L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008
05.02.2008

14. Übung zur Analysis III

Aufgabe 38

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x} \sin^n(x)\, dx$.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie, ob M eine Untermannigfaltigkeit ist, und geben Sie gegebenenfalls deren Dimension an.

(i) $M = \{x \in \mathbb{R}^n : p^T x = \alpha\}$, wobei $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $M = |\gamma|$ mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (t, 2t)$.

(iii) $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} : x_1x_3 - x_2^2 = 0,\ x_2x_4 - x_3^2 = 0,\ x_1x_4 - x_2x_3 = 0\}$.

(iv) $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = 1\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

(v) $M = \{(r \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta), h \cdot \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, \vartheta \in \mathbb{R}\}$, wobei $h > 0$ fest.

(vi) $M = |\gamma|$ mit $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Aufgabe 40

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq k < n$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$. $x \in U$ heißt regulärer Punkt, wenn $J_f(x)$ eine surjektive lineare Abbildung induziert. $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ heißt regulärer Wert, wenn entweder $f^{-1}(\{y\})$ leer ist oder jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ ein regulärer Punkt ist.

Beweisen Sie den **Satz vom regulären Wert**:

Ist unter den obigen Voraussetzungen $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ ein regulärer Wert und $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, so ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.