L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

4. Übung zur Analysis III

Abgabe: 21.11.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 8 (3 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $D : (C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), D(f) := f'(0)$ auf Richtungsdifferenzierbarkeit, (stetige) Differenzierbarkeit und zweimalige (stetige) Differenzierbareit.

Aufgabe 9 (5+5+3 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{\nu_m}}{\partial x_m^{\nu_m}}\right) f,\ 0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le \ldots \le \nu_m \le k$, der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bis zur Ordnung k.

(i) $D = \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = x^2y^3z^4 + \log(1+x^2) - e^{yz}, k = 2, m = 3.$

(ii) $D = \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x + 3xy^2, k = 3, m = 2.$

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \le 2$.

(i) $D = \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 4yz + 1 + x^2.$

(ii) $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\}), f(x,y) = \frac{x}{y^2} - 2x + 1.$

c) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ gilt.

Aufgabe 10 (3+2 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema.

(i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y.$

(ii) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{2}\}, \quad f(x,y,z) = x^5 + x^4 + y^4 + z^4.$