L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

5. Übung zur Analysis III

Abgabe: 28.11.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 11 (6+6 Punkte)

a) Es seien $(H, < \cdot, \cdot >)$ ein reeller Hilbertraum, $b \in H, A \in \mathscr{L}(H,H)$ selbstadjungiert (oder symmetrisch), d.h. es gilt $< Ax, y > = < x, Ay >$ für alle $x, y \in H$, und $f : H \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := < Ax, x > - 2 < x, b >$. Zeigen Sie:

(i) f ist zweimal stetig differenzierbar.

(ii) Ist A invertierbar, so gibt es genau eine kritische Stelle.

(iii) Ist A positiv (negativ) definit, so ist die kritische Stelle eine Minimalstelle (Maximalstelle).

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $X := \{f \in C^2([a,b], \mathbb{R}) : f(a) = f(b) = 0\}$ und $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$.
Wir definieren $I : X \to \mathbb{R}$ durch $I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx$.

(i) Zeigen Sie: Löst $u \in X$ das Optimierungsproblem $\min_{f \in X} I(f)$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x, u(x), u'(x)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} L(x, u(x), u'(x))\right) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

(ii) Bestimmen Sie das Minimum für den Fall $L(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$.

Aufgabe 12 (3+5 Punkte)

a) Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subset X$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ mit $df(x_0) = 0$. Zeigen Sie: Ist $d^2 f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T^m_{(0,0)}(f)$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(i) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot e^{x_2}, m = 5$.

(ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2 - 1, m = 100$.