L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008
29.01.2008

13. Übung zur Analysis III

Abgabe: 06.02.2008, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 35 (2+4 Punkte) (eine **Peanokurve**)

Es sei $f(t) := \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3t-1 & , \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}$ und $f(t) := f(-t)$ für $-1 \leq t < 0$.

Durch $f(t+2) = f(t)$ werde die Funktion 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.
Ferner definieren wir $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$x(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot f(3^{2n-1} \cdot t), \quad y(t) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot f(3^{2n} \cdot t).$$

(i) Zeigen Sie, dass x und y stetige Funktionen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Spur der Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (x(t), y(t))$, gilt: $|\gamma| = [0,1] \times [0,1]$.

(Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass jedes $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ eine Darstellung $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}$, $y_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$ mit $a_n \in \{0,1\}$ hat. Betrachten Sie $t_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2a_n 3^{-n-1}$.)

Aufgabe 36 (3 Punkte)

Es sei $r : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ heißt in **Polarkoordinatendarstellung**.

Zeigen Sie: Ist r stetig differenzierbar, so gilt $\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Aufgabe 37 (2+2+2+2+3 Punkte)

Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven. a, h seien dabei positive Konstanten.

(i) $\gamma(t) := \begin{pmatrix} a \cdot (t - \sin(t)) \\ a \cdot (1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (ii) $\gamma(t) := \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ a \cdot \sin(t) \\ h \cdot t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(iii) $\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} a \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \\ a \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(iv) $r(\varphi) := a(1 + \cos(\varphi))$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(v) $\gamma(t) := \left(t, \sqrt{t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\right)$, $0 < t \leq 1$, $\gamma(0) := (0,0)$.