L. Frerick
T. Pohlen SS 2008

5. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 19.05.2008 vor der Übung

Aufgabe 12 (2+6 Punkte)

a) Es seien $G_1 := \mathbb{C}\backslash\{t : t \leq 0\}$ und $G_2 := \mathbb{C}\backslash\{it : t \geq 0\}$. Berechnen Sie $\log^{G_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)$ und $\log^{G_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)$.

b) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \notin G$ und $1 \in G$. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $z^\alpha := \exp\left(\alpha \log^G(z)\right)$. Zeigen Sie:

(i) Für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt $(z^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = z$.

(ii) Ist $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, so gilt $\left(z^{\frac{m}{n}}\right)^n = z^m$.

(iii) Ist $f \in H(G), n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\left(f(z)\right)^n = z \iff \exists\, k \in \{0, \ldots, n-1\} : f(z) = e^{\frac{2\pi k i}{n}} \cdot z^{\frac{1}{n}}.$$

(iv) $g : G \to \mathbb{C}$, $g(z) := z^\alpha$, ist holomorph und es gilt $g'(z) = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$.

Aufgabe 13 (12 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{|z|=\pi} \frac{\cos(z)}{z}\,dz$, (ii) $\displaystyle\int_{|z|=\pi} \frac{\sin(z)}{z}\,dz$,

(iii) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,dz$, (iv) $\displaystyle\int_{|z-3|=2} \left(\frac{z}{z-e}\right)^n dz,\ n \in \mathbb{N}_0$,

(v) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx,\ \int_0^\infty \sin(x^2)dx$, (vi) $\displaystyle\int_\gamma z^2 dz,\ \gamma(t) = te^{it}\ \ (0 \leq t \leq 2\pi)$.

Aufgabe 14 (1+4 Punkte)
Für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ seien $U_\varepsilon^{|\cdot|}(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ und $B_\varepsilon^{|\cdot|}(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \varepsilon\}$. Für $z \in \mathbb{C}_\infty$ sei $U_\varepsilon^\chi(z) := \{w \in \mathbb{C} : \chi(w,z) < \varepsilon\}$. Zeigen Sie:

(i) $$U_\varepsilon^\chi(\infty) = \begin{cases} \mathbb{C}_\infty \setminus B^{|\cdot|}_{\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}}(0) & , \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \\ \mathbb{C}_\infty & , \quad \varepsilon > 1. \end{cases}$$

(ii) $A \subset \mathbb{C}_\infty$ ist genau dann offen in (C_∞, χ), wenn

(α) A offen in $\mathbb{C}$, falls $\infty \notin A$ oder

(β) $\mathbb{C}_\infty \backslash A$ kompakt in $\mathbb{C}$, falls $\infty \in A$.