

### 7. Übung zur Analysis III

Abgabe: 12.12.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

#### Aufgabe 16 (6+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Differentialgleichungen.

(i)  $x' = -2x + t$ .

(ii)  $x' = \frac{2 - \cos(t) - x}{t}$ .

(iii)  $x^{(4)} = 2x^{(3)} + 3x'' - 8x' + 4x$ .

b) Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(i)  $x' = \frac{tx - 1}{1 - t^2}$ ,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $(1 + t)x' + 2x = 2t$ ,  $x(0) = 1$ .

#### Aufgabe 17 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme.

(i)  $x' = \frac{1 + x^2}{t}$ ,  $x(1) = 1$ .

(ii)  $x'(1 + t^2) \sin(x) - 2t \cos(x) = 0$ ,  $x(1) = \frac{\pi}{3}$ .

(iii)  $x' = -\frac{t}{x}$ ,  $x(0) = 1$ .

#### Aufgabe 18 (4+2 Punkte)

a) Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, und es sei  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für  $(t_0, x_0) \in D := \{(t, x) : t > 0, x/t \in J\}$  betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Zeigen Sie:  $(\varphi, I)$  ist Lösung des Anfangswertproblems (1) genau dann, wenn  $(\psi, I)$  mit  $\psi(t) := \varphi(t)/t$  Lösung des Anfangswertproblems

$$z' = \frac{g(z) - z}{t}, \quad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \quad (2)$$

ist.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{x}{t} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}, \quad x(2) = 1.$$