L. Frerick
T. Pohlen

WS 2007/2008
Trier, den 13.02.2008

Klausur zur Analysis III

Aufgabe 1 (3+3+5 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$ auf globale Extrema.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 + xy$ auf lokale Extrema.

c) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T^2_{(0,1,\pi)}(f)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_2 e^{-2x_1} - 3\sin(x_3)$, im Entwicklungspunkt $(0, 1, \pi)$.

Aufgabe 2 (4+5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Lösungsintervall an.

(i) $x'(t) = t^3 - \dfrac{x(t)}{t},\ x(1) = 2.$

(ii) $x'''(t) = 5x''(t) - 3x'(t) - 9x(t),\ x(0) = 4,\ x'(0) = -2,\ x''(0) = 0.$

Aufgabe 3 (3+4+5 Punkte)

a) Es seien $a, b, c, r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq r^2 \right\}.$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $$\int_A \left(12x - 84y^2\right)\, d\lambda^2(x, y),$$
$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2 - 2x + 1 \right\},$$

(ii) $$\int_A 2xy\, d\lambda^2(x, y),\ A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq y \right\}.$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Spur der Kurve $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\varphi) := \left(\sqrt{2\cos(2\varphi)}\,\cos(\varphi),\ \sqrt{2\cos(2\varphi)}\,\sin(\varphi)\right)$, und der horizontalen Achse eingeschlossen wird.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := e^{(1+i)t}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist $f(x) = g(x)$ für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.