L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

3. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 28.04.2008 vor der Übung

Aufgabe 6 (2+3 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\gamma, \Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ homotop in U sind.

(i) $\gamma(t) = re^{it}, \Gamma(t) = Re^{it}$, wobei $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R+\varepsilon\}\backslash\{0\}, \varepsilon > 0, 0 < r < R$.

(ii) $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \Gamma(t) = Re^{it}$, wobei $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R+\varepsilon\}\backslash\{z_0\}, \varepsilon > 0, |z_0| < R, 0 < r < R - |z_0|$.

Aufgabe 7 (3+5 Punkte)

a) Es seien $\emptyset \neq U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus.
Beweisen Sie: Ist U einfach zusammenhängend, so auch V.

b) Untersuchen Sie, ob G ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

(i) $G = \mathbb{R}^n \backslash \{t \cdot a : t \in [0, \infty)\}$, wobei $a \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ fest.

(ii) $G = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < e, |\arg(z)| < \frac{3}{4}\pi\}$.

(iii) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |\arg(z)| < \frac{3}{4}\pi\}$.

Aufgabe 8 (3+3 Punkte)
Es seien $\infty \notin \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Durch

$$\chi(z, w) := \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & , \quad z, w \in \mathbb{C} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & , \quad z \in \mathbb{C}, w = \infty \end{cases}$$

$\chi(\infty, z) := \chi(z, \infty)\,(z \in \mathbb{C})$, $\chi(\infty, \infty) = 0$ wird eine Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$ definiert (so genannte **chordale Metrik**). Ferner seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$.
Zeigen Sie:

(i) $z_n \to z$ in $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|}) \iff z_n \to z$ in $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

(ii) $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ ist ein kompakter metrischer Raum.