L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008
12.12.2007

8. Übung zur Analysis III

Abgabe: 19.12.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 19 (6+2+4 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob $f : D \to \mathbb{K}$ (lokal) lipschitzstetig bezüglich x ist.

   (i) $D = (-3, \pi] \times \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}, f(t, x) = e^t x^2$.

   (ii) $D = \mathbb{R}^3, f(t, x_1, x_2) = \sqrt{|t|}\, x_1^3 - t x_1 x_2^2 + 1$.

   (iii) $D = \mathbb{R}^2, f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x)$, an, welche nicht lipschitzstetig bezüglich x ist, die aber die Bedingung $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L\|x - y\|_2$ mit einer Konstanten $L \geq 0$ für alle $(t, x), (t, y) \in U$ erfüllt und deren partielle Ableitung nach der zweiten Variablen stetig ist.

c) Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ und $f : U \to X, (t, x) \mapsto f(t, x)$, stetig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   α) f ist lokal lipschitzstetig bezüglich x.

   β) Zu jedem Kompaktum $K \subset U$ existiert eine Konstante $L = L(K) > 0$, so dass $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\|_{X^n}$ für alle $(t, x), (t, y) \in K$ gilt.

Aufgabe 20 (3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x)$, lokal lipschitzstetig bezüglich x und $(\varphi, (\alpha, \beta))$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$. Zeigen Sie: Ist $\beta < \infty$, so ist $\lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = +\infty$ oder $\lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = -\infty$.

Aufgabe 21 (2+5 Punkte)

Es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x^{(n)}(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^{(\nu)}(t) = 0,\ x^{(j)}(t_0) = x_j\ (j = 0, \ldots, n-1) \qquad (*)$$

(i) Zeigen Sie: φ ist Lösung von $(*)$ genau dann, wenn $\varphi(\cdot + t_0)$ das Anfangswertproblem $x^{(n)}(t) + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^{(\nu)}(t) = 0,\ x^{(j)}(0) = x_j\ (j = 0, \ldots, n-1)$ löst.

(ii) Bestimmen Sie die reelle Lösung von $x''(t) + 2dx'(t) + kx(t) = 0, x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1$, mit $t_0, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und Konstanten $d \geq 0,\ k > 0$.