

4. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 05.05.2008 vor der Übung

Aufgabe 9 (4+3 Punkte)

- a) Es sei γ eine Parametrisierung des Quadrates mit Ecken $-r - ir, r - ir, r + ir, -r + ir$ (in dieser Reihenfolge) für ein festes $r > 0$. Berechnen Sie $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.
- b) Es seien $r : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $r(0) = r(2\pi)$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := r(t) e^{it}$. Ferner sei $B := \{\lambda \gamma(t) : 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Zeigen Sie: $\lambda^2(B) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz$.

Aufgabe 10 (2+2+2 Punkte)

Untersuchen Sie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf Holomorphie und geben Sie $df(z)(w)$ an.

- (i) $f(z) = z_1 |z_2|^2, U = \mathbb{C}^2$.
- (ii) $f(z) = \sum_{\nu=1}^n \operatorname{Re}(z_{\nu}), U = \mathbb{C}^n$.
- (iii) $f(z) = e^{z_1} + z_2^2 z_3 - 3z_1, U = \mathbb{C}^3$.

Aufgabe 11 (2+3+2 Punkte)

- a) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Beweisen Sie: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen, so ist auch $\frac{1}{f}$ holomorph auf U . Geben Sie $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\nu}} \frac{1}{f}$ ($\nu = 1, \dots, n$) in Abhängigkeit von $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{\nu}}$ an.
- b) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Ferner seien $u := \operatorname{Re}(f)$ und $v := \operatorname{Im}(f)$. Beweisen Sie:

$$f \text{ holomorph} \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ auf } U$$

(so genannte **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**).

- c) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Es gilt

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

für alle $z \in U$.