L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

2. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 21.04.2008 vor der Übung

Aufgabe 4 (4+5 Punkte)

a) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein bezüglich 0 sternförmiges Gebiet und $\omega : G \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form.

  (i) Zeigen Sie: Ist ω geschlossen, so ist $F : G \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_0^1 \sum_{\nu=1}^n x_\nu f_\nu(tx)\, dt$ eine Stammfunktion zu ω.

  (ii) Ist die Sternförmigkeit notwendig für die Existenz einer Stammfunktion?

b) Bestimmen Sie, wenn möglich, eine Stammfunktion der Pfaffschen Form $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$.

  (i) $f_1(x_1, x_2) = 12x_1x_2 + 3,\ f_2(x_1, x_2) = 6x_1^2 - 1,\ U = \mathbb{R}^2$.

  (ii) $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2,\ f_2(x_1, x_2) = x_2,\ U = \mathbb{R}^2$.

  (iii) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2,\ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_3e^{x_1},\ f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\log(x_3)$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Aufgabe 5 (2+3+4+2 Punkte)
Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $I \neq \emptyset$ eine Menge und $M \subset X$.

a) Zeigen Sie: Ist $A_\iota \subset X$ zusammenhängend ($\iota \in I$) und ist $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ zusammenhängend. Gilt dies auch, wenn $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota = \emptyset$ ist?

b) Für $x \in M$ heißt $Z_M(x) := \bigcup\{B \subset M : x \in B, B \text{ zusammenhängend}\}$ die Zusammenhangskomponente von x (bezüglich M). Zeigen Sie:

  (i) $Z_M(x)$ ist zusammenhängend.

  (ii) Für $x, y \in M$ gilt entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$.

c) Zeigen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so hat Ω höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, und diese sind alle Gebiete.

d) Zeigen Sie: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $n \geq 2$, so hat K^c genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.