L. Frerick
T. Pohlen

SS 2008

1. Übung zur Analysis IV

Abgabe: 14.04.2008 vor der Übung

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

a) Berechnen Sie $\dfrac{3-i}{4i-1}$, $(7+2i)\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\left|-7\,e^{3+2i}\right|$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\}$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z+2| = 5\}$,

(iii) $\left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} : \left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1 \right\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständige normierte Räume und $f : X \to Y$. Bestimmen Sie $df(x)(r)$ für $x, r \in X$:

(i) $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|), f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt.$

(ii) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2),\ (Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|), f(x,y,z) = xy^2z^3.$

Aufgabe 3 (6+3 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

(i) $\displaystyle\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + 3z\,dy + 4xy\,dz,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma x^2dx + y^2dy,\ \gamma(t) := \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$.

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma_k} y\,dx + (y-x)\,dy,\ \gamma_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$, $\gamma_2(t) := \begin{cases} (2t, 0), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (1, 2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$

(iv) $\displaystyle\int_\gamma xy\,dx + ye^x dy$, γ polygonaler Weg durch $(0,0), (2,0), (2,1), (0,1), (0,0)$ (in dieser Reihenfolge).

b) Es sei $r : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar, $b - a \leq 2\pi$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(t) \\ r(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.
und $B := \{\lambda \cdot \gamma(t) : 0 \leq \lambda \leq 1,\ a \leq t \leq b\}$.

Zeigen Sie: $\lambda^2(B) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} -y\,dx + x\,dy$.