L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

3. Übung zur Analysis III

Abgabe: 14.11.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 6 (3+4 Punkte)

a) Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum, $\emptyset \neq U \subset X$ konvex und offen sowie $f : U \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Ist f konvex (konkav) und besitzt ein globales Maximum (globales Minimum), so ist f konstant.

b) Geben Sie eine reellen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ und eine stetige symmetrische Bilinearform $T : X \times X :\to \mathbb{R}$ an, so dass $T(r, r) > 0$ für alle $r \in X \setminus \{0\}$ gilt, T aber nicht positiv definit ist.

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ Banachräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K}$ und $f : X \to E$. Bestimmen Sie $df(x)(r)$ und $d^2f(x)(r, s)$ für alle $x, r, s \in X$:

(i) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - e^{-3x_2} + 1$.

(ii) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x) = x^T A x + q^T x + c$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, q \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

(iii) $(X, \|\cdot\|_X) = (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), (E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2(t)\, dt$.

(iv) $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$, $f(t) = e^{i\cdot t}$.

(v) $(X, \|\cdot\|_X) = (C^1([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, $(E, \|\cdot\|_E) = (C([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, $f(x) = x\cdot x'$.