L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

2. Übung zur Analysis III

Abgabe: 07.11.2007, 8 Uhr, Kasten 12

Aufgabe 3 (1+1,5+2,5 Punkte)
Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen konvex bzw. konkav sind:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{3}{5}\,x^5 - x^4 - 12x^3 + 4x + 1.$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \frac{1}{2}\,x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - 7x_2 + 1.$

(iii) $T : C\left([0,1], \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R},\ T(f) := \displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx.$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (y - 2x^2)(y - x^2)$ hat keine lokale Extremstelle im Ursprung. Für jedes $r \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ hat aber $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_r(t) := f(tr)$ ein lokales Minimum in $t = 0$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Kandidaten für lokale Extremstellen der Funktion $f : M \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y$, unter der Nebenbedingung $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$, wobei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$.

b) Es seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\mathrm{Rg}(A) = n$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|Ax - b\|_2^2$.
Zeigen Sie: f besitzt eine eindeutige Minimalstelle x^*, welche $A^T A x^* = A^T b$ erfüllt.