L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008

1. Übung zur Analysis III

Abgabe: 31.10.2007, 8 Uhr s.t., Kasten 12

Aufgabe 1 (4+7 Punkte)

a) Es seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $\emptyset \neq U \subset X, \emptyset \neq V \subset Y$ jeweils offen und $f : U \to V$ bijektiv und differenzierbar.

 (i) Zeigen Sie: Ist $f^{-1} : V \to U$ differenzierbar, so ist $df(a) : X \to Y$ für jedes $a \in U$ ein Isomorphismus. Was heißt dies im Falle $X = Y = \mathbb{R}^n$ für die Jacobimatrix $J_f(a)$?

 (ii) Gilt die Aussage aus (i) auch noch, wenn f^{-1} nur stetig ist?

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $S_\alpha := (0, \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi)$. Man betrachte die Funktion $P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $P(r, \varphi) := (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$. Ferner sei $P_\alpha := P|_{S_\alpha}$.

 (i) Zeigen Sie, dass P_α injektiv ist, bestimmen Sie $P_\alpha(S_\alpha)$ und zeigen Sie, dass $P_\alpha(S_\alpha)$ offen ist. Ist auch P injektiv?

 (ii) Zeigen Sie, dass $P_{-\pi}$ und $P_{-\pi}^{-1}$ stetig differenzierbar sind und geben Sie die zugehörigen Jacobimatrizen an.

Aufgabe 2 (4+3 Punkte)
(Lemniskate) Betrachten Sie für $R > 0$ die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2R^2(x^2 - y^2) = 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Bestimmen Sie die Punkte, um die die Lösungsmenge lokal der Graph einer Funktion ist.

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung dieser Funktion durch implizites Differenzieren und zeigen Sie, dass mögliche Extremstellen auf der Kreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ liegen.