L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008
31.03.2008

Nachklausur zur Analysis III

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 4x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz - 2xz - 6y + 2z + 1$.

b) Berechnen Sie $\max\{xyz : x > 0, y > 0, z > 0, 2xy + 2xz + 2yz = 1\}$.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $x'(t) = \dfrac{1 - x^2(t)}{t}, \; x(1) = 0, \; (t > 0)$.

(ii) $x'(t) = -\cot(t) \cdot x(t) + e^{\cos(t)}, \; x(\frac{\pi}{2}) = 0, \; (0 < t < \pi)$.

Aufgabe 3 (3+3+2 Punkte)

a) Warum ist $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq y^2\}$ eine Borelmenge ist? Berechnen Sie das Volumen von B.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_A (x^2 - y^2)\, d\lambda^2(x, y), \; A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 - y^2 \geq 0\}$.

(ii) $\displaystyle\int_A \frac{y \cdot \sin(x)}{z^2}\, d\lambda^3(x, y, z)$,
$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, \pi], y \in [0, 1], z \in [1, \infty)\}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu$$

gilt.