big|$ der Maximalbetrag von f. Zeigen Sie:

   (i) Ist f nicht konstant, so ist $M(\cdot, f)$ streng monoton wachsend.

   (ii) Ist $R = \infty$ und f nicht konstant, so ist $\lim\limits_{r\to\infty} M(r, f) = \infty$.

   (iii) Ist $R = \infty$ und $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, so gilt $|a_\nu| \leq \frac{M(r)}{r^\nu}\ \forall\, r > 0, \nu \in \mathbb{N}_0$.

b) Bestimmen Sie $M(\cdot, \exp)$ und $M(\cdot, \cos)$.

c) Beweisen Sie das **Schwarzsche Lemma**: Es seien für $0 < r < \infty$, $f \in H\big(U_r(0)\big)$, $f(0) = 0$, und $\big|f(z)\big| \leq M$ für alle $z \in U_r(0)$. Dann gilt $\big|f'(0)\big| \leq \frac{M}{r}$ und $\big|f(z)\big| \leq \frac{M}{r}\,|z|$ für alle $z \in U_r(0)$.
Gilt ferner $\big|f(\tilde{z})\big| = \frac{M}{r} \cdot |\tilde{z}|$ für ein $\tilde{z} \in U_r(0)\backslash\{0\}$ oder $\big|f'(0)\big| = \frac{M}{r}$, so ist $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = \frac{M}{r}$.

Aufgabe 20 (2 Punkte)
Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit $f\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 21 (3+2 Punkte)

a) Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in H(\Omega)$ nicht lokalkonstant, so ist $f(\Omega)$ offen.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$. Prüfen Sie, ob $f(\mathbb{R}^2)$ offen ist.

Aufgabe 23 (3 Punkte)
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z \in G$ und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Hat $f - f(z_0)$ an z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so existiert zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\big\{z \in U_\varepsilon(z_0) : f(z) = w\big\}$ für jedes $w \in U_\delta\big(f(z_0)\big)\backslash\big\{f(z_0)\big\}$ genau m Elemente enthält.