L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

6. Übung zur Analysis III

Abgabe: 05.12.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 13 (5+4 Punkte)

a) Beweisen Sie den **Vietaschen Wurzelsatz**: Sind $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so gibt es genau ein normiertes Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ten Grades, das die Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ hat. Überdies gilt für die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1}$ von P:

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = k}} (z_1, \dots, z_n)^\alpha \qquad (k = 1, \dots, n).$$

b) Berechnen Sie gemäß a) die Koeffizienten des normierten Polynoms, das $z_1, \dots, z_n$ als Nullstellen hat.

(i) $z_1 = -1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 4$, $z_4 = 5$.

(ii) $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = 6$.

Aufgabe 14 (4+3 Punkte)

a) Beweisen Sie den **polynomischen Lehrsatz**: Sind $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k} z_\nu \right)^n = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^k \\ |\alpha| = n}} \frac{n!}{\alpha!} (z_1, \dots, z_k)^\alpha .$$

b) Es sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom in n Variablen, d.h. P ist von der Form $P(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le m}} a_\alpha x^\alpha$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_\alpha \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ das Taylorpolynom $T^k_{(0,\dots,0)}(P)$.

Aufgabe 15 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + |y|^3} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit in $(0,0)$.