

9. Übung zur Analysis III

Abgabe: 09.01.2008, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Es sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{K}^d$ offen. Beweisen Sie: $V \subset U$ ist genau dann beschränkt in U , wenn V relativ kompakt in U ist.

Aufgabe 23 (2+4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie das Lösungsintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $x' = \frac{t^2 x^3}{1 + x^2} + e^t \cos(x)$, $x(1) = 2$.
- b) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $D := I \times \mathbb{K}^d$. Ferner sei $f \in C(D, \mathbb{K}^d)$ so, dass für alle kompakten Intervalle $J \subset I$ ein $L = L(J) \geq 0$ existiert mit $\|f(t, x) - f(t, y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2$ für alle $(t, x), (t, y) \in J \times \mathbb{K}^d$. Beweisen Sie: Für jedes $(t_0, x_0) \in D$ gilt $I_{(t_0, x_0)} = I$, wobei $I_{(t_0, x_0)}$ das Lösungsintervall der maximalen Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ ist.

Aufgabe 24 (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie die maximalen Lösungen zum Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, (mit $f : D \rightarrow \mathbb{K}^d$).

- (i) $D = \mathbb{R}^2$, $x' = t^2 x^2$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$.
- (ii) $D = (0, \infty) \times \mathbb{C}$, $z' = \frac{iz}{t^2}$, $z\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{i}$.

Fröhliche Weihnachten und ein frohes neues Jahr wünschen Leonhard Frerick, Dennis Sieg und Timo Pohlen.