

12. Übung zur Analysis III

Abgabe: 30.01.2008, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 32 (1+3 Punkte)

Untersuchen Sie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf uneigentliche Regelintegrierbarkeit und auf Lebesgueintegrierbarkeit.

$$(i) \quad f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} , \quad (ii) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 33 (1+8 Punkte)

a) Es sei $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$. Ferner sei $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie R und $\Phi(R)$ für $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ und $\delta = 5$.

b) Berechnen Sie:

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n dx,$$
$$(iii) \quad \int_A xy \, d\lambda^2(x, y), \quad A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\},$$
$$(iv) \quad \int_A z \, d\lambda^3(x, y, z), \quad A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\},$$

wobei $R > 1$.

Aufgabe 34 (1+2+3+3 Punkte)

Es seien $r : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig, $0 \leq a < b \leq 2\pi$ und

$$B := \left\{ \lambda \cdot \left(r(\varphi) \cdot \cos(\varphi), r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda \leq 1, a \leq \varphi \leq b \right\}.$$

(i) Begründen Sie, warum $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist.

(ii) Skizzieren Sie B für $r(\varphi) \equiv c > 0$ und $r(\varphi) = 1 + \cos(\varphi)$ (je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

(iii) Zeigen Sie: $\lambda^2(B) = \frac{1}{2} \int_a^b (r(\varphi))^2 d\varphi$.

(iv) Berechnen Sie $\lambda^2(B)$ für die Funktionen r aus Teil (ii).