

11. Übung zur Analysis III

Abgabe: 23.01.2008, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 28 (2 Punkte)

Es sei C das Cantorsche Diskontinuum aus Beispiel 4.1.25. Zeigen Sie: C ist eine Borelmenge mit $\lambda^1(C) = 0$.

Aufgabe 29 (4+3+3 Punkte)

- a) Es seien $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $c \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq d$ für alle $x \in [a, b]$ und $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Zeigen Sie:

$$\int_A f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- b) Es sei $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie: $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ist eine Borelmenge mit $\lambda^2(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.
- c) Für $a, b > 0$ sei $E_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Skizzieren Sie $E_{5,2}$ und berechnen Sie $\lambda^2(E_{a,b})$.

Aufgabe 30 (1+3 Punkte)

Es seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$.

- (i) Wie kann man sich R geometrisch vorstellen?

- (ii) Zeigen Sie: R ist eine Borelmenge und es gilt $\lambda^3(R) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

Aufgabe 31 (6+4+2 Punkte)

- a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A x \cos(y) d\lambda^2(x, y)$, $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq x^2\}$.

(ii) $\int_A \sqrt{x(1-z^2)} d\lambda^3(x, y, z)$, $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, y \leq \sqrt{x^3}, x^2 + z^2 \leq 1\}$.

- b) Es seien $(a_1, \dots, a_n)$ eine linear unabhängige Familie im $\mathbb{R}^n$, A die Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Menge

$$P := \left\{ b + \sum_{j=1}^n \beta_j a_j : 0 \leq \beta_j \leq 1 \ (1 \leq j \leq n) \right\}$$

das von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Parallelotop.

- (i) Skizzieren Sie P im Falle $a_1 = (4, 1)$, $a_2 = (-1, 3)$ und $b = (-1, -1)$.
 - (ii) Geben Sie eine affin-lineare Abbildung an, die den Einheitswürfel $[0, 1]^n$ auf P abbildet.
 - (iii) Zeigen Sie: P ist eine Borelmenge und es gilt $\lambda^n(P) = |\det(A)|$.
- c) Es seien $0 < r \leq d$ und K die Kreisscheibe um $(0, d)$ mit Radius r . Der bei Rotation von K um die horizontale Achse entstehende Drehkörper heißt Torus. Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.