# A N A L Y S I S I-III

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Mengen, Abbildungen, Äquivalenzrelationen

In diesem ersten Paragraphen werden wir einige Grundbegriffe der Theorie der Mengen und Abbildungen zusammenstellen. Wir verwenden den von Cantor geprägten sogenannten „naiven“ Mengenbegriff.

**Definition 1.1.1** Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Dieser Cantorsche Mengenbegriff ist unbefriedigend, da er zu Widersprüchen führt. Wir werden ihn trotzdem verwenden, da eine logisch unproblematische Mengentheorie weit über den Rahmen der Vorlesung Analysis I hinausginge. Fassen wir also bestimmte Objekte zusammen, so entsteht eine Menge. Es muss jedoch immer klar sein, welche Objekte zur Menge gehören und welche nicht.

Ist $M$ eine Menge, schreiben wir

$$x \in M \qquad \text{(gelesen: } x \text{ Element } M\text{)},$$

falls $x$ ein Element der Menge $M$ ist, und wir schreiben

$$x \notin M \qquad \text{(gelesen: } x \text{ nicht Element } M\text{)},$$

falls $x$ kein Element der Menge $M$ ist.

Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten zur Beschreibung von Mengen:

1. Die Elemente der Menge können in geschweiften Klammern aufgezählt werden, z.B. ist

$$M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definiert als}}}{:=} \{2, 4, 6, 8\}$$

   die Menge, die aus den Elementen $2, 4, 6, 8$ besteht.

2. Die Menge kann durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente beschrieben werden:

$$M := \{x : x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

   ist die Menge aller Elemente $x$, welche die Eigenschaft $E$ besitzen.

**Beispiel 1.1.2** i) Es sei $M := \{2, 4, 6, 8\}$. Dann gilt auch

$$M = \{x : x \text{ ist eine positive gerade Zahl kleiner oder gleich } 8\}\,.$$

ii) Die Menge

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

ist die Menge der natürlichen Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{x : x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x : x \text{ ist eine nicht negative ganze Zahl}\}\,. \end{aligned}$$

iii) Die Menge

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &:= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} \\ &= \{x : x \text{ ist eine ganze Zahl}\} \end{aligned}$$

ist die Menge der ganzen Zahlen.

Wir setzen ihre grundsätzlichen Eigenschaften als bekannt voraus.

**Definition 1.1.3** Es seien $M_1$ und $M_2$ Mengen.

i) $M_1$ und $M_2$ heißen gleich (geschrieben: $M_1 = M_2$), falls sie dieselben Elemente enthalten.

ii) $M_1$ heißt Teilmenge von $M_2$ (geschrieben: $M_1 \subset M_2$), falls jedes Element von $M_1$ auch Element von $M_2$ ist. $M_2$ heißt dann auch Obermenge von $M_1$ (geschrieben: $M_2 \supset M_1$).

iii) Ist $M_1$ keine Teilmenge von $M_2$, so schreibt man

$$M_1 \not\subset M_2 \quad \text{oder auch} \quad M_2 \not\supset M_1 .$$

**Beispiel 1.1.4** i) Die Mengen $\{2, 4, 6, 8\}$ und $\{4, 2, 8, 2, 6\}$ sind gleich, da sie dieselben Elemente enthalten.

ii) Ist $M_1 := \{1\}$ die Menge, die aus dem Element 1 besteht, und ist $M_2 := \{M_1\} = \big\{\{1\}\big\}$ die Menge, die aus dem Element $\{1\}$ besteht, so gilt $M_1 \not\subset M_2$ und $M_2 \not\subset M_1$, insbesondere also $M_1 \neq M_2$.

iii) Es sei $M := \{a, b, c\}$ eine Menge mit 3 Elementen. Dann sind $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ Teilmengen von $M$.

iv) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

Aus Definition 1.1.3 ergibt sich unmittelbar

**Satz 1.1.5** *Es seien $M_1, M_2, M_3$ Mengen. Dann gilt*

*i)* $M_1 \subset M_1$.

*ii)* $M_1 = M_2$ *genau dann, wenn* $M_1 \subset M_2$ *und* $M_2 \subset M_1$.

*iii) Ist* $M_1 \subset M_2$ *und ist* $M_2 \subset M_3$, *so gilt auch* $M_1 \subset M_3$.

**Definition 1.1.6** Die leere Menge ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

**Satz 1.1.7** *Für jede Menge $M$ gilt $\emptyset \subset M$.*

**Beweis.** Da $\emptyset$ keine Elemente besitzt, gilt also für jedes ihrer Elemente, dass es auch Element von $M$ ist. $\square$

**Definition 1.1.8** Es seien $M_1, M_2$ Mengen.

i) Die Menge
$$M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$
heißt die Vereinigung von $M_1$ und $M_2$.

ii) Die Menge
$$M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$
heißt der Durchschnitt (oder kurz: Schnitt) von $M_1$ und $M_2$.

iii) Die Menge $M_2 \backslash M_1 := \{x : x \in M_2 \text{ und } x \notin M_1\}$ (gelesen: $M_2$ ohne $M_1$) heißt die Differenz von $M_2$ und $M_1$.
Gilt zusätzlich $M_1 \subset M_2$, so heißt
$$M_1^c := M_2 \backslash M_1$$
das Komplement von $M_1$ bezüglich $M_2$.

**Beispiel 1.1.9** i) Es sei $M_1 := \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ungerade}\}$ und $M_2 := \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$. Dann gilt $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \backslash M_2 = M_1$, $M_2 \backslash M_1 = M_2$, $\mathbb{N} \backslash M_1 = M_2$, $\mathbb{N} \backslash M_2 = M_1$.

ii) Sei $M_1 := \{1, 2, 3, 7\}$ und $M_2 := \{1, 7, 4, 5, 7\}$. Dann gilt $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $M_1 \cap M_2 = \{1, 7\}$, $M_2 \backslash M_1 = \{4, 5\}$, $M_1 \backslash M_2 = \{2, 3\}$.

**Bemerkung 1.1.10** i) Ohne die leere Menge hätten wir den Durchschnitt für zwei beliebige Mengen nicht definieren können.

ii) Genau dann ist der Schnitt zweier Mengen leer, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen.

iii) Man beachte, dass in Definition 1.1.8 iii) der Ausdruck $M_1^c$ von der betrachteten Obermenge $M_2$ abhängt.

Für das Rechnen mit Mengen gelten folgende Regeln.

**Satz 1.1.11** *Es seien $M_1, M_2, M_3$ Mengen. Dann gilt*

*i)* $$\begin{matrix} M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \\ M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1 \end{matrix} \quad \textit{(Kommutativität)}$$

*ii)* $$\begin{matrix} M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3 \\ M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3 \end{matrix} \quad \textit{(Assoziativität)}$$

*iii)* $$\begin{matrix} M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \\ M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) \end{matrix} \quad \textit{(Distributivität)}$$

**Beweis.** Wir zeigen nur das zweite Distributivgesetz, alle anderen Regeln sind analog zu beweisen.
Es gilt

$$\begin{array}{ll}
 & x \in M_1 \cup (M_2 \cap M_3) \\
\underset{\text{genau dann, wenn}}{\overset{\Leftrightarrow}{\uparrow}} & x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2 \cap M_3 \\
\Leftrightarrow & x \in M_1 \text{ oder } (x \in M_2 \text{ und } x \in M_3) \\
\Leftrightarrow & (x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2) \text{ und } (x \in M_1 \text{ oder } x \in M_3) \\
\Leftrightarrow & x \in M_1 \cup M_2 \text{ und } x \in M_1 \cup M_3 \\
\Leftrightarrow & x \in (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).
\end{array}$$

Somit enthalten die Mengen $M_1 \cup (M_2 \cap M_3)$ und $(M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$ dieselben Elemente, und sie sind daher gleich. $\square$

**Satz 1.1.12** *(Regeln von de Morgan)* *Es seien $M_1, M_2 \subset X$ Mengen, und im Folgenden seien die Komplemente bezüglich $X$ gebildet. Dann gilt*

*i)* $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$ ,

*ii)* $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$ .

**Beweis.** Wir zeigen i), ii) folgt analog.
Es gilt

$$\begin{aligned}
& x \in (M_1 \cup M_2)^c \ \big( = X \backslash (M_1 \cup M_2) \big) \\
\Leftrightarrow\ & x \in X \text{ und } x \notin M_1 \cup M_2 \\
\Leftrightarrow\ & x \in X \text{ und } (x \notin M_1 \text{ und } x \notin M_2) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X \text{ und } x \notin M_1) \text{ und } (x \in X \text{ und } x \notin M_2) \\
\Leftrightarrow\ & x \in X \backslash M_1 \text{ und } x \in X \backslash M_2 \\
\Leftrightarrow\ & x \in (X \backslash M_1) \cap (X \backslash M_2) \ (= M_1^c \cap M_2^c)\,.
\end{aligned}$$

Damit besitzen die Mengen $(M_1 \cup M_2)^c$ und $M_1^c \cap M_2^c$) dieselben Elemente, und sie sind somit gleich. □

**Definition 1.1.13** Es sei $X$ eine Menge. Die Menge $\mathscr{P}(X) := \{M : M \subset X\}$ aller Teilmengen von $X$ heißt die Potenzmenge von $X$.

**Beispiel 1.1.14** i) Es sei $X = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Dann gilt

$$\mathscr{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}\,.$$

ii) Es gilt

$$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}\,.$$

**Definition 1.1.15** Es sei $X$ eine Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}(X)$ heißt Mengensystem auf $X$.

Man beachte: Die Elemente von $\mathscr{F}$ sind Teilmengen von $X$!

**Beispiel 1.1.16** Es sei $X$ eine Menge und $M_1, M_2, M_3 \subset X$ seien irgendwelche Teilmengen von $X$.
Dann sind $\mathscr{E} := \{M_1\}, \mathscr{F} := \{M_1, M_2\}$ und $\mathscr{G} := \{M_1, M_2, M_3\}$ Mengensysteme auf $X$.

**Definition 1.1.17** Es sei $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf der Menge $X$. Wir setzen

$$\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M := \bigcup \mathscr{F} := \{x \in X : \text{ es gibt ein } M \in \mathscr{F} \text{ mit } x \in M\}\,,$$

$$\bigcap_{M\in\mathscr{F}} M := \bigcap \mathscr{F} := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathscr{F}\}\,.$$

**Bezeichnung 1.1.18** Sind $X, I$ Mengen, ist für jedes $\iota \in I$ eine Menge $M_\iota \subset X$ gegeben und ist $\mathscr{F} := \{M_\iota : \iota \in I\}$ gesetzt, so definiert man

$$\bigcup_{\iota\in I} M_\iota := \bigcup_{M\in\mathscr{F}} M \qquad \text{und}$$

$$\bigcap_{\iota\in I} M_\iota := \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M\,.$$

**Beispiel 1.1.19** $I := \mathbb{N}, X := \mathbb{Z}, M_n := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \mathbb{N}\,, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \emptyset\,.$$

**Satz 1.1.20** *(Regeln von de Morgan) Es sei $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf der Menge $X$. Dann gilt*

*i)* $\Big(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M^c$ *und*

*ii)* $\Big(\bigcap_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcup_{M\in\mathscr{F}} M^c$

*Hierbei sind alle Komplemente bzgl. $X$ gebildet.*

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Bemerkung 1.1.21** Es sei $X$ eine Menge, $M_1, M_2 \subset X$. Dann ist $\mathscr{F} := \{M_1, M_2\}$ ein Mengensystem auf $X$, und es folgt mit 1.1.20:

$$(M_1 \cup M_2)^c = \Big(\bigcup_{M\in\mathscr{F}} M\Big)^c = \bigcap_{M\in\mathscr{F}} M^c = M_1^c \cap M_2^c$$

sowie analog $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$. Wir erhalten also 1.1.12 als Spezialfall von 1.1.20.

Wir kommen nun zu dem für die gesamte Mathematik fundamentalen Begriff der Abbildung.

**Definition 1.1.22** Es seien $X, Y$ Mengen. Eine Abbildung oder Funktion $f : X \to Y$ ist durch den Definitionsbereich $X$, den Zielbereich $Y$ und eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) := y \in Y$ zuordnet, gegeben.
$f(X) := W(f) := \{f(x) : x \in X\}$ heißt Wertebereich oder Bild von $f$.
Anstelle „$f : X \to Y$" schreiben wir auch „$X \xrightarrow{f} Y$", und anstelle „$f(x) := y$" benutzen wir auch „$x \longmapsto f(x)$" („$x$ geht über nach $f(x)$").

**Definition 1.1.23** i) Sind $X, Y$ Mengen, so heißt die Menge

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

aller geordneten Paare $(x, y)$, wobei $x$ die Menge $X$ und $y$ die Menge $Y$ durchläuft, das Produkt von $X$ und $Y$. Formal ist $(x, y) := \big\{x, \{x, y\}\big\}$ definiert (und es gilt $(x, y) = (z, w)$ genau dann, wenn $x = z$ und $y = w$ gilt).

ii) Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt

$$\operatorname{graph}(f) := \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\} \quad (\subset X \times Y)$$

der Graph von $f$.

**Bemerkung 1.1.24** Eine Relation $R$ zwischen $X$ und $Y$ (d.h. eine Teilmenge von $X \times Y$ ist genau dann der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$, wenn für alle $x \in X$ genau ein $(x, y) \in R$ existiert. Man setzt dann $f(x) := y$, wobei $(x, y) \in R$.
Mithilfe solcher Relationen kann man auch den Begriff der Abbildung definieren: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist ein Tripel $(X, Y, R)$, wobei $R$ obige Eigenschaft hat.

**Beispiel 1.1.25** i) Es sei $X := Y := \mathbb{Z}$.

Man stellt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üblicherweise folgendermaßen dar:

$$
\begin{array}{llllll}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots & \bullet & \bullet\ (0,1) & \bullet\ (1,1) & \bullet\ \ldots & \\
 & & & & & \\
\ldots & \bullet\ (-1,0) & \bullet\ (0,0) & \bullet\ (1,0) & \bullet\ (2,0) & \bullet\ (3,0) \\
 & & & & \vdots & \\
\ldots & \bullet & \bullet\ (0,-1) & \bullet\ \ldots & \bullet\ \ldots & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

ii) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$ (d.h. $f(n) := 2n$).
Den Graphen $\operatorname{graph}(f) = \big\{(n, 2n) : n \in \mathbb{Z}\big\}$ kann man sich folgendermaßen vorstellen.

$$
\begin{array}{lllll}
 & & & & \bullet\ (2,4) \\
 & & & \bullet\ (1,2) & \\
 & & \bullet\ (0,0) & & \\
 & \bullet\ (-1,-2) & & & \\
\bullet\ (-2,-4) & & & &
\end{array}
$$

Es gilt $f(\mathbb{Z}) = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade}\}$.

iii) Es seien $A \subset X$ Mengen.
Die Abbildung $\iota_A : A \to X,\ \iota_A(x) := x$ heißt Inklusion von $A$ in $X$, es gilt $\mathrm{graph}(\iota_A) = \big\{(x,x) : x \in A\big\}$. Ist speziell $A = X$, so setzt man

$$\mathrm{id} := \mathrm{id}_X := \iota_X \,.$$

Es gilt $\mathrm{graph}(\mathrm{id}_X) = \big\{(x,x) : x \in X\big\} =: \Delta$.
$\Delta$ heißt auch Diagonale von $X \times X$.

**Definition 1.1.26** Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und es sei $A \subset X$ sowie $B \subset Y$.

i) $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ heißt Bild von $A$ unter $f$.

ii) $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ heißt Urbild von $B$ unter $f$.

**Bemerkung 1.1.27** Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und es sei $A \subset X,\ B \subset Y$.

i) $f(A)$ besteht genau aus denjenigen $y \in Y$, für die ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ existiert.

„Alle Punkte in $Y$, auf die irgendein $x \in A$ geworfen wird.“

ii) $f^{-1}(B)$ besteht genau aus denjenigen $x \in X$, für die ein $y \in B$ mit $f(x) = y$ existiert.

„Alle Punkte aus $X$, die in das $B$ geworfen werden.“

Man beachte, dass $f(A)$ eine TEILMENGE von $Y$ ist und dass $f^{-1}(B)$ eine TEILMENGE von $X$ ist.

iii) $f\big(\{x\}\big) = \big\{f(x)\big\}$ für alle $x \in X$.

iv) $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ kann unter Umständen mehr als ein Element enthalten, ebenso kann der Fall $f^{-1}\big(\{y\}\big) = \emptyset$ auftreten.

**Beispiel 1.1.28** i) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$. Dann ist zum Beispiel

$$f\big(\{-4,-1,2,3\}\big) = \{-8,-2,4,6\},\ f^{-1}\big(\{1,2,3,4\}\big) = \{1,2\},$$

$$f^{-1}\big(\{n\}\big) = \begin{cases} \left\{\dfrac{n}{2}\right\} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \emptyset & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases},$$

$$f^{-1}\big(\{n : n \text{ ungerade}\}\big) = \emptyset.$$

ii) Es sei $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $|\cdot|(n) := |n| := \begin{cases} n : n \geq 0 \\ -n : n < 0 \end{cases}$. Dann ist $|\cdot|(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_0$, aber auch $|\cdot|\big(\{n : n \leq 0\}\big) = \mathbb{N}_0$.
Weiter ist

$$|\cdot|^{-1}\big(\{n\}\big) = \{-n, n\} \text{ für } n \geq 0 \text{ und}$$

$$|\cdot|^{-1}\big(\{n\}\big) = \emptyset \text{ für } n < 0\ .$$

**Satz 1.1.29** *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

*i) Sind $A_1, A_2 \subset X$, so gilt*

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \textit{und} \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)\,.$$

*ii) Sind $B_1, B_2 \subset Y$, so gilt*

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \textit{und} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,.$$

**Beweis.** Wir beweisen hier den zweiten Teil von i) und den ersten Teil von ii), der Rest wird in den Übungen gezeigt.

1. Es sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$
   $\Rightarrow$ es existiert $x \in A_1 \cap A_2$ mit $f(x) = y$
   $\uparrow$
   dann folgt
   $\Rightarrow$ es existiert $x \in A_1$ mit $f(x) = y$, und es existiert $x \in A_2$ mit $f(x) = y$

   $\Rightarrow y \in f(A_1)$ und $y \in f(A_2)$

   $\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

   Dann ist jedes Element von $f(A_1 \cap A_2)$ auch ein Element von $f(A_1) \cap f(A_2)$, somit gilt $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

2. Es gilt

   $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

   $\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

   $\Leftrightarrow f(x) \in B_1$ oder $f(x) \in B_2$

   $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ oder $x \in f^{-1}(B_2)$

   $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   Also enthalten $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ und $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ dieselben Elemente, somit sind sie gleich.

□

**Satz 1.1.30** *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

*i) Ist $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf $X$, so gilt*

$$f\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\Big) = \bigcup_{A\in\mathscr{F}} f(A) \quad \textit{und} \quad f\Big(\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A\Big) \subset \bigcap_{A\in\mathscr{F}} f(A)\,.$$

*ii) Ist $\mathscr{G}$ ein Mengensystem auf $Y$, so gilt*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\Big) = \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{B\in\mathscr{G}} B\Big) = \bigcap_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$$

**Beweis.** Wir zeigen die erste Aussage von ii), der Rest wird analog bewiesen.
Es gilt

$x \in f^{-1}\big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\big)$

$\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{B\in\mathscr{G}} B$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $B \in \mathscr{G}$ mit $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein $B \in \mathscr{G}$ mit $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$

Es folgt (wie üblich) $f^{-1}\big(\bigcup_{B\in\mathscr{G}} B\big) = \bigcup_{B\in\mathscr{G}} f^{-1}(B)$. □

**Definition 1.1.31** Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

i) injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt.

ii) surjektiv, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert (also wenn $f(X) = Y$ gilt),

iii) bijektiv, falls $f$ injektiv und surjektiv ist.

**Bemerkung 1.1.32** Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

i) $f$ ist injektiv genau dann, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ höchstens einelementig für alle $y \in Y$ ist,

ii) $f$ ist surjektiv genau dann, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ mindestens einelementig für alle $y \in Y$ ist.

iii) Nach i) und ii) ist $f$ genau dann bijektiv, wenn $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ einelementig für alle $y \in Y$ ist, mit anderen Worten, zu jedem $y \in Y$ existiert genau dann ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

**Beispiel 1.1.33** i) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) := 2n$. Dann ist $f$ injektiv, aber nicht surjektiv.

ii) Es sei $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ |n| := \begin{cases} n & : \quad n \geq 0 \\ -n & : \quad n < 0 \end{cases}$.
Dann ist $f$ surjektiv, aber nicht injektiv.

iii) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ f(n) := \begin{cases} 2n & : \quad n \geq 0 \\ -2n-1 & : \quad n < 0 \end{cases}$.
Dann ist $f$ bijektiv.

In der Tat, sei zunächst $f(n_1) = f(n_2) =: m$.
1. Fall: $m$ gerade.
Dann ist $2n_1 = 2n_2$, also $n_1 = n_2$.

2. Fall: $m$ ungerade.
Dann ist $-2n_1 - 1 = -2n_2 - 1$, also $n_1 = n_2$.

Insgesamt ist $f$ injektiv.

Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

1. Fall: $m$ gerade.
Dann ist $\frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$, und es gilt $f\Big(\frac{m}{2}\Big) = m$.
2. Fall: $m$ ungerade.
Dann ist $-\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$, und es gilt $f\Big(-\frac{m+1}{2}\Big) = m$.
Also ist $f$ auch surjektiv.

Wir schließen: $f$ ist bijektiv.

**Definition 1.1.34** Es seien $X_1, X_2, X_3$ Mengen und $f_1 := X_1 \to X_2,\ f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Dann ist die Verknüpfung $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ von $f_2$ und $f_1$ durch

$$(f_2 \circ f_1)(x) := f_2\big(f_1(x)\big),\ x \in X_1,$$

definiert.

**Bemerkung 1.1.35** i) Um nicht mit der Reihenfolge durcheinander zu geraten, schreibt man sich am besten die Abbildungen folgendermaßen hin:

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$$

ii) Sind $f_k : X_k \to X_{k+1}, k = 1, 2, 3$, Abbildungen, so gilt $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.
Dies folgt sofort aus der Definition der Verknüpfung.
Wir können also die Klammern weglassen und schreiben $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ anstelle von $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ und $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$.

iii) Sind $f_1 : X_1 \to X_2$ und $f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen, so gilt

$\alpha$) Ist $f_2 \circ f_1$ surjektiv, dann ist auch $f_2$ surjektiv.

$\beta$) Ist $f_2 \circ f_1$ injektiv, dann ist auch $f_1$ injektiv.

Der Beweis wird in den Übungen geführt, die Umkehrungen gelten nicht.

**Beispiel 1.1.36** i) Es sei $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f_1(n) := n - 1$, und
$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ f_2(n) := \begin{cases} n & : \ n \geq 0 \\ -n & : \ n < 0 \end{cases}.$
Dann ist $f_2 \circ f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, und es gilt $(f_2 \circ f_1)(n) = |n - 1|,\ n \in \mathbb{Z}$.

ii) Es seien $A \subset X$ Mengen, und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Einschränkung von $f$ auf $A$

$$f|_A : A \to Y$$

ist definiert durch $f|_A(x) := f(x),\ x \in A$.
Ist $\iota_A : A \to X,\ \iota_A(x) := x$, die Inklusion von $A$ in $X$, so gilt $f|_A = f \circ \iota_A$.

Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung.
Nach 1.1.32 iii) existiert dann zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.
Wir setzen $f^{-1}(x) := y$, wobei $y = f(x)$.

**Definition 1.1.37** Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Die Abbildung

$$f^{-1} : Y \to X$$

ist definiert durch $f^{-1}(y) := x$, wobei $y = f(x)$. $f^{-1}$ heißt die Umkehrabbildung oder Inverse von $f$.

**Bemerkung 1.1.38**

i) In 1.1.26 hatten wir für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ und eine beliebige Teilmenge $B \subset Y$ das Urbild

$$f^{-1}(B) := \big\{x \in X : f(x) \in B\big\}$$

definiert. $f^{-1}(B)$ ist eine TEILMENGE von $X$.

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ kann man nur für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ definieren. In diesem Fall ist $f^{-1}(y)$ ein Element von $X$, für jedes $y \in Y$, und keine Teilmenge.

ii) Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, und es seien $\mathrm{id}_X : X \to X,\ x \mapsto x$, bzw. $\mathrm{id}_Y : Y \to Y\ y \mapsto y$, die identischen Abbildungen auf $X$ bzw. auf $Y$, siehe 1.1.25 iii).
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ erfüllt

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \text{ für alle } x \in X \quad \text{und} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \text{ für alle } y \in Y.$$

Es gilt also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

**Satz 1.1.39** *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Genau dann ist $f$ bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. In diesem Fall ist $g = f^{-1}$, insbesondere ist $g$ eindeutig bestimmt.*

**Beweis.**

1. Ist $f$ bijektiv, so hat nach obiger Bemerkung $g := f^{-1}$ die geforderten Eigenschaften.

2. Es sei $g : Y \to X$ eine Abbildung mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Nach 1.1.35 iii) ist dann $f$ injektiv (da $\mathrm{id}_X$ injektiv) und $f$ surjektiv (da $\mathrm{id}_Y$ surjektiv), insgesamt ist $f$ bijektiv.

3. Es sei $y \in Y$ beliebig. Dann existiert genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ (also $x = f^{-1}(y)$). Es folgt

$$g(y) = g\bigl(f(x)\bigr) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x = f^{-1}(y)\,.$$

Da $y \in Y$ beliebig, gilt $g = f^{-1}$.

4. Die Bijektivität von $g$ folgt wie in 2. durch Vertauschung der Rollen von $f$ und $g$.

$\square$

**Definition 1.1.40** Es sei $X$ eine Menge

i) Eine Teilmenge $R$ von $X \times X := \bigl\{(x,y) : x, y \in X\bigr\}$ heißt Relation in $X$. Anstelle von $(x,y) \in R$ schreiben wir auch $x \sim y$ und anstelle $R$ auch „$\sim$ “.

ii) Eine Relation $F$ in $X$ heißt Äquivalenzrelation auf $X$, falls

   i) $x \sim x$ (d.h. $(x,x) \in R$) für alle $x \in X$ (Reflexivität)

   ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (d.h. $(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$) für alle $x, y \in X$ (Symmetrie)

   iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$) (d.h. $(x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$) für alle $x, y, z \in R$ (Transitivität)

iii) Ist $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, so sei für $x \in X$

$$[x] := [x]_\sim := [x]_R := \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X : (x,y) \in R\}$$

die von $x$ erzeugte Äquivalenzklasse.
Ist $y \in [x]$, so heißt $y$ Repräsentant von $[x]$.

iv) $X/\sim := X/R := \bigl\{[x] : x \in X\bigr\} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt der Quotient von $X$ modulo $R$.
$q_R : X \to X/R,\ x \mapsto [x]_R$, heißt Quotientenabbildung.

**Definition 1.1.41** Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}(X)$ (also ein Mengensystem) heißt Zerlegung von $X$, falls

i) $M \neq \emptyset$ für alle $M \in \mathscr{F}$,

ii) $\cup\mathscr{F} = X$,

iii) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Rightarrow M_1 = M_2$ für alle $M_1, M_2 \in \mathscr{F}$.

Den Zusammenhang zwischen Äquivalenzklassen und Zerlegungen stellt folgender Satz her.

**Satz 1.1.42** *Es sei $X$ eine nichtleere Menge.*

*i) Ist $R$ eine Äquivalenzrelation, so ist $X/R$ eine Zerlegung von $X$.*

*ii) Ist $\mathscr{F}$ umgekehrt eine Zerlegung von $X$, so ist*

$$R_{\mathscr{F}} := \{(x, y) : \text{ es existiert ein } M \in \mathscr{F} \text{ mit } x, y \in M\}$$

*eine Äquivalenzrelation auf $X$.*

*Jeder Äquivalenzrelation entspricht genau die Zerlegung, genauer: Die Abbildung*

$$J : \{R : R \text{ ist Äquivalenzrelation auf } X\} \to \{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{ ist Zerlegung von } X\},$$
$$\text{wobei } J(R) := X/R,$$

*ist bijektiv.*

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Satz 1.1.43** *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

*i) Setzt man $x \sim y$, falls $f(x) = f(y)$, so ist „$\sim$“eine Äquivalenzrelation.*

*ii) Setzt man* $X_f := X/_\sim$ *und* $q_f : X \to X_f,\ x \mapsto [x],\ \iota_f : f(X) \to Y, y \mapsto y$*, so definiert*

$$\hat{f} : X_f \to f(X),\ [x] \mapsto f(x)\,,$$

*eine bijektive Abbildung, und es gilt*

$$f = \iota_f \circ \hat{f} \circ q_f\,.$$

$f$ *lässt sich also als Verknüpfung der drei Abbildungen* $\iota_f, \hat{f}$ *und* $q_f$ *schreiben, wobei die erste injektiv, die zweite bijektiv und die dritte surjektiv ist.*

*Wir erhalten ein sogenanntes kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow q_f & & \uparrow \iota_f \\ X_f & \xrightarrow{\hat{f}} & f(X). \end{array}$$

**Beweis.**

i) ist offensichtlich.

ii) Gilt $[x] = [y]$, so ist $f(x) = f(y)$, also ist $\hat{f}$ tatsächlich eine Abbildung. Es sei $\hat{f}\big([x]\big) = \hat{f}\big([y]\big)$. Nach Definition von $\hat{f}$ ist dann $f(x) = f(y)$, also nach Definition der Äquivalenzrelation $x \sim y$, was aber $[x] = [y]$ impliziert. Damit ist $\hat{f}$ injektiv.
Ist $z \in f(X)$, so wähle $x \in X$ mit $f(x) = z$. Dann gilt $\hat{f}\big([x]\big) = f(x) = z$, also ist $\hat{f}$ surjektiv.
Schließlich gilt $(\iota_f \circ \hat{f} \circ q_f)(x) = \iota_f\big(\hat{f}(q_f(x))\big) = \iota_f\big(\hat{f}([x])\big) = \iota_f\big(f(x)\big) = f(x),\ x \in X$. Also ist $\iota_f \circ \hat{f} \circ q_f = f$.

□

**Beispiel 1.1.44** i) Es sei $X := \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto |2n|$.
Dann ist $\mathbb{Z}_f = \big\{\{m \in \mathbb{Z} : |2m| = |2n|\} : n \in \mathbb{Z}\big\} = \big\{\{-n, n\} : n \in \mathbb{N}_0\big\}$ und $f(\mathbb{Z}) = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \text{ gerade}\} =: 2\mathbb{N}_0$. Wir erhalten

$$q_f(n) = \{-n, n\},\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

$$\hat{f}\Big(\{-n, n\}\Big) = 2n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\iota_f(n) = n,\ n \in 2\mathbb{N}_0\,.$$

ii) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} 0 & : \ n \text{ gerade} \\ 1 & : \ n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Ist $2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} : n\,\text{gerade}\}$ und $2\mathbb{Z}+1 := \{n \in \mathbb{Z} : n\,\text{ungerade}\}$, dann ist $\mathbb{Z}_f = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\}$, und $f(\mathbb{Z}) = \{0,1\}$.
Wir erhalten

$$q_f(n) = \begin{cases} 2\mathbb{Z} & : \ n \text{ gerade} \\ 2\mathbb{Z}+1 & : \ n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$\hat{f}(2\mathbb{Z}) = 0,\ \hat{f}(2\mathbb{Z}+1) = 1$ und $\iota_f$ ist die Identität auf $\{0,1\}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \\ \downarrow q_f & & \uparrow \text{id} \\ \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\} & \xrightarrow{\hat{f}} & \{0,1\} \end{array}$$

## 1.2 Rationale, reelle und komplexe Zahlen

Wir stellen in diesem Kapitel die rationalen, reellen und komplexen Zahlen mittels Konstruktion bereit.

Wir beginnen mit der Definition eines Körpers.

**Definition 1.2.1** Es sei $K$ eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und es seien $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ Abbildungen. Dann heißt $K := (K, +, \cdot)$ Körper, falls folgendes gilt (wir schreiben $x + y$ anstelle von $+(x, y)$ und $x \cdot y$ anstelle von $\cdot(x, y)$):

(K1) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in K$ (Kommutativität).

(K2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$ (Assoziativität).

(K3) Es existiert ein Element $0_K \in K$ mit $x + 0_K = x$ für alle $x \in K$ (Existenz der Null).

(K4) Es existiert ein Element $1_K \in K \backslash \{0_K\} =: K^*$ mit $1_K \cdot x = x$ für alle $x \in K$ (Existenz der Eins).

(K5) Für alle $x \in K$ existiert ein Element $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0_K$, und für alle $x \in K^*$ existiert ein Element $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = 1_K$ (Existenz der Inversen).

(K6) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in K$ (Distributivität).

Bevor wir allgemeine Eigenschaften von Körpern beweisen (wie z.B. die Eindeutigkeit der Inversen), wollen wir den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen konstruieren.
Der Kürze halber sei zunächst $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0\}$. Wir starten mit der Menge

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* := \big\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\big\}$$

aller geordneten Paare $(p, q)$, wobei $p$ die Menge $\mathbb{Z}$ und $q$ die Menge $\mathbb{Z}^*$ durchläuft.
Wir setzen $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, falls $p_1 q_2 = p_2 q_1$ gilt.

**Lemma 1.2.2** *„$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

**Beweis.** Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, wir beweisen die Transitivität:
Es seien $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$ und $(p_2, q_2) \sim (p_3, q_3)$.
Dann gilt (definitionsgemäß) $p_1 q_2 = p_2 q_1$ und $p_2 q_3 = p_3 q_2$.
Hieraus folgt $p_1 q_2 q_3 = p_2 q_1 q_3 = p_3 q_2 q_1$.
Da $q_2 \neq 0$, folgt $p_1 q_3 = p_3 q_1$, also $(p_1, q_1) \sim (p_3, q_3)$. □

**Definition 1.2.3** Es sei $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, falls $p_1 q_2 = p_2 q_1$, und es sei $\frac{p}{q} := \big[(p, q)\big]_\sim$.

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/_\sim = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$$

heißt Menge der rationalen Zahlen.

Wir wollen nun die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ definieren.

Im Falle der Addition müssen wir die Abbildung $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definieren, die jedem Paar $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ von Äquivalenzklassen eine weitere Äquivalenzklasse (nämlich die zukünftige Summe) zuordnet. Wir möchten gerne die

Summe $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ als $\frac{ps+rq}{qs}$ setzen.
Hierzu müssen wir unbedingt nachrechnen, dass $\frac{ps+rq}{qs}$ nicht von der Wahl der Repräsentanten von $\frac{p}{s}$ und $\frac{r}{s}$ abhängt, wir müssen also zeigen:

**Lemma 1.2.4** *Gilt $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ und $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$, dann ist $\frac{p_1 s_1 + r_1 q_1}{q_1 s_1} = \frac{p_2 s_2 + r_2 q_2}{q_2 s_2}$ für alle $p_1, p_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ und alle $q_1, q_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^*$.*

**Beweis.** Aus $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ und $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$ folgt aus der Definition der Äquivalenzklassen $\frac{p}{q} := \big[(p,q)\big]_\sim$, dass $p_1 q_2 = p_2 q_1$ und $r_1 s_2 = r_2 s_1$ gilt.
Es folgt hieraus

$$\begin{aligned}&(p_1 s_1 + r_1 q_1)(q_2 s_2) = p_1 q_2 s_1 s_2 + r_1 s_2 q_1 q_2 \\ &= p_2 q_1 s_1 s_2 + r_2 s_1 q_1 q_2 = (p_2 s_2 + r_2 q_2)(q_1 s_1)\,.\end{aligned}$$

Dies bedeutet definitionsgemäß gerade

$$\frac{p_1 s_1 + r_1 q_1}{q_1 s_1} = \frac{p_2 s_2 + r_2 q_2}{q_2 s_2}\,.$$ □

Mit den gleichen Argumenten zeigt man, dass die Multiplikation

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}$$

wohldefiniert ist.

**Satz 1.2.5** *Versehen mit der Addition*

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps+rq}{qs}$$

*und der Multiplikation*

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}$$

*ist $\mathbb{Q}$ ein Körper. Das Nullelement ist $\frac{0}{1}$, das Einselement ist $\frac{1}{1}$.
Das additive Inverse von $\frac{p}{q}$ ist $\frac{-p}{q}$ (d.h. - $\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$), und das multiplikative Inverse von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ ist $\frac{q}{p}$ (d.h. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$).*

**Beweis.** Wir zeigen exemplarisch nur die Existenz der multiplikativen Inversen und das Distributivgesetz (K6), alle anderen Axiome rechnet man ähnlich nach.

1. Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, dh. $\frac{p}{q} \neq \frac{0}{1}$. Dann ist $p = p \cdot 1 \neq q \cdot 0 = 0$, also ist $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ und damit $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, und es gilt

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} = \frac{1}{1},$$

wobei die letzte Gleichung natürlich aus der Definition der Äquivalenzrelation folgt.

2. $$\frac{n}{m}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{nm}{mm} \cdot \left(\frac{ps + rq}{qs}\right)$$
$$= \frac{(nm)(ps + rq)}{(mm)(qs)} = \frac{(np)(ms) + (nr)(mq)}{(mq)(ms)}$$
$$= \frac{np}{mq} + \frac{nr}{ms} = \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{r}{s}\right).$$

Bei der ersten Gleichung haben wir die Definition der Äquivalenzrelation (es gilt danach $\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$ für $k \neq 0$) und die Definition der Addition verwendet, bei der zweiten die der Multiplikation, bei der vierten die der Addition und bei der fünften wieder die der Multiplikation. □

**Bemerkung 1.2.6** Es sei $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto \frac{n}{1}$.
Dann ist $\iota$ injektiv ($\frac{n}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow n \cdot 1 = 1 \cdot m$, also $n = m$), und es gilt

i) $\iota(n + m) = \dfrac{n + m}{1} = \dfrac{n \cdot 1 + 1 \cdot m}{1 \cdot 1} = \dfrac{n}{1} + \dfrac{m}{1} = \iota(n) + \iota(m)$,

ii) $\iota(nm) = \dfrac{nm}{1} = \dfrac{nm}{1 \cdot 1} = \dfrac{n}{1} \cdot \dfrac{m}{1} = \iota(n) \cdot \iota(m)$,

iii) $\iota(0) = \dfrac{0}{1},\ \iota(1) = \dfrac{1}{1}$.

$\iota$ erhält also die Addition und die Multiplikation (es ist dasselbe, ob wir vor oder nach der Anwendung von $\iota$ addieren oder multiplizieren), und auf Grund der Injektivität ist $\iota : \mathbb{Z} \to \iota(\mathbb{Z})$ bijektiv.
Wir identifizieren daher $\mathbb{Z}$ mit $\iota(\mathbb{Z})$ und schreiben $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ein Beispiel für einen ungewöhnlichen Körper enthält

**Beispiel 1.2.7** Es sei $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit der Addition

$$0 + 0 := 1 + 1 := 0\,,$$
$$0 + 1 := 1 + 0 := 1\,,$$

und der Multiplikation

$$0 \cdot 0 := 0 \cdot 1 := 1 \cdot 0 := 0\,,$$
$$1 \cdot 1 := 1\,,$$

ist ein Körper mit Nullelement $0_{\mathbb{F}_2} = 0$ und Einselement $1_{\mathbb{F}_2} = 1$.
Dies wird in den Übungen gezeigt.

Obiger Körper hat eine einfache Interpretation.
Wechseln wir die Bezeichnungen und setzen $g := 0$ und $u := 1$, wobei $g$ für „gerade Zahl" und $u$ für „ungerade Zahl" steht, so beschreibt obiger Körper gerade das Addieren und Multiplizieren gerader bzw. ungerader ganzer Zahlen: $u + u = g + g = g,\ g + u = u + g = u, g \cdot g = g \cdot u = u \cdot g = g,\ u \cdot u = u$.

**Bezeichnung 1.2.8** Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Anstelle von $x \cdot y$ schreiben wir $xy$, anstelle von $(x \cdot y) + z$ schreiben wir $xy + z$ (Punktrechnung vor Strichrechnung). Weiter verwenden wir $x - y$ anstelle von $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ (oder $x/y$) statt $xy^{-1}$.

**Satz 1.2.9** *Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt*

*i)* *Das Nullelement $0_K$ und das Einselement $1_K$ sind eindeutig bestimmt.*

*ii)* *Sind $a, b \in K$, dann existiert genau ein $x \in K$ mit $a + x = b$. Es gilt $x = b - a$.*

*iii)* *Ist $a \in K^*$ und $b \in K$, dann existiert genau ein $x \in K$ mit $ax = b$. Es gilt $x = \frac{b}{a}$.*

*iv)* *Die inversen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind eindeutig bestimmt.*

*Es gelten weiter folgende Rechenregeln:*

*v)* $xy = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *oder* $y = 0$,

$-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$ *(d.h.* $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$*), falls* $x \neq 0$,

$-(xy) = (-x)y = x(-y)$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ *(d.h.* $\frac{1}{xy} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}$*), falls* $x, y \in K^*$.

**Beweis.**

i) Es sei $a \in K$ mit $x + a = x$ für alle $x \in K$. Dann gilt für $x = 0_K$:

$$a = a + 0_K = 0_K + a = 0_K, \text{ es war also } a = 0_K.$$

Der zweite Teil von i) wird analog gezeigt.

ii) Es seien $a, b \in K$ und $x := b - a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a + x &= a + (b - a) = a + (-a + b) \\ &= \big(a + (-a)\big) + b = 0_K + b = b + 0_K = b\,. \end{aligned}$$

Es sei $x' \in K$ mit $a + x' = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0_K = x' + (a - a) = (x' + a) - a \\ &= (a + x') - a = b - a\,. \end{aligned}$$

iii) wird wie ii) gezeigt.

iv) folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen von ii) bzw. iii) für $b = 0$ bzw. $b = 1$.

v) Wir beweisen exemplarisch $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \neq 0_K$.
Es gilt

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1_K$$

und wegen $x^{-1}x = 0$ muss $x^{-1} \neq 0$ gelten. $x^{-1}$ hat also ein Inverses $(x^{-1})^{-1}$. Für dieses gilt auch $x^{-1}(x^{-1})^{-1} = 1_K$. Da das Inverse aber nach iv) eindeutig ist, muss $x = (x^{-1})^{-1}$ gelten. □

**Definition/Bemerkung 1.2.10** Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Aufgrund der Assoziativgesetze gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \text{und} \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$

Wir können also die Klammern weglassen und schreiben

$$\begin{aligned}
&x+y+z \ \text{ anstelle von } \ x+(y+z) \ \text{ und } \ (x+y)+z\,, \ \text{ sowie}\\
&x\cdot y\cdot z \ \text{ anstelle von } \ x\cdot(y\cdot z) \ \text{ und } \ (x\cdot y)\cdot z\,.
\end{aligned}$$

Dasselbe gilt für mehr als drei Summanden bzw. Faktoren. Wir setzen

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu := x_1 + x_2 + \ldots x_n \qquad \text{und} \qquad \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\,,$$

wenn $x_1,\ldots,x_n \in K,\ n \in \mathbb{N}$.
Gilt $x = x_1 = \ldots = x_n \in K$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
n\cdot x &:= \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x = \underbrace{x+x+\ldots+x}_{n \text{ Summanden}} \qquad \text{und}\\
x^n &:= \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=1}^{n} x = \underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n \text{ Faktoren}}\,.
\end{aligned}$$

**Achtung:** $n\cdot x$ ist im Allgemeinen nicht das Produkt zweier Körperelemente; ist nämlich $K = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ (siehe Beispiel 1.2.7), so ist zwar $1\cdot 1 = 1$, aber $2\cdot 1 = 1+1 = 0$.
Allgemein gilt

$$n\cdot 1 = \begin{cases} 0 & : \ n \text{ gerade} \\ 1 & : \ n \text{ ungerade} \end{cases}\,.$$

Wir setzen noch

$$\begin{aligned}
(-n)\cdot x &:= -(n\cdot x), \quad 0\cdot x := 0\,,\\
x^{-n} &:= (x^{-1})^n \ (x \neq 0), \quad x^0 := 1_K, \quad n\in\mathbb{N},\ x\in K\,,
\end{aligned}$$

und wir haben somit beliebige Vielfache $n\cdot x$ und beliebige Potenzen $x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ erklärt.

**Satz 1.2.11** *Es seien $x, x_1, x_2 \in K$ und $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

*i)* $n_1\cdot x + n_2\cdot x = (n_1+n_2)\cdot x$,

*ii)* $n\cdot(x_1x_2) = n\cdot x_1 + n\cdot x_2$,

*iii)* $n_1\cdot(n_2\cdot x) = (n_1n_2)\cdot x$,

*iv)* $x^{n_1}\cdot x^{n_2} = x^{n_1+n_2},\ x\neq 0$,

*v)* $x_1^n\cdot x_2^n = (x_1\cdot x_2)^n,\ x_1,x_2\neq 0$,

*vi)* $(x^{n_1})^{n_2} = x^{n_1n_2},\ x\neq 0$.

**Beweis.** (in den Übungen) □

Ab jetzt werden wir die Körperaxiome, ihre Folgerungen und die Bezeichnungen stillschweigend verwenden:

i) Es seien $x, a_0, \dots, a_n,\ b_0, \dots, b_m$ Elemente eines Körpers $K$, so gilt z.B.

$$\begin{aligned} x\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu &= x(a_0 + \ldots + a_n) = xa_0 + xa_1 + \ldots + xa_n \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} xa_\nu \end{aligned}$$

oder

$$x\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} x(a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} xa_\nu + xb_\nu$$

wie auch

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\Big) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\mu .$$

„Allgemeines Distributivgesetz“

ii) Weiter kann man schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu &= a_1 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu+1} \quad \text{oder} \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu &= \sum_{\nu=2}^{n+1} a_{\nu-1} \quad \text{wie auch} \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{n-\nu+1}\,. \end{aligned}$$

Eine wichtige mathematische Beweismethode ist das Prinzip der vollständigen Induktion: Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

**Prinzip der vollständigen Induktion:**

i) Es ist $A(n)$ richtig (Induktionsanfang).

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ (oder auch von $A(1), \ldots, A(n)$), der Induktionsannahme, folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$ (Induktionsschritt).

Dann ist $A(n)$ richtig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Manchmal will man auch Aussagen $A(n)$ für alle $n \geq N$ ($N \in \mathbb{N}_0$ fest) beweisen. Dann macht man den Induktionsanfang für $A(N)$ (anstelle $A(n)$) und den Induktionsschritt für alle $n \geq N$.

Ein Fall für die vollständige Induktion ist

**Satz 1.2.12** *Es gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

*für alle* $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis.**

1. Induktionsanfang $n = 1$:
   Es gilt $\sum\limits_{\nu=1}^{1} \nu = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$, d.h. die Aussage gilt für $n = 1$.

2. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:
   Induktionsannahme: Es gelte $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Dann folgt

   $$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \left( \sum_{\nu=1}^{n} \nu \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

   d. h. die Aussage gilt auch für $n + 1$.

Aus 1. und 2. folgt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung. □

**Satz 1.2.13** *(Geometrische Summenformel) Es sei $K$ ein Körper, und es sei $x \in K \setminus \{1_K\}$. Dann gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \frac{1_K - x^n}{1_K - x}$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$.*
*(Beachte: $\frac{z}{w} := zw^{-1}$, $x^0 := 1_K$, nach 1.2.8)*

**Beweis.** (durch vollständige Induktion)

1. Induktionsanfang $n = 1$:
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \sum_{\nu=0}^{0} x^\nu = x^0 = 1_K = \frac{1_K - x}{1_K - x}\,.$$

2. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:
Es gelte $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu = \frac{1-x^n}{1-x}$. Dann folgt
$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu &= \frac{1-x}{1-x}x^n + \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.\end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt die Behauptung. □

**Definition 1.2.14** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned}&n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \text{ und} \\ &0! := 1.\end{aligned}$$

**Satz 1.2.15** *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Menge*

$$\Pi_n := S_n := \big\{\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \pi \textit{ ist bijektiv}\big\}$$

*genau $n!$ Elemente. $S_n$ heißt Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.*

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Definition 1.2.16** (Binomialkoeffizienten)
Es seien $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Man setzt

$$\binom{n}{\nu} := \frac{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}{\nu!} = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{n-k+1}{k} \text{ für } \nu \geq 1 \text{ und}$$

$$\binom{n}{0} := 1.$$

**Bemerkung 1.2.17** Aus der Definition folgt sofort für $n, \nu \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \binom{n}{n-\nu}, \text{ falls } \nu \leq n, \text{ sowie}$$

$$\binom{n}{\nu} = 0, \text{ falls } \nu > n.$$

**Satz 1.2.18** *Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\nu \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}.$$

**Beweis.** 1. Fall: $1 \leq \nu \leq n$. Es gilt (nach 1.2.17)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} &= \frac{n!}{(\nu-1)!(n-(\nu-1))!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \\
&= \frac{n!\nu}{\nu!(n+1-\nu)!} + \frac{n!(n+1-\nu)}{\nu!(n+1-\nu)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{\nu!(n+1-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\nu = n+1$. Dann gilt

$$\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = \binom{n+1}{n+1}.$$

3. Fall: $\nu > n+1$. Dann gilt

$$\binom{n}{\nu} + \binom{n}{n+1} = 0 + 0 = \binom{n+1}{\nu}.$$

□

**Definition 1.2.19** Ist $A$ eine endliche Menge, so sei $|A|$ die Anzahl der Elemente von $A$. Ist $A$ keine endliche Menge, so heißt $A$ unendliche Menge, und wir schreiben $|A| = \infty$.

**Satz 1.2.20** *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\nu \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$\left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n\} : |M| = \nu\right\}\right| = \binom{n}{\nu}.$$

*Insbesondere ist $\binom{n}{\nu} \in \mathbb{N}_0$ für alle $n, \nu \in \mathbb{N}_0$.*

**Beweis.** Es sei $\alpha_\nu^n := \left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n\} : |M| = \nu\right\}\right|$.

1. Ist $\nu > n$, dann gilt $\alpha_\nu^n = 0 = \binom{n}{\nu}$,

   $\alpha_0^n = 1 = \binom{n}{0}$, (Beachte: $\emptyset \subset \{1, \ldots, n\}$),

   $\alpha_1^n = n = \binom{n}{1}$, $\quad \alpha_n^n = 1 = \binom{n}{n}$.

2. Vollständige Induktion über $n$.

   i) $n = 1$: Nach 1. gilt $\alpha_0^1 = \binom{n}{0},\ \alpha_1^1 = \binom{1}{1},\ \alpha_\nu^1 = \binom{1}{\nu},\ \nu > 1$.

   ii) $n \mapsto n + 1$. Es gelte $\alpha_\nu^n = \binom{n}{\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu^{n+1} &= \left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n+1\} : |M| = \nu\right\}\right| \\
&= \left|\left\{M \subset \{1, \ldots, n\} : |M| = \nu\right\}\right| \\
&\quad + \left|\left\{\{n+1\} \cup M : M \subset \{1, \ldots, n\}, |M| = \nu - 1\right\}\right| \\
&= \binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu - 1} = \binom{n+1}{\nu}.
\end{aligned}$$

□

Aus der Gleichung $\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \binom{n+1}{\nu}$ kann man unter Zuhilfenahme von $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ die Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen. Dies veranschaulicht das Pascalsche Dreieck, in dem die Summe zweier nebeneinander stehender Zahlen gerade die darunter stehende Zahl ergibt.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & & & & & & & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \dots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

**Satz 1.2.21** *(Binomischer Lehrsatz)* *Es sei $K$ ein Körper und $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu}.$$

**Beweis.** (durch vollständige Induktion)

1. $n = 0 : (x+y)^0 = 1_K = x^0 y^0 = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{0}{\nu} x^\nu y^{0-\nu}$.
2. $n \mapsto n+1$ : Es gelte $(x+y)^n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu}$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} x^{\nu+1} y^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n+1} \tbinom{n}{\mu-1} x^\mu y^{n-(\mu-1)} + \sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n}{\nu-1} x^\nu y^{n+1-\nu} + \tbinom{n}{n} x^{n+1} y^0 \\
&\quad + \tbinom{n}{0}\cdot x^0 y^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n}{\nu} x^\nu y^{n+1-\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \Big[ \underbrace{\tbinom{n}{\nu-1} + \tbinom{n}{\nu}}_{= \binom{n+1}{\nu}} \Big] x^\nu y^{n+1-\nu} \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} x^\nu y^{n+1-\nu} .
\end{aligned}
$$

□

**Definition 1.2.22** Es sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Relation $<$ in $K$ heißt Ordnung, falls gilt

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen
$x < y,\ y < x,\ x = y$ (Trichotomie).

(O2) $x < y$ und $y < z$ impliziert $x < z$ für alle $x, y, z \in K$ (Transitivität).

(O3) $x < y$ impliziert $x + z < y + z$ für alle $x, y, z \in K$ (Monotonie der Addition).

(O4) $x < y$ und $0_K < z$ impliziert $xz < yz$ für alle $x, y, z \in K$ (Monotonie der Multiplikation).

$K = (K, +, \cdot, <)$ heißt dann geordneter Körper.

**Bezeichnung 1.2.23** Es sei $K$ ein geordneter Körper und $x, y \in \mathbb{K}$.

i) Anstelle $x < y$ schreiben wir auch $y > x$.
Gilt $x = y$ oder $x < y$, so schreiben wir $x \leq y$ oder $y \geq x$.

ii) $x$ heißt positiv, falls $x > 0_K$,
$x$ heißt negativ, falls $x < 0_K$,
$x$ heißt nichtnegativ, falls $x \geq 0_K$.

iii) $K^* := K \setminus \{0\}$ (schon definiert)
$K^+ := \{x \in K : x > 0_K\}$,
$K^- := \{x \in K : x < 0_K\}$,
$K_0^+ := \{x \in K : x \geq 0_K\}$.

Es sei $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ der Körper der rationalen Zahlen. Ist $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so gilt $\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$ (da $(-p)q = p(-q)$ in $\mathbb{Z}$).

Wir können also ohne Einschränkung $0 < q$ (d.h. $q \in \mathbb{N}$) voraussetzen. Hier bedeutet $<$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$.
Sind nun $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, so setzt man

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \quad \text{falls } p_1 q_2 < p_2 q_1 \text{ gilt.}$$

**Satz 1.2.24** *$\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper.*

**Beweis.** Wir zeigen exemplarisch (03), den Rest der Ordnungsaxiome weist man ähnlich nach.
Seien dann $r, p_1, p_2 \in \mathbb{Z},\ s, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}\,.$$

Dann gilt $p_1 q_2 < p_2 q_1$. Hieraus ergibt sich

$$p_1 p_2 ss + r q_1 q_2 s < p_2 q_1 ss + r q_1 q_2 s\,,$$

also gilt

$$(p_1 s + r q_1) q_2 s < (p_2 s + r q_2) q_1 s\,,$$

was

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{r}{s} = \frac{p_1 s + r q_1}{q_1 s} < \frac{p_2 s + r q_2}{q_2 s} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{r}{s}$$

impliziert. $\square$

**Bemerkung 1.2.25** Wir hatten in 1.2.6 bemerkt, dass die „natürliche Einbettung“

$$\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto \frac{n}{1},$$

die Addition und die Multiplikation respektiert.
$\iota$ erhält auch die Ordnung, d.h.

$$\iota(n) < \iota(m) \text{ genau dann, wenn } n < m.$$

**Satz 1.2.26** *Es sei $K$ ein geordneter Körper, und es seien $x, y \in K$. Dann gilt* *i)* $x > 0_K$ *genau dann, wenn* $-x < 0_K$.

*ii)* *Aus* $x, y < 0_K$ *folgt* $xy > 0_K$.

*iii)* $x^2 > 0_K$ *genau dann, wenn* $x \neq 0$.

*iv)* $1_K > 0_K$.

*v)* *Aus* $y > x > 0_K$ *folgt* $-y < -x < 0_K$ *und* $x^{-1} > y^{-1} > 0_K$.

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Satz 1.2.27** *(Bernoullische Ungleichung)* *Es sei* $K$ *ein geordneter Körper und* $x \in K$ *mit* $x \geq -1_K$. *Dann gilt*

$$(1_K + x)^n \geq 1_K + nx$$

*für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

**Beweis.** (durch vollständige Induktion)

1. $n = 0$:
$$(1_K + x)^0 = 1_K = 1_K + 0 \cdot x\,.$$

2. $n \mapsto n+1$): Es gelte $(1_K + x)^n \geq 1_K + n \cdot x$. Dann folgt mit (04), (03) und 1.2.25 iii):
$$\begin{aligned}(1_K + x)^{n+1} &= (1_K + x)(1_K + x)^n \geq (1_K + x)(1_K + n \cdot x)\\ &= 1_K + n \cdot x + x + n \cdot x^2 = 1_K + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2\\ &\geq 1_K + (n+1) \cdot x\,.\end{aligned}$$

□

**Definition 1.2.28** Es sei $K$ ein geordneter Körper und $x \in K$.

$$|x| := \begin{cases} x : & x \geq 0 \\ -x : & x < 0 \end{cases}$$

heißt der Betrag (oder Absolutbetrag) von $x$. Die Abbildung $|\cdot| : K \to K, x \mapsto |x|$, heißt Betragsfunktion.

**Bemerkung 1.2.29** Es sei $K$ ein geordneter Körper.

i) Dann gilt: $|x| = |-x|$; $x, -x \leq |x|$; $|xy| = |x||y|$ für alle $x, y \in K$.

ii) Ist $x \in K$ und $y > 0$, so gilt

$$|x| < y \text{ genau dann, wenn } -y < x < y.$$

**Satz 1.2.30** *(Dreiecksungleichung)* *Es sei $K$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \,.$$

**Beweis.** 1. Fall: $x + y \geq 0$. Dann gilt

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

wegen 1.2.29 i) und der Monotonie der Addition.
2. Fall: $x + y < 0$. Dann gilt

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| \,,$$

ebenfalls wegen 1.2.29 i) und der Monotonie der Addition. □

**Korollar 1.2.31** *Es sei $K$ ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \,.$$

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Definition 1.2.32** Es sei $K$ ein geordneter Körper und $M \subset K$ eine Teilmenge von $K$.

i) $x \in K$ heißt obere (untere) Schranke für $M$, falls $m \leq x$ (bzw. $m \geq x$) für alle $m \in M$.

ii) $M$ heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $M$ eine obere (untere) Schranke besitzt.

iii) $M$ heißt beschränkt, falls ein $x \in K$ existiert mit $|m| \leq x$ für alle $m \in M$.

iv) Eine obere (untere) Schranke $x$ für $M$ heißt Supremum (Infimum) von $M$, falls $x \leq y$ (bzw. $x \geq y$) für alle oberen (unteren) Schranken $y$ für $M$ gilt.

v) Ein Supremum (Infimum) $x$ heißt Maximum (Minimum) von $M$, falls zusätzlich $x \in M$ gilt.

**Bemerkung 1.2.33** i) $M$ ist beschränkt genau dann, wenn $M$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

ii) Supremum und Infimum müssen nicht existieren, auch wenn die vorliegende Menge beschränkt ist.
Ist jedoch $x$ ein Supremum (bzw. Infimum), so ist $x$ aufgrund (O1) schon eindeutig bestimmt und man setzt

$$\sup M := x \quad (\text{bzw. } \inf M := x)\,.$$

iii) Auch wenn die Menge $M$ ein Supremum (Infimum) besitzt, so braucht sie kein Maximum (bzw. Minimum) zu besitzen, z.B. ist dies bei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ der Fall:
$\sup M = 0$, aber wegen $0 \notin M$ hat $M$ kein Maximum.
Besitzt jedoch $M$ ein Maximum (Minimum) $x$, so ist dieses natürlich wieder eindeutig bestimmt, und man setzt

$$\max M := x \quad (\text{bzw. } \min M := x)\,.$$

**Satz 1.2.34** *(Archimedes)* *Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x \geq y$.*

**Beweis.** Es sei $x = \frac{p_1}{q_1}$, $y = \frac{p_2}{q_2}$ mit $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.
Wählen wir $n := p_2 q_1$, so folgt

$$\begin{aligned} n \cdot x = \frac{n}{1} \cdot x &= \frac{n \cdot p_1}{q_1} = \frac{p_2 q_1 p_1}{q_1} \\ &= \underbrace{\frac{p_1 q_2}{1}}_{\geq 1,\ \text{da } p_1, q_2 \in \mathbb{N}} \cdot \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} \\ &\geq \frac{p_2 q_1}{q_1 q_2} = \frac{p_2}{q_2} = y\,. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.2.35** Fassen wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auf, so ist $\mathbb{N}$ nach unten durch $n = 1$ beschränkt.
Aus 1.2.34 folgt, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist.

**Bemerkung 1.2.36** In jedem geordneten Körper hat die Gleichung $n \cdot x = y$ für jedes $y \in K$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h.

> Für alle $y \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in K$ mit $n \cdot x = y$.

Dies folgt aus $n \cdot 1_K > 0$ (Monotonie der Addition) und 1.2.9 iii).
Leider sieht dies bei Gleichungen $x^n = y$ ganz anders aus.

**Satz 1.2.37** *In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung.*

**Beweis.**

1. Es sei $p \in \mathbb{Z}$ und $p^2$ gerade sei gerade. Dann ist auch $p$ gerade. Nehmen wir nämlich an, dass $p$ ungerade ist, d.h. $p = 2r + 1, r \in \mathbb{Z}$, gilt, dann ist $p^2 = 4r^2 + 4r + 1$ auch ungerade. Dies ist ein Widerspruch, also ist $p$ gerade.

2. Wir nehmen an, dass $x^2 = 2$ für ein $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Ohne Einschränkung sei $x > 0$. Betrachten wir die Menge $\{r \in \mathbb{N} : x = \frac{s}{r},\ s \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge besitzt ein kleinstes Element $q$. Es gibt also eine Darstellung $x = \frac{p}{q}$ mit $q$ minimal. Es folgt $\frac{p^2}{q^2} = x^2 = 2$ und somit $p^2 = 2q^2$. Also ist $p^2$ gerade und nach 1. ist auch $p$ gerade, d.h. $p = 2p_0$ mit einem $p_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $2q^2 = 4p_0^2$, also $q^2 = 2p_0^2$. Somit ist $q^2$ gerade, also ist mit 1. auch $q = 2q_0$ mit einem $q_0 \in \mathbb{N}$.
   Es folgt $x = \frac{p}{q} = \frac{2p_0}{2q_0} = \frac{p_0}{q_0}$, insbesondere besitzt $x$ eine Darstellung $\frac{p_0}{q_0}$ mit $q_0 < q$, ein Widerspruch.
   Die Annahme $x^2 = 2$ und das Axiom, dass jede Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt, ist nicht vereinbar. Also ist die Annahme falsch, ihr logisches Gegenteil richtig, und damit existiert **kein** $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

□

Auf der anderen Seite kann man das „babylonische Wurzelziehen“ verwenden, um Näherungslösungen zu erlangen:
Wir starten mit $x_1 := 2$ und setzen rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Idee hinter diesem Verfahren ist: Würde $x_n^2 = 2$ gelten, dann wäre $x_n = \frac{2}{x_n}$, andernfalls ist $x_n \neq \frac{2}{x_n}$. Man hofft, dass das arithmetische Mittel $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ ein besserer Näherungswert ist.
Mein Rechner liefert nach $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1,5\\
x_3 &= 1,41666667\\
x_4 &= 1,41421568627451\\
x_5 &= 1,41421356237469\\
x_6 &= 1,414213562373095\\
x_7 &= 1,414213562373095\\
x_8 &= 1,414213562373095
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= 4\\
x_2^2 &= 2,25\\
x_3^2 &= 2,0069\cdots\\
x_4^2 &= 2,0000060\\
x_5^2 &= 2,0000000000045\ldots\\
x_6^2 &= 2
\end{aligned}$$

Der letzte Wert ist auf jeden Fall falsch, da ja keine rationale Zahl $x$ mit $x^2 = 2$ existieren kann und der Rechner nur rationale Zahlen (noch nicht einmal alle) darstellen kann.
Grund für den Fehler ist natürlich die beschränkte Genauigkeit des Rechners.
Würde man statt dessen einen Rechner mit beliebiger Genauigkeit verwenden, so erhielte man:

1. Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass sich die Werte $x_n$ für $n \geq N$ nur ab der $(s+1)$-ten Nachkommastelle unterscheiden, d.h. es

gilt

$$|x_n - x_m| < 10^{-s} \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

Anders ausgedrückt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

2. Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so das sich die Werte $x_n^2$ von 2 für $n \geq N$ nur ab der $(s+1)$-ten Nachkommastelle unterscheiden, d.h. es gilt

$$|x_n^2 - 2| < 10^{-s} \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

Anders ausgedrückt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n^2 - 2| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Wir werden später zeigen, dass **keine** Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert, so dass gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N\,.$$

Daher werden wir die sogenannten reellen Zahlen konstruieren, und dort gibt es ein $x > 0$ mit obiger Eigenschaft. Dieses $x$ erfüllt dann auch $x^2 = 2$ und wir nennen dieses $x$ dann $\sqrt{2}$.

Mit der Definition

$$x_1 := 2,\ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

haben wir jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ zugeordnet, d.h. wir haben eine Abbildung

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad x(n) := x_n\,,$$

definiert. Eine solche Abbildung nennt man auch Folge in $\mathbb{Q}$ oder Folge rationaler Zahlen. Allgemeiner geben wir folgende

**Definition 1.2.38** Ist $X$ eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$x : \mathbb{N} \to X$$

eine Folge in $X$. Die Menge aller Folgen in $X$ wird mit $X^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

**Bemerkung/Bezeichnung 1.2.39** i) Ist $x : \mathbb{N} \to X$ eine Folge in $X$, so schreibt man traditionell

$$x_n := x^{(n)} := x(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

(sogenannte Indexschreibweise) und setzt

$$(x_1, x_2, \ldots) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} := x.$$

ii) Man verwechsle die Folge $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht mit der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder!
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N} \to X$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Teilmenge von $X$.

iii) Sind $J$ und $X$ Mengen, so bezeichnet man mit $X^J$ die Menge aller Abbildungen $J$ nach $X$, es ist also

$$X^J = \{f : J \to X : \ f \text{ ist eine Abbildung}\}.$$

Etwas allgemeiner als in 1.2.38 bezeichnet man auch Elemente von $X^{\mathbb{N}_0}$ oder von $X^J$, wobei $J = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$, $(N \in \mathbb{Z}$ fest), als Folgen in $X$. Man setzt wieder

$$x_n := x^{(n)} := x(n),$$

und schreibt

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

anstelle von $x : \mathbb{N}_0 \to X$, und man schreibt

$$(x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots) := (x_n)_{n\geq N} := (x^{(n)})_{n\geq N}$$

anstelle von

$$x : \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \to X.$$

**Beispiel 1.2.40** i) Es sei $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$. Gemäß unserer Konvention schreiben wir $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ anstelle von $x$. Weitere Beispiele für Folgen rationaler Zahlen (d.h. Folgen in $\mathbb{Q}$):

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, ) \ldots &= (n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \ldots) &= (-\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}, \\ (1, q, q^2, \ldots) &= (q^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{für } q \in \mathbb{Q} \text{ fest.} \end{aligned}$$

Die letzteren Schreibweisen sind zu empfehlen, denn bei der ersteren Schreibweise kann man nur wenige Folgenglieder angeben, die restlichen muss man „raten“.

ii) (Konstante Folgen) Es sei $X$ eine Menge und $a \in X$ ein Element von $X$. Dann setzt man

$$a_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to X, \quad n \mapsto a\,,$$

d.h. $a_{\mathbb{N}} = (a, a, a, \ldots) = (a)_{n \in \mathbb{N}}$.
Diese Folgen nehmen nur einen Wert an (hier $a$), und sie heißen konstante Folgen.

**Definition 1.2.41** Es sei $K$ ein geordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $K$ heißt

i) monoton wachsend (fallend), falls $x_{n+1} \geq x_n$ ( $x_{n+1} \leq x_n$), $n \in \mathbb{N}$,

ii) monoton, falls sie monoton wachsend oder fallend ist,

iii) streng monoton wachsend (fallend), falls $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$), $n \in \mathbb{N}$,

iv) nach oben beschränkt (nach unten beschränkt, beschränkt), falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt (nach unten beschränkt, beschränkt) ist.

**Beispiel 1.2.42** Es sei $K = \mathbb{Q}$.

i) Die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist (siehe oben) streng monoton wachsend, sie ist nach unten beschränkt, eine untere Schranke ist z.B. $m = 1$.
$(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach 1.2.35 nicht nach oben beschränkt.

ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und streng monoton fallend.

iii) Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht monoton.

iv) Eine konstante Folge ist sowohl monoton wachsend als auch fallend. Außerdem ist sie beschränkt.

**Bemerkung 1.2.43** i) Streng monoton wachsende Folgen ganzer Zahlen sind nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt.

ii) Streng monoton fallende Folgen ganzer Zahlen sind nach oben beschränkt, aber nicht nach unten beschränkt.

**Beispiel 1.2.44** Es sei $q \in \mathbb{Q}$ fest. Dann ist die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

i) monoton wachsend genau dann, wenn $q \geq 1$,

ii) streng monoton wachsend genau dann, wenn $q > 1$,

iii) monoton fallend genau dann, wenn $0 \leq q \leq 1$,

iv) streng monoton fallend genau dann, wenn $0 < q < 1$,

v) beschränkt genau dann, wenn $|q| \leq 1$.

(Siehe Übung.)

**Definition 1.2.45** Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in der Menge $X$ und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt

$$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$$

Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Anders ausgedrückt: Ist $x \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$ und $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend, so heißt $x \circ n$ $(\in X^{\mathbb{N}})$ Teilfolge von $x$.

**Beispiel 1.2.46** Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$ und $n_k = k+1, m_k = k^2, \ell_k = k, k \in \mathbb{N}$.
Dann sind

$$\begin{aligned}
&(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (x_2, x_3, x_4, \ldots), \\
&(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{k^2})_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, x_4, x_9, \ldots), \\
&(x_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Teilfolgen von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Ins insbesondere $X = \mathbb{Q}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right), \\
&(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right), \\
&(x_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

**Bemerkung 1.2.47** Beschränktheit und Monotonie übertragen sich auf Teilfolgen.

**Definition 1.2.48** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem geordneten Körper $K$ heißt

i) Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass
$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$
für alle $n, m \geq N$ gilt.
Kurzschreibweise:
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\geq N}\ |x_n - x_m| < \varepsilon\,,$$

ii) konvergent gegen $x_0 \in K$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass
$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$
für alle $n \geq N$ gilt.
Kurzschreibweise:
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ |x_n - x_0| < \varepsilon\,,$$

iii) konvergent, falls ein $x_0 \in K$ existiert, so dass $(x_n)_n$ gegen $x_0$ konvergiert,

iv) divergiert, falls $(x_n)_n$ nicht konvergent ist.

**Bemerkung/Bezeichnung 1.2.49** i) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$, so schreiben wir
$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,$$
$$x_n \longrightarrow x_n\ (n \to \infty),$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$
oder kürzer
$$x_n \to x_0,$$
$$\lim x_n = x_0.$$

ii) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

iii) Es gilt $x_n \to x_0$ genau dann, wenn $|x_n - x_0| \to 0$ $(n \to \infty)$, also wenn $(|x_n - x_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

**Beispiel 1.2.50** i) Ist $a \in K$, so konvergiert $a_{\mathbb{N}} = (a, a \ldots)$ offensichtlich gegen $a$.
Es sei $K = \mathbb{Q}$.

ii) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach 1.2.34 (Satz von Archimedes) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$.
Es sei $n \geq N$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon\,.$$

Dies ist die typische Struktur eines Konvergenzbeweises: $\varepsilon > 0$ vorgeben, $N$ wählen oder sich beschaffen, dann $n \geq N$ vorgeben und

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

zeigen.

iii) $\alpha$) Es sei $q \in \mathbb{Q}$, $|q| < 1$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge: Setzen wir zunächst $x := \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)(> 0)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert (nach dem Satz von Archimedes) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $Nx > \frac{1}{\varepsilon}$. Es sei $n \geq N$. Dann folgt mit der Bernoullischen Ungleichung (1.2.27):

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} < \varepsilon\,.$$

$\beta$) Ist $q = 1$, so ist $q^n = 1, n \in \mathbb{N}$, und $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

$\gamma$) Für $q = -1$ und $|q| > 1$ divergiert $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, siehe Übungen.

**Satz 1.2.51** *Es sei $K$ ein geordneter Körper, und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K$. Dann gilt:*

*i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.*

*ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.*

*iii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$.*

*iv) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist auch jede Teilfolge eine Cauchyfolge.*

*v) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar zum selben Grenzwert.*

**Beweis.**

i) Wir nehmen an, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe zwei verschiedene Grenzwerte $z_1$ und $z_2$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}|z_1 - z_2| > 0$. Da $x_n \to z_j, j = 1, 2$, existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - z_1| < \varepsilon, n \geq N_1$ und $|x_n - z_2| < \varepsilon, n \geq N_2$. Dann gilt für $n = \max\{N_1, N_2\}$

$$2\varepsilon = |z_1 - z_2| \leq |z_1 - x_n| + |z_2 - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

im Widerspruch zu (01). Also ist die Annahme falsch und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

ii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Nach Voraussetzung existiert ein $x_0 \in K$ mit $x_n \to x_0$. Daher existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \varepsilon',\ n \geq N$.
Es folgt

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.
Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

iii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_0| < \varepsilon,\ n \geq N.$$

Setze $K := N$. Ist nun $k \geq K$, so gilt $n_k \geq k \geq K \geq N$, also auch

$$|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon.$$

iv) wird analog iii) gezeigt.

v) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon',\ k \geq K\,.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon',\quad m, n \geq N\,.$$

Es sei $n \geq N$ beliebig. Wähle $k \geq K$ mit $n_k \geq N$ (z. B. $k := \max\{K, N\}$). Dann gilt

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

□

**Bemerkung 1.2.52** Wir haben im obigen Beweis nur folgende drei Eigenschaften von $d(x, y) := |x - y|$ $(x, y \in K)$ ausgenutzt:

i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

**Satz 1.2.53** *Jede Cauchyfolge in einem geordneten Körper ist beschränkt.*

**Beweis.** Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$.
Wähle $C \geq 1 + |x_N|$ und $C \geq x_j$, $j = 1, \ldots, N-1$, (also z.B. $C := 1 + \sum\limits_{j=1}^{N} |x_j|$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|x_n| \leq C \text{ für } 1 \leq n \leq N-1 \text{ und} \\
&|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < \varepsilon + |x_N| = 1 + |x_n| \leq C \text{ für } n \geq N.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

**Satz 1.2.54** *Es seien $K$ ein geordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $K$ mit*

*i)* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n \in \mathbb{N}$, *und*

*ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

*Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar zum selben Grenzwert.*

**Beweis.** Es sei $w := \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.
Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - w| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |z_n - w| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt für $n \geq N$:

$$-\varepsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \varepsilon,$$

also $|y_n - w| < \varepsilon$. □

**Satz 1.2.55** *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in dem geordneten Körper $K$. Dann gilt*

*i) $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchyfolgen. Insbesondere ist $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $a \in K$ eine Cauchyfolge.*

*ii) Existiert ein $\delta > 0$, so dass $|x_n| \geq \delta, n \in \mathbb{N}$, so ist $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.*

**Beweis.**

i) $\alpha$) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Nach Voraussetzung existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $m, n \geq N$.

$\beta$) Nach 1.2.53 sind $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.
Da die Vereinigung endlich vieler beschränkter Mengen wieder beschränkt ist, existiert also ein $C > 0$ mit

$$|x_n|, |y_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2C}$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$.
Sind nun $n, m \geq N$ beliebig, so folgt

$$\begin{aligned}
&|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m| \\
&\leq |x_n(y_n - y_m)| + |(x_n - x_m) y_m| \\
&= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m| \\
&< C\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} C = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ii) Wegen i) reicht es zu zeigen: $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \delta^2 \varepsilon$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - y_m| < \tilde{\varepsilon}$$

für alle $n, m \geq N$.
Hieraus folgt

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_m}\right| = \left|\frac{y_m - y_n}{y_n y_m}\right| \leq \frac{1}{\delta^2}\, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$. $\square$

**Bemerkung 1.2.56** Es sei $K = \mathbb{Q}$ (oder allgemeiner ein archimedischer Körper $K$, d.h. es gilt der Satz von Archimedes in $K$) und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die keine Nullfolge ist, so existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n| \geq \delta$$

für alle $n \geq N$.
Nehmen wir nämlich an, dass solche $\delta$ und $N$ nicht existieren, dann existiert für alle $\delta > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $|y_n| < \delta$.
Zu $\delta = 1$ und $N = 1$ existiert also ein $n_1 \geq 1$ mit $|y_{n_1}| < 1$.
Ist $n_k$ gewählt, so existiert zu $\delta = \frac{1}{k+1}$ und $N := n_k + 1$ ein $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} \geq N > n_k$, so dass

$$|y_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert nach dem Satz von Archimedes ein $K \in \mathbb{N}$ mit $K \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Es folgt

$$|y_{n_k}| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} \leq \varepsilon, \ k \geq K.$$

Also konvergiert $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0, und mit 1.2.51 iv) konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, Widerspruch. Also existieren solche $\delta$ und $N$.
Wir erhalten zusammen mit 1.2.55 ii):
Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen und ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so ist

$$\left(\frac{x_n}{\tilde{y}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge, wenn man

$$\tilde{y}_n := \begin{cases} 1 & : \ y_n = 0 \\ y_n & : \ y_n \neq 0, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, setzt.

**Satz 1.2.57** *Es sei $K$ ein geordneter Körper, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $x_0$, und die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $y_0$. Dann gilt*

*i)* $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ *und* $x_n y_n \to x_0 y_0$, *insbesondere* $a x_n \to a x_0$ *für alle* $a \in K$.

*ii)* *Ist* $y_0 \neq 0$ *und* $\tilde{y}_n := \begin{cases} 1 & : \ y_n = 0 \\ y_n & : \ y_n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$ *, dann folgt* $\dfrac{x_n}{\tilde{y}_n} \to \dfrac{x_0}{y_0}$.

**Beweis.**

i) folgt wie 1.2.55 i).

ii) Zu $\delta := \frac{|y_0|}{2} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y_0| < \delta = \frac{|y_0|}{2}, \ \ n \geq N$. Es folgt $\big||y_n| - |y_0|\big| \leq |y_n - y_0| < \dfrac{|y_0|}{2}, \ n \geq \mathbb{N}$, was $|y_n| - |y_0| \geq -\frac{|y_0|}{2}$, also $|y_n| \geq \frac{|y_0|}{2} = \delta, \ n \geq N$, impliziert. Die Behauptung folgt nun wie in 1.2.55 ii).

$\square$

**Satz 1.2.58** *Es sei $K$ ein geordneter Körper, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $K$. Dann ist $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

**Beweis.** Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $|y_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{C}(> 0)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \varepsilon', \; n \geq N.$$

Es folgt dann

$$|x_n y_n| \leq |x_n| C \leq \varepsilon' C = \varepsilon.$$

für alle $n \geq N$. □

**Beispiel 1.2.59** Es sei $K = \mathbb{Q}$.

i) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$, so gilt mit 1.2.57 und 1.2.50 ii):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n^k} &= \lim_{n\to\infty} q \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} q \cdot \prod_{j=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = q \cdot \prod_{j=1}^{k} 0 = 0. \end{aligned}$$

ii) Mit 1.2.57 und i) gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 2n^2 + 1}{5n^4 + 3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{5 + \frac{3}{n^3}} \\ = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}} &= \frac{3+0+0}{5+0} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

iii) Es sei $q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$: Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq q$.

Es sei $x_n = \frac{q}{n}$, $\quad y_n = \begin{cases} 1 & : \; n = 1 \\ \prod\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{q}{j} & : \; n \geq 2 \end{cases}$.

Dann gilt $\frac{q^n}{n!} = x_n y_n$, $n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, und für

$n \geq k+2$ gilt mit

$$|y_n| = y_n = \underbrace{\prod_{j=1}^{k} \frac{|q|}{j}}_{\leq k^k} \cdot \underbrace{\prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{|q|}{j}}_{<1} \leq k^k,$$

also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nach 1.2.58 gilt $\frac{q^n}{n!} \to 0$ $(n \to \infty)$.

**Definition/Bemerkung 1.2.60** Es sei $K$ ein geordneter Körper.

i) Auf der Menge

$$ch(K) := \{x : \mathbb{N} \to K : x \, \text{ist Cauchyfolge}\}$$

und auf der Menge

$$c(K) := \{x : \mathbb{N} \to K : x \, \text{ist konvergent}\}$$

können wir mit Hilfe von 1.2.55 und 1.2.57 eine Addition und eine Multiplikation folgendermaßen definieren:
Sind $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen (bzw. konvergente Folgen), so sei ihre Summe

$$x + y := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und ihr Produkt

$$x \cdot y := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Summe und Produkt erfüllen alle Körperaxiome bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen. Das Nullelement ist $0_{\mathbb{N}} = (0, 0, \ldots)$, das Einselement ist $1_{\mathbb{N}} = (1, 1, \ldots)$ und das additive Inverse zu $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $-x = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir weisen exemplarisch das Distributivgesetz nach:
Es seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen (konvergente Folgen). Dann gilt

$$\begin{aligned} x(y+z) &= (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \big((y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \\ &= (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n + z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_n(y_n + z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (x_n y_n + x_n z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (x_n z_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

ii) Allgemeiner kann man (für eine beliebige nichtleere Menge $J$) auf $K^J$ die Addition und Multiplikation definieren:

$$(f+g)(j) := f(j) + g(j), \quad j \in J$$

$$(f \cdot g)(j) := f(j) \cdot g(j), \quad j \in J,$$

wenn $f, g \in K^J$. Auch hier sind alle Körperaxiomem bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen erfüllt.

Wir wollen nun den geordneten Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen konstruieren; er wird folgende Eigenschaften haben.

$\alpha$) Es gibt eine injektive Abbildung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, welche die Addition, die Multiplikation und die Ordnung respektiert, so dass zusätzlich gilt: Für alle $z, w \in \mathbb{R}$ mit $z < w$ existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $z < j(x) < w$.

$\beta$) Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Via $j$ identifizieren wir $\mathbb{Q}$ dann mit $j(\mathbb{Q})$ und betrachten $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ wird zusätzlich gelten:

$\gamma$) Für alle $y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^n = y$ eine Lösung.

$\delta$) Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Wir erklären folgende Relation auf der Menge $ch(\mathbb{Q})$ aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$:

$$x \sim y, \text{ falls } x - y \text{ eine Nullfolge ist.}$$

$\big($ D.h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$.$\big)$

**Satz 1.2.61** *„ $\sim$ “ ist eine Äquivalenzrelation.*

**Beweis.** Es seien $x, y, z \in ch(\mathbb{Q})$.

1. Da $x - x = 0_{\mathbb{N}} \to 0\,(n \to \infty)$, ist $x \sim x$.

2. Ist $x \sim y$, dann ist $x - y$ eine Nullfolge, also mit 1.2.57 ist auch $y - x = -(x - y)$ eine Nullfolge.

3. Ist $x \sim y$ und ist $y \sim z$, dann sind $x - y$ und $y - z$ Nullfolgen, also ist nach 1.2.57 auch

$$x - z = (x - y) + (y - z) \text{ eine Nullfolge.}$$

$\square$

**Definition 1.2.62** Die Menge

$$\mathbb{R} := \left\{[x]_\sim : x \in ch(\mathbb{Q})\right\}$$

heißt Menge der reellen Zahlen.

Analog zur Konstruktion der rationalen Zahlen bestehen die reellen Zahlen aus Äquivalenzklassen. Grob gesagt: Eine Äquivalenzklasse besteht aus denjenigen Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, die dasselbe „Grenzverhalten“ zeigen.

Wir wollen nun eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{R}$ definieren. Dazu benötigen wir

**Lemma 1.2.63** *Es seien $x, w, y, z \in ch(\mathbb{Q})$, und es gelte $x \sim w$ sowie $y \sim z$. Dann gilt auch $x + y \sim w + z$ und $xy \sim wz$.*

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind $x-w$ und $y-z$ Nullfolgen. Dann ist nach 1.2.57 auch $(x + y) - (w + z) = (x - w) + (y - z)$ eine Nullfolge, also gilt $x + y \sim w + z$.
Da $x$ eine Cauchyfolge, also beschränkt ist, und $y - z$ eine Nullfolge ist, garantiert Satz 1.2.58, dass auch $x(y-z)$ eine Nullfolge ist. Analog: $z(x-w)$ ist Nullfolge. Damit gilt nach 1.2.57, dass auch $xy-wz = x(y-z)+z(x-w)$ eine Nullfolge ist. Also ist $xy \sim wz$. $\square$

Jetzt sind die Voraussetzungen für die Definition der Addition und auch der Multiplikation geschaffen.

**Satz 1.2.64** *Versehen mit der Addition*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \big([x], [y]\big) \mapsto [x] + [y] := [x + y],$$

*und der Multiplikation*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \big([x], [y]\big) \mapsto [x] \cdot [y] := [xy]\,,$$

*ist $\mathbb{R}$ ein Körper. Das Nullelement ist $[0_{\mathbb{N}}]$, das Einselement ist $[1_{\mathbb{N}}]$.*

**Beweis.** Nach Bemerkung 1.2.60 erfüllt $ch(\mathbb{Q})$ alle Körperaxiome, bis auf die Existenz des multiplikativen Inversen. All diese Axiome übertragen sich automatisch auf $\mathbb{R}$. Exemplarisch rechnen wir dies nun im Fall des Distributivgesetzes nach:
Es seien $x, y, z \in ch(\mathbb{Q})$. Dann gilt $x(y+z) = xy + xz$, und es folgt

$$\begin{aligned} [x]\big([y]+[z]\big) &= [x]\big([y+z]\big) = \big[x(y+z)\big] = [xy+xz] \\ &= [xy]+[xz] = [x][y]+[x][z]\,. \end{aligned}$$

Ist $x \in ch(\mathbb{Q})$, so ist wegen $[x] + [-x] = [x - x] = [0_{\mathbb{N}}]$ das additive Inverse $-[x]$ von $[x]$ gerade $[-x]$.
Es bleibt die Existenz des multiplikativen Inversen zu zeigen.

Es sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ch(\mathbb{Q})$ mit $[x] \neq [0_{\mathbb{N}}]$. Dann ist $x$ keine Nullfolge. Setzt man

$$\tilde{x}_n := \begin{cases} \dfrac{1}{x_n} & : \; x_n \neq 0 \\ 1 & : \; x_n = 0, \; n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{x}_n = \frac{1}{x_n}, n \geq N$, und mit Bemerkung 1.2.56 ist $\tilde{x} := (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Aus $x_n\tilde{x}_n - 1 = 0, n \geq N$, folgt $x_n\tilde{x}_n - 1 \to 0$ $(n \to \infty)$, also $x\tilde{x} \sim 1_{\mathbb{N}}$, was aber gerade $[x][\tilde{x}] = [x\tilde{x}] = [1_{\mathbb{N}}]$ bedeutet. Wir erhalten $[\tilde{x}] = [x]^{-1}$. □

Wir wollen nun eine Ordnung auf $\mathbb{R}$ definieren.

**Definition 1.2.65** Es seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Dann setzt man

$$[x] < [y],$$

falls ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ existieren mit

$$x_n < y_n - \delta$$

für alle $n \geq N$.

**Satz 1.2.66** *„ $<$ “ ist eine Ordnung auf* $\mathbb{R}$.

**Beweis.**

(01) Wir müssen zeigen: Ist $[x] \neq [y]$, dann ist entweder $[x] < [y]$ oder $[y] < [x]$.
Es sei also $z := x - y$ keine Nullfolge. Da $z$ eine Cauchyfolge ist, existieren nach 1.2.56 ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ mit

$$|z_n| > 2\delta, \; n \geq N\,,$$

und weiter können wir verlangen, dass

$$|z_n - z_m| < \delta, \; m, n \geq N,$$

gilt. Insbesondere ist entweder $z_N < -2\delta$ oder $z_N > 2\delta$.

<u>1. Fall:</u> $z_N < -2\delta$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$x_n - y_n = z_n = z_n - z_N + z_N \leq |z_n - z_N| + z_N < \delta - 2\delta = -\delta.$$

<u>2. Fall:</u> $z_N > 2\delta$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$y_n - x_n = -z_n = z_N - z_n - z_N \leq |z_N - z_n| - z_N < \delta - 2\delta = -\delta.$$

Somit gilt entweder $x_n - y_n < -\delta, n \geq N$, oder $y_n - x_n < -\delta, n \geq N$, also entweder $[x] < [y]$ oder $[y] < [x]$.

(02) Es sei $[x] < [y]$ und $[y] < [z]$.
Dann existiert ein $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n < y_n - \delta \quad \text{und} \quad y_n < z_n - \delta, \; n \geq N.$$

Es folgt

$$x_n < z_n - 2\delta, \; n \geq N,$$

und damit $[x] < [z]$.

(03) Es sei $[x] < [y]$ und $[z]$ beliebig.
Dann existiert ein $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n < y_n - \delta, \; n \geq N.$$

Es folgt

$$x_n + z_n < (y_n + z_n) - \delta, \; n \geq N,$$

also auch $[x + z] < [y + z]$ und damit $[x] + [z] < [y] + [z]$.

(04) Es sei $[x] < [y]$ und $[0_{\mathbb{N}}] < [z]$.
Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$x_n < y_n - \delta \quad \text{und} \quad z_n > \delta,\ n \geq N.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x_n z_n &< (y_n - \delta) z_n = y_n z_n - \delta z_n \\ &\leq y_n z_n - \delta^2,\ n \geq N, \end{aligned}$$

und damit gilt $[xz] < [yz]$, also $[x][z] < [y][z]$. □

Alle Sätze, die wir für geordnete Körper $K$ gezeigt haben, gelten nun natürlich auch für $K = \mathbb{R}$!

**Satz 1.2.67** *Es sei* $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ r \mapsto [r_{\mathbb{N}}] = \big[(r, r, r, \ldots)\big]$.
*($j(r)$ ist dann gerade die Menge aller Folgen in $\mathbb{Q}$, die gegen $r$ konvergieren.)*
*Dann ist $j$ injektiv, und es gilt*

*α) $j(r + s) = j(r) + j(s)$,*

*β) $j(r \cdot s) = j(r) \cdot j(s)$,*

*γ) $j(r) < j(s)$ genau dann, wenn $r < s$.*

*für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.*
*Weiter existiert zu $[x], [y] \in \mathbb{R}$ mit $[x] < [y]$ ein $r \in \mathbb{Q}$, so dass*

$$[x] < j(r) < [y].$$

**Beweis.** Es seien $r, s \in \mathbb{Q}$.

α) $$\begin{aligned} j(r + s) &= \big[(r + s)_{\mathbb{N}}\big] = [r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}] \\ &= [r_{\mathbb{N}}] + [s_{\mathbb{N}}] = j(r) + j(s). \end{aligned}$$

β) $$\begin{aligned} j(r \cdot s) &= \big[(r \cdot s)_{\mathbb{N}}\big] = [r_{\mathbb{N}} \cdot s_{\mathbb{N}}] \\ &= [r_{\mathbb{N}}][s_{\mathbb{N}}] = j(r) \cdot j(s). \end{aligned}$$

γ) Ist $j(r) < j(s)$, also $[r_{\mathbb{N}}] < [s_{\mathbb{N}}]$, so existieren $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$r = r_{\mathbb{N}}(n) < s_{\mathbb{N}}(n) - \delta = s - \delta,\ n \geq N,$$

also gilt $r < s$.

Ist umgekehrt $r < s$, so existiert $\delta > 0$ mit $r < s - \delta$, und damit folgt sogar für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$r_{\mathbb{N}}(n) = r < s - \delta = s_{\mathbb{N}}(n) - \delta,$$

insbesondere also $j(r) = [r_{\mathbb{N}}] < [s_{\mathbb{N}}] = j(s)$.

$j$ ist injektiv:
Es sei $j(r) = j(s)$, d.h. $j(r) - j(s) = [0_{\mathbb{N}}]$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} \big[(r-s)_{\mathbb{N}}\big] &= [r_{\mathbb{N}} - s_{\mathbb{N}}] = [r_{\mathbb{N}}] + \big[(-s)_{\mathbb{N}}\big] = \\ &= [r_{\mathbb{N}}] - [s_{\mathbb{N}}] = j(r) - j(s) = [0_{\mathbb{N}}]. \end{aligned}$$

Also ist die konstante Folge $(r-s, r-s, r-s, \ldots) = (r-s)_{\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, was aber $r = s$ impliziert.

Es sei $[x] < [y]$. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$x_n < y_n - 2\delta \quad (\text{d.h. } \frac{1}{2}(x_n - y_n) < -\delta)$$

für alle $n \geq N$. Zusätzlich können wir verlangen (da $x$ und $y$ Cauchyfolgen sind), dass

$$|x_n - x_m| < \frac{\delta}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - y_m| < \frac{\delta}{2}$$

für alle $n, m \geq N$ gilt.
Wir setzen $r := \frac{1}{2}(x_N + y_N)$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}(x_N + y_N) + \frac{1}{2}(y_n - y_N) + \frac{1}{2}(x_n - x_N) + \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ &\leq r + \frac{1}{2}|y_n - y_N| + \frac{1}{2}|x_n - x_N| + \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ &< r + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} - \delta = r - \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $[x] < [r_{\mathbb{N}}] = j(r)$.
Analog zeigt man $j(r) < [y]$. $\square$

**Bemerkung 1.2.68** Offensichtlich gilt auch $j(0) = [0_{\mathbb{R}}]$ und $j(1) = [1_{\mathbb{R}}]$, $j$ erhält also das Nullelement und das Einselement. Weiter gilt $-j(r) = j(-r)$ und $j(s)^{-1} = j(s^{-1}), s \neq 0$.

Wir haben auf jedem geordneten Körper den Betrag mit Hilfe der Ordnung definiert, im Falle $\mathbb{R}$ ist also

$$|[x]| = \begin{cases} [x] & : [x] \geq [0_{\mathbb{N}}] \\ [-x] & : [x] < [0_{\mathbb{N}}]. \end{cases}$$

$|[x]|$ ist natürlich auch eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen.

**Korollar 1.2.69** *Es gilt* $|j(r)| = j(|r|)$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$.

**Beweis.** Mit 1.2.67 gilt:
Ist $r \geq 0$, dann ist $j(r) \geq 0$, also $|j(r)| = j(r) = j(|r|)$.
Ist $r < 0$, dann ist $j(r) < 0$, also $|j(r)| = -j(r) = j(-r) = j(|r|)$. □

**Korollar 1.2.70** *Ist* $[x] \in \mathbb{R}$ *und* $[\varepsilon] \in \mathbb{R}$ *mit* $[\varepsilon] > 0$, *so existiert ein* $r \in \mathbb{Q}$ *mit*

$$|[x] - j(r)| < [\varepsilon].$$

*(Man sagt:* $\mathbb{Q}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$.*)*

**Beweis.** Wähle $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$[x] - [\varepsilon] < j(r) < [x] + [\varepsilon].$$ □

**Korollar 1.2.71** *Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rationaler Zahlen ist eine Cauchyfolge in* $\mathbb{Q}$ *genau dann, wenn* $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$ *ist.*
*Konvergiert* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $x_0$, *so konvergiert* $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $j(x_0)$.

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und $[\varepsilon] > 0$. Wähle nach Satz 1.2.67 ein $\varepsilon' > 0, \varepsilon' \in \mathbb{Q}$ mit $j(\varepsilon') < [\varepsilon]$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon', \ n, m \geq N.$$

Hieraus folgt mit 1.2.67 und 1.2.69:

$$|j(x_n) - j(x_m)| = |(x_n - x_m)| = j(|x_n - x_m|) < j(\varepsilon') < [\varepsilon]$$

für alle $n, m \geq N$.

Es sei nun $\big(j(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, und es sei $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, beliebig. Dann ist $j(\varepsilon) > 0$ und daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$j(|x_n - x_m|) = |j(x_n) - j(x_m)| < j(\varepsilon),\ n, m \geq N.$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,\ n, m \geq N. \qquad \square$$

**Korollar 1.2.72** *Für alle $[\varepsilon], [x] \in \mathbb{R}$ mit $0 < [\varepsilon] < [x]$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n[\varepsilon] > [x]$.*
*(Man sagt: $\mathbb{R}$ ist ein Archimedischer Körper oder: in $\mathbb{R}$ gilt der Satz von Archimedes.)*

**Beweis.** Wähle nach Satz 1.2.67 ein $0 < y \in \mathbb{Q}$ mit $j(y) < [\varepsilon][x]^{-1}$. Nach Satz 1.2.34 (Satz von Archimedes für $\mathbb{Q}$) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y}$.
Es folgt $n \cdot [\varepsilon] = j(n)[\varepsilon] > j\big(\frac{1}{y}\big) \cdot [\varepsilon] > [x][\varepsilon]^{-1}[\varepsilon] = [x]$. $\square$

**Lemma 1.2.73** *Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.*

*i) Dann konvergiert $\big(j(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ $(= \big([(r_n)_\mathbb{N}]\big)_{n\in\mathbb{N}})$ gegen $\big[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]$.*

*ii) Insbesondere konvergiert $\big(j(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.*

**Beweis.** Es sei zunächst $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ beliebig.

1. Aus der Definition der Ordnung auf $\mathbb{R}$ und des Betrages folgt
$$\big|[x]\big| = \big|\big[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]\big| = \big[\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}\big].$$

2. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit
$$|x_m| < \varepsilon - \delta, m \geq N,$$
so gilt mit 1. und der Definition der Ordnung auf $\mathbb{R}$:
$$\big|[x]\big| = \big[\big(|x_m|\big)_{m\in\mathbb{N}}\big] < [\varepsilon_\mathbb{N}].$$

3. Mit Satz 1.2.67 genügt es zu zeigen:
   Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\big[(r_n)_{\mathbb{N}}\big] - \big[(r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\right| < [\varepsilon_{\mathbb{N}}]$$

   für alle $n \geq N$.
   Wähle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ($\varepsilon' \in \mathbb{Q}$) und setze $\delta := \varepsilon - \varepsilon' > 0$. Da $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|r_n - r_m| < \varepsilon' = \varepsilon - \delta,\ \ n, m \geq N.$$

   Es sei nun $n \geq N$ beliebig.
   Wendet man 2. auf $[x] = \big[(r_n)_{\mathbb{N}} - (r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]$ (also $x_m = r_n - r_m$) an, so folgt

$$\begin{aligned}\left|\big[(r_n)_{\mathbb{N}}\big] - \big[(r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\right| &= \left|\big[(r_n - r_m)_{m\in\mathbb{N}}\big]\right| \\ &= \Big[\big(|r_n - r_m|\big)_{m\in\mathbb{N}}\Big] < [\varepsilon_{\mathbb{N}}].\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.2.74** Wir haben bisher gezeigt, dass alle Regeln, die in $\mathbb{Q}$ gelten, nach Anwendung von $j$ erhalten bleiben. Die Injektivität von $j$ ermöglicht es daher, von jetzt an $\mathbb{Q}$ mit $j(\mathbb{Q})$ zu identifizieren. Weiter brauchen wir bei Folgen aus $\mathbb{Q}$ wegen 1.2.71 nicht mehr unterscheiden, ob sie $\mathbb{Q}$-Cauchyfolgen oder $\mathbb{R}$-Cauchyfolgen sind. Analoges gilt für konvergente Folgen.
Ab jetzt werden wir die Elemente von $\mathbb{R}$ mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Beispielsweise liest sich dann Korollar 1.2.70 folgendermaßen:
Ist $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x - r| < \varepsilon.$$

Lemma 1.2.73 ii) lautet dann:
Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge rationaler Zahlen, so existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $r_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.
Weiter werden wir ab jetzt kommentarlos verwenden, dass für $\mathbb{R}$ der Satz von Archimedes gilt.

**Satz 1.2.75** *Jede Cauchyfolge konvergiert in* $\mathbb{R}$.

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
Nach Korollar 1.2.70 existiert dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $|x_n - r_n| < \frac{1}{n}$.

1. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
   Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{3}{\varepsilon}$.
   Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, können wir gleichzeitig
   $$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3},\ n, m \geq N,$$
   verlangen (evtl. ist $N$ zu vergrößern).
   Es seien nun $n, m \geq N$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} |r_n - r_m| &\leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$
2. Mit 1. und Lemma 1.2.73 folgt: $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Wir zeigen nun: Auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x_0$.
   Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
   Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und
   $$|r_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq N.$$
   Dann folgt für alle $n \geq N$:
   $$|x_n - x_0| \leq |x_n - r_n| + |r_n - x_0| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

**Satz 1.2.76** *(Cauchysches Konvergenzkriterium)*
*Eine Folge in* $\mathbb{R}$ *konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

**Beweis.** Die Behauptung folgt aus 1.2.51 ii) und 1.2.75. □

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium erhalten wir

**Satz 1.2.77** *(Hauptsatz über monotone Folgen)*
*Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.*

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt. Ohne Einschränkung sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, andernfalls betrachte man $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anstelle von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir nehmen an, die Folge konvergiere nicht. Dann ist sie nach dem Cauchykriterium keine Cauchyfolge, und somit existiert ein $\delta > 0$, so dass gilt: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existieren $n, m \geq N$ mit

$$|x_n - x_m| \geq \delta.$$

Wir dürfen annehmen, dass $n > m$ gilt (ansonsten vertausche $n$ und $m$).
Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, gilt

$$x_n - x_N \geq x_n - x_m = |x_n - x_m| \geq \delta,$$

also können wir $m = N$ verwenden und erhalten: Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert $n > N$ mit

$$x_n - x_N \geq \delta.$$

Es sei $n_1 := 1$. Dann existiert zu $N := n_1$ ein $n_2 > N(= n_1)$ mit

$$x_{n_2} - x_{n_1} = x_{n_2} - x_N \geq \delta.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $n_k$ bestimmt. Dann existiert zu $N := n_k$ ein $n_{k+1} > N(= n_k)$ mit

$$x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_N \geq \delta.$$

Wir erhalten

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{\nu=1}^{k} x_{n_{\nu+1}} - x_{n_\nu} \geq x_{n_1} + k \cdot \delta$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Damit ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit war die Annahme falsch, also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

**Satz 1.2.78** *Es sei $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Dann existiert (genau ein) $x > 0$ mit $x^2 = y$.*

**Beweis.** Wir verwenden das „babylonische Wurzelziehen".
Es sei $x_0 > 0$ fest und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right), n \in \mathbb{N}_0$.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$, und

$$\begin{aligned}
2x_n(x_n - x_{n+1}) &= 2x_n^2 - 2x_n\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)\right) \\
&= x_n^2 - y \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right)\right]^2 - y \\
&= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und durch 0 nach unten bestimmt. Mit dem Hauptsatz über monotone Folgen konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$.
Aus $x_1 \geq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2}\frac{y}{x_n}$ folgt $x_n \geq \frac{y}{2x_1}, n \in \mathbb{N}$, und damit gilt $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \frac{y}{2x_1} > 0$.
Die Folge $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also konvergiert sie auch gegen $x$. Es folgt

$$\begin{aligned}
x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist aber äquivalent zu $x^2 = y$.
Ist $z^2 = y = w^2$, so folgt $(z - w)(z + w) = 0$, also $z = w$ oder $z = -w$. □

**Bemerkung/Bezeichnung 1.2.79** a) Da offensichtlich 0 die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$ ist, setzen wir

$$\sqrt{y}$$

als die einzige nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = y$ für $y \geq 0$. $\sqrt{y}$ ist also die eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl $x$ mit $x^2 = y$.

b) Ist $x_0 = y = 2$, so ist obige Folge eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, aber sie konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$ (ansonsten gäbe es ja ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$).

**Satz 1.2.80** *Es sei $k \geq 2, n \in \mathbb{N}, y > 0$. Ist $x_0 > 0$ und*

$$x_{k+1} := \frac{1}{n}\left((n-1)x_k + \frac{y}{x_k^{n-1}}\right),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

*Dann konvergiert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^n = y$.*

**Beweis.** Übungen. □

**Bemerkung/Bezeichnung 1.2.81** Analog oben setzen wir für $y \geq 0$ als $\sqrt[n]{y}$ die eindeutig bestimmte nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = y$.

**Satz 1.2.82** *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer.*

*i) Ist $M$ nach oben beschränkt, so existiert das Supremum* $\sup M$ *von $M$.*

*ii) Ist $M$ nach unten beschränkt, so existiert das Infimum* $\inf M$ *von $M$.*

**Beweis.** Wir zeigen i), die Behauptung ii) folgt analog oder durch Anwendung von i) auf die Menge $\tilde{M} := \{-x : x \in M\}$. Da $M$ nach oben beschränkt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein k$\in \mathbb{Z}$ mit $\frac{k}{n} \geq x, x \in M$ (d.h. $\frac{k}{n}$ ist obere Schranke für $M$).
Da $M \neq \emptyset$, existiert auch ein kleinstes $k =: k_n$ mit dieser Eigenschaft, d.h. $z_n := \frac{k_n}{n} \geq x, x \in M$, und es existiert $w_n \in M$ mit $z_n - \frac{1}{n} = \frac{k_n - 1}{n} < w_n$.
Setzen wir $x_n := \max\{w_1, \dots, w_n\}, y_n := \min\{z_1, \dots, z_n\}$, so gilt

$\alpha$) $x_n \in M, y_n$ ist obere Schranke für $M$, also $x_n \leq y_n$.

$\beta$) Die Folge $(x_n)_n$ ist monoton wachsend, die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

$\gamma$) Mit $\alpha$) und $\beta$) sind die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_n$ beschränkt.

Wegen $\beta$) und $\gamma$) konvergieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x_0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y_0$ nach dem Hauptsatz über monotone Folgen.
Aus $z_n - \frac{1}{n} < w_n \leq x_n \leq y_n \leq z_n$ folgt $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ und damit $x_0 = y_0$.
Ist $x \in M$ beliebig, so gilt nach $\alpha$), dass $y_n \geq x$, also gilt auch $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \geq x$, $x_0$ ist also eine obere Schranke für $M$.
Ist $y$ eine weitere obere Schranke für $M$, so gilt $x_n \leq y, n \in \mathbb{N}$, (da $x_n \in M$) und damit $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq y$.
Somit ist $x_0$ das Supremum von $M$. □

**Bezeichnung 1.2.83** Wir setzen für $M \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\sup M := +\infty, \text{ falls } M \text{ nicht nach oben beschränkt,}\\
&\inf M := -\infty, \text{ falls } M \text{ nicht nach unten beschränkt,}\\
&\sup \emptyset := -\infty,\\
&\inf \emptyset := +\infty,
\end{aligned}$$

und wir schreiben

$$\begin{aligned}
&\sup M < +\infty, \text{ falls } M \text{ nach oben beschränkt,}\\
&\inf M > -\infty, \text{ falls } M \text{ nach unten beschränkt.}
\end{aligned}$$

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so setzen wir

$$\begin{aligned}
&\sup\{f(x) : x \in X\} =: \sup_{x\in X} f(x) \text{ und}\\
&\inf\{f(x) : x \in X\} =: \sup_{x\in X} f(x).
\end{aligned}$$

**Definition 1.2.84** Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
&(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\\
&[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\\
&(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\\
&[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}\\
&(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\\
&(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\\
&(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\\
&[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}.
\end{aligned}$$

Obige Mengen heißen Intervalle, $a$ bzw. $b$ heißen linke bzw. rechte Intervallgrenze.

**Beispiel 1.2.85** Es sei $I$ ein Intervall. Dann ist $\sup I$ gleich der rechten und $\inf I$ gleich der linken Intervallgrenze, z. B. $\sup(0,1] = 1$, $\inf(0,1] = 0$. $(0,1]$ besitzt das Maximum 1, also $1 = \max(0,1]$, aber $(0,1]$ besitzt kein Minimum.

**Definition 1.2.86** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

i) bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder auch konvergent gegen $+\infty$), falls für alle $R \geq 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n > R$ für alle $n \geq N$.
Wir schreiben: $x_n \to +\infty (n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$,

ii) bestimmt divergent gegen $-\infty$ (oder auch konvergent gegen $-\infty$), falls für alle $R \leq -1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n < R$ für alle $n \geq N$.
Wir schreiben: $x_n \to -\infty \ (n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Bemerkung 1.2.87** Der Ausdruck „konvergent gegen $\infty$“ ist mit Vorsicht zu gebrauchen: Konvergiert eine Folge gegen $\infty$, so ist sie insbesondere unbeschränkt, also keine Cauchyfolge und damit NICHT konvergent.

**Beispiel 1.2.88** i) Die Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren bestimmt gegen $\infty$, die Folgen $(-3n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren bestimmt gegen $-\infty$.

ii) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$\alpha$) $x^n \to +\infty$, falls $x > 1$,

$\beta$) $x^n \to 1$, falls $x = 1$,

$\gamma$) $x^n \to 0$, falls $|x| < 1$,

$\delta$) $(x^n)_{n\to\mathbb{N}_0}$ divergiert und ist weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$ bestimmt divergent, falls $x \leq -1$.

$\alpha$) Es sei $R \geq 1$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{R}{x-1}$. Dann gilt mit der Bernoullischen Ungleichung für $n \geq N$:

$$x^n = \big(1 + (x-1)\big)^n \geq 1 + n(x-1) \geq N(x-1) > R.$$

Also folgt $x^n \to +\infty$.

$\beta)$ schon in 1.2.50 iii) $\beta)$ gezeigt.

$\gamma)$ Es sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x| < q < 1$ (so ein $q$ existiert mit 1.2.67). Dann gilt $0 \leq |x|^n \leq q^n \to 0$ $n \to \infty$ nach 1.2.50 $\alpha$). Nach dem Einschließungskriterium ist $\big(|x^n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, siehe 1.2.49 iii).

$\delta)$ Für $x = -1$ ist in 1.2.50 $\gamma$) gezeigt, dass $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Da $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, kann $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt divergieren.
Ist $x < -1$, so ist mit $\alpha$) $(|x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$, also ist insbesondere $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und damit divergent.
Wegen $x^n \geq 1$ für alle geraden $n$ und $x^n \leq -1$ für alle ungeraden $n$ kann $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt divergieren.

**Satz 1.2.89** *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$.*

*i) Es gelte $x_n \to +\infty$.*

*$\alpha$) Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt $x_n + y_n \to \infty$.*

*$\beta$) Existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \geq \delta, n \geq N$, so gilt $x_n y_n \to +\infty$.*

*$\gamma$) Existiert ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \leq -\delta, n \geq N$, so gilt $x_n y_n \to -\infty$.*

*$\delta$) Ist* $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt* $\tilde{x_n} \to 0$.

*Analoges gilt für $x_n \to -\infty$.*

*ii) Es gelte $x_n \to 0$.*

*$\alpha$) Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0, n \geq N$, und ist* $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt* $\tilde{x_n} \to +\infty$.

*$\beta$) Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0, n \geq N$, und ist* $\tilde{x}_n := \begin{cases} \frac{1}{x_n} & : x_n \neq 0 \\ 1 & : x_n = 0 \end{cases}$, *so gilt* $\tilde{x_n} \to -\infty$.

**Beweis.** Die Beweise von i) $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) sind leicht und ähnlich denen von

1.2.57.

Zu i) $\delta$): Zumeist existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq 1, n \geq \mathbb{N}$, also $\tilde{x}_n = \frac{1}{x_n}, n \geq N_1$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}, n \geq N.$$

Also gilt $|\tilde{x}_n| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon, n \geq N$.

Zu ii) $\alpha$): Es sei $R \geq 1$. Wähle $N \geq N_0$ mit

$$|x_n| < \frac{1}{R},\ n \geq N.$$

Es folgt für $n \geq N$:

$$\tilde{x_n} = |\tilde{x}_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| > R.$$

ii) $\beta$) analog zu ii) $\alpha$. $\square$

Betrachten wir eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist definitionsgemäß $\{x_k : k \geq \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Menge. Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch die Menge $\{x_k : k \geq n\}$ beschränkt; sie besitzt also ein Supremum.
Wegen $\{x_k : k \geq n+1\} \subset \{x_k : k \geq n\}$ gilt dann

$$\sup\{x_k : k \geq n+1\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\},$$

und damit ist die Folge

$$\big(\sup\{x_k : k \geq n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

monoton fallend, und durch $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge nach dem Hauptsatz über monotone Folgen.
Analoge Bemerkungen gelten, wenn man „sup“ durch „inf“ ersetzt.

**Definition 1.2.90** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Wir setzen

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ heißt limes superior, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ heißt limes inferior der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Mit unserer Konvention aus 1.2.83 kann man auch $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ auf $\liminf\limits_{n\to\infty} x_k := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$ schreiben.

**Beispiel 1.2.91** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(1+\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
1 \quad &\le \quad \sup\{x_k : k \ge n\} = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n} & : \ n \text{ gerade} \\[2ex] 1+\dfrac{1}{n+1} & : \ n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&\le \quad 1+\frac{1}{n} \quad \text{und} \\
-1-\frac{1}{n} \quad &\le \quad \begin{cases} -1-\dfrac{1}{n} & : \ n \text{ gerade} \\[2ex] -1-\dfrac{1}{n+1} & : \ n \text{ ungerade} \end{cases} = \inf\{x_k : k \ge n\} \\
&\le \quad -1.
\end{aligned}$$

Somit folgt nach dem Einschließungskriterium

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

**Satz 1.2.92** *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Dann ist*

*i)* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$,

*ii)* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} x_n + y_n$ *und*
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n + y_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$.
*Konvergiert eine der beiden Folgen, so gilt jeweils Gleichheit.*

**Beweis.** (siehe Übungen) □

**Satz 1.2.93** *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt*

*i)* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *ist die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl* $\overline{x}$ *mit*

*α)* $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\ge N}\ x_n < \overline{x}+\varepsilon$, *β)* $\forall_{\substack{\varepsilon>0\\N\in\mathbb{N}}} \exists_{n\geq N}\ x_n > \overline{x} - \varepsilon.$

*(Für $\varepsilon > 0$ gilt $x_n < \overline{x}+\varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n$ und $x_n > \overline{x}-\varepsilon$ für unendlich viele $n$.)*

*Weiter existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.*

*ii)* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *ist die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl $\underline{x}$ mit*

*α)* $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ x_n > \underline{x} - \varepsilon,$

*β)* $\forall_{\substack{\varepsilon>0\\N\in\mathbb{N}}} \exists_{n\geq N}\ x_n < \underline{x} + \varepsilon.$

*(Für $\varepsilon > 0$ gilt $x_n > \underline{x}-\varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n$ und $x_n < \underline{x}+\varepsilon$ für unendlich viele $n$.)*

*Weiter existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.*

**Beweis.** Wir zeigen i), ii) folgt analog oder durch Betrachtung von $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es sei

$$\overline{x}_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

und

$$x_0 := \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n.$$

α) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\overline{x}_n - x_0| < \varepsilon, n \geq N$.
Hieraus folgt $x_n \leq \overline{x}_n < x_0 + \varepsilon, n \geq N$.

β) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $\overline{x}_N \geq \overline{x}_{N+1}, N \in \mathbb{N}$, folgt $\overline{x}_N \geq \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = x_0, N \in \mathbb{N}$.
Ist also $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so existiert nach der Definition des Supremums ein $n \geq N$ mit

$$x_n > \overline{x}_N - \varepsilon \geq x_0 - \varepsilon.$$

Es sei nun eine Zahl $\overline{x}$ mit α) und β) gegeben. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus α) folgt

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\ \overline{x}_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \leq \overline{x} + \varepsilon.$$

Hieraus folgt für $n \geq N : \overline{x} - \varepsilon \leq \overline{x}_n \leq \overline{x} + \varepsilon$, also $|\overline{x}_n - \overline{x}| < \varepsilon$. Also gilt

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} \overline{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Zur Konstruktion der Teilfolge.
Wir setzen $n_1 := 1$.
Ist $n_k \in \mathbb{N}$ konstruiert, so existiert ein $N > n_1$ und ein $n_{k+1} := n > N$ mit

$\alpha$) $x_{n_{k+1}} < \overline{x} + \dfrac{1}{k}$ und

$\beta$) $x_{n_{k+1}} > \overline{x} + \dfrac{1}{k}$,

also $|x_{n_k} - \overline{x}| < \frac{1}{k}$. Wegen $n_{k+1} > n_k$, $k \in \mathbb{N}$, ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es folgt $x_{n_k} \to \overline{x}$ $(k \to \infty)$. □

**Korollar 1.2.94** *(Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}$)*
*Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beispiel 1.2.95** i) Es sei $x_n := (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$.
Dann gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1 \neq 1 = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, wie wir in 1.2.92 gezeigt haben. Weiter ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

ii) Ist $x_n := 3 + \frac{(-1)^n}{n}$, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = 3 = \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

wie man leicht nachrechnet, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

Dass Konvergenz an das Übereinstimmen von lim sup und lim inf gekoppelt ist, zeigt

**Satz 1.2.96** *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Genau dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.*

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von 1.2.93

$$\underline{x}_n \leq x_n \leq \overline{x}_n, n \in \mathbb{N}, \qquad \underline{x}_n := \inf\{x_k : k \geq n\},$$

also

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_k > \lim_{n\to\infty} x_n - \varepsilon, k \geq N,$$

also auch $\underline{x_k} \geq \lim_{n\to\infty} x_n - \varepsilon, k \geq N$.
Hieraus folgt $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x_n} \geq \lim_{n\to\infty} x_n$.
Insgesamt folgt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n,$$

also gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Analog folgt $\limsup_{m\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.
Es sei $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n =: x_0$.
Mit 1.2.93 i), ii) jeweils $\alpha$) folgt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ für alle $n > N$, also $|x_n - x_0| < \varepsilon$. □

In einem geordneten Körper $K$, also auch in $\mathbb{R}$, gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in K$. Damit hat in geordneten Körpern die Gleichung $x^2 = y$ keine Lösung $x$ für $y < 0$. Dies werden wir nun mit einer Vergrößerung von $\mathbb{R}$ beheben, leider hat diese Vergrößerung keine Ordnung mehr.

**Definition/Bemerkung 1.2.97** Es sei

$$\mathbb{C} := \big\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\big\} \quad (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2),$$

versehen mit der Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v),$$

und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist (siehe Übung). Das Nullelement ist $(0,0)$, und das Einselement ist $(1,0)$. Das additive Inverse zu $z = (x,y)$ ist $-z = (-x,-y)$, das multiplikative Inverse zu $z = (x,y) \neq (0,0)$ (d.h. $x \neq 0$ oder $y \neq 0$) ist $\frac{1}{z} = z^{-1} = \big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\big)$. Ist $z = (x,y) \in \mathbb{C}$, so sei

$$\operatorname{Re} z := \operatorname{Re}(z) := x \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Im} z := \operatorname{Im}(z) := y.$$

**Bemerkung 1.2.98** Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist dann gerade die Vektoraddition.

**Definition/Bemerkung 1.2.99** Betrachten wir die injektive Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (x, 0)$, so erfüllt $J$ (wie man leicht nachrechnet)

$$J(x+y) = J)(x) + J(y) \quad \text{und}$$
$$J(x \cdot y) = J(x) \cdot J(y), x, y \in \mathbb{R}.$$

Wie bei der Einbettung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ identifizieren wir ab jetzt $\mathbb{R}$ mit $J(\mathbb{R})$ und schreiben $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Der Kürze halber schreiben wir auch

$$x \text{ anstelle von } (x, 0)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$. Mit der Definition

$$i := (0, 1)$$

wird dies zu

$$z = x + iy.$$

Wegen $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ ist dann $i^2 = -1$ und $\frac{1}{i} = -i$.
Ist also $z = x + iy$ und $w = u + iv$, so ist

$$\begin{aligned} z + w &= (x+u) + i(y+u) \quad \text{und} \\ z \cdot w &= xu + iyiv + xiv + iyu \\ &= xu + i^2 yv + ixv + iyu \\ &= xu - yv + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Weiter ist $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ (wobei dann $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$).

**Beispiel 1.2.100** i) $(1+i) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\,\frac{3}{2}$,

ii) $(1+i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i0 = -1$.

**Konvention 1.2.101** *Ist $z \in \mathbb{C}$, so bedeutet $z \geq 0$, dass $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$.*

**Definition 1.2.102** Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\overline{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

heißt die zu $z$ konjugierte komplexe Zahl.

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad (\geq 0)$$

heißt der Betrag von $z$.
Ist also $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, so ist $\overline{z} = x - iy$ und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Satz 1.2.103** *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

*i)* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w},\ \overline{\overline{z}} = z,$

*ii)* $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$

*iii)* $|z|^2 = z\overline{z},\ |z| = |\overline{z}|,\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *für* $z \neq 0$.

*iv)* $|zw| = |z||w|,$

*v)* $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$

*vi)* $|z + w| \leq |z| + |w|,$ *insbesondere* $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

**Beweis.** i) und ii) sind trivial.
Es sei $z = x + iy, w = u + iv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

iii) $z\overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 + iyx - ixy$

$= x^2 + y^2 = |z|^2$

$|\overline{z}|^2 = x^2 + (-y)^2 = |z|^2$, also $|\overline{z}| = |z|$.

Ist $z \neq 0$, so folgt $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ aus $z\overline{z} = |z|^2$.

iv) Mit i) und iii) folgt

$$\begin{aligned} |zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) &= |z|^2|w|^2 \\ &= \big(|z||w|\big)^2, \end{aligned}$$

also $|zw| = |z||w|$.

vi) Mit i), ii), iii), iv) und v) folgt

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + \underbrace{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}_{=2\operatorname{Re}(z\overline{w})} + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2, \end{aligned}$$

also $|z + w| \leq |z| + |w|$. $\square$

**Bemerkung 1.2.104** Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ hat insbesondere folgende Eigenschaften:

i) $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$,

ii) $|z + w| \leq |z| + |w|,\ z, w \in \mathbb{C}$,

iii) $|z| = 0$ nur für $z = 0$.

**Satz 1.2.105** *Ist $y \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung $z^2 = y$ genau zwei Lösungen, falls $y \neq 0$, und genau eine Lösung (nämlich $z = 0$), falls $y = 0$.*

**Beweis.** Der Fall $y = 0$ ist trivial; sei also zunächst $y > 0$. Dann hat $z^2 = y$ nach Satz 1.2.78 eine positive Lösung $\sqrt{y}$. Ist $y < 0$, dann ist $-y > 0$, und somit gilt $\left(\sqrt{-y}\right)^2 = -y$ und damit $\left(i\sqrt{-y}\right)^2 = y$.
Ist $y \neq 0$ und sind $z_1, z_2$ zwei Lösungen von $z^2 = y$, so gilt $z_1^2 = y = z_2^2$, also $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2 = 0$ und damit $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.
Also hat die Gleichung $z^2 = y$ für alle $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ genau zwei Lösungen. □

## 1.3 Normierte und metrische Räume

Wir hatten in Kapitel 1 das Produkt $X \times Y := \big\{(x, y) : x \in X, y \in Y\big\}$ zweier Mengen $X$ und $Y$ definiert.
Analog setzt man für Mengen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, das Produkt

$$\prod_{j=1}^{n} X_j := X_1 \times \ldots \times X_n := \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in X_j, 1 \leq j \leq n\big\}$$

als die Menge aller geordneten $n$-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_j$ die Menge $X_j$ durchläuft.
Es gilt $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn $x_j = y_j,\ 1 \leq j \leq n$. Die Schreibweise $X_1 \times \ldots \times X_n$ ist gerechtfertigt, denn die Abbildung $(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z), \big((x, y), z\big) \mapsto \big(x, (y, z)\big)$ ist bijektiv und man verwendet $(x, y, z), \big((x, y), z\big)$ und $\big((x, y), z\big)$ je nach Bedarf. Wir schreiben auch $(x_j)_{1 \leq j \leq n} := (x_1, \ldots, x_n)$.
Ist $X_1 = \ldots = X_n = X$, so schreibt man

$$X^n := \prod_{j=1}^{n} X = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{-mal}} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in X,\ 1 \leq j \leq n\big\}.$$

**Bemerkung 1.3.1** Eine andere Möglichkeit, $X^n$ zu definieren, ist:

$$X^n := X^{\{1,\ldots,n\}} = \big\{x : \{1, \ldots, n\} \to X : x \text{ ist Abbildung}\big\}.$$

Denn einem $n$-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ entspricht die Abbildung

$$x : \{1, \ldots, n\} \to X \text{ mit } x(j) = x_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

Im folgenden sei immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Beispiel 1.3.2** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mathbb{K}^n := \big\{(z_1, \ldots, z_n) : z_j \in \mathbb{K},\ 1 \leq j \leq n\big\},$$

mit der Addition

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ (z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) := (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n),$$

und der Skalarmultiplikation:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \lambda \cdot (z_1, \ldots, z_n) := (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n),$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Im Falle $n = 1$ erhält man gerade $\mathbb{K}$ zurück.
Wir hatten ja $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet, analog betrachten wir $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$:
Ist $z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$, so ist

$$x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

und wir schreiben

$$z = x + iy.$$

Es sei für $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$

$$< z, w > := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu.$$

Dann ist $< \cdot, \cdot >: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ein sogenanntes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $E := \mathbb{K}^n$, d. h. es gilt

i) $< \lambda x + y, z > = \lambda < x, z > + < y, z >,\ \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in E,$

ii) $< x, y >= \overline{< y, x >},\ x, y \in E$,

iii) $< x, x > \geq 0$ und $< x, x >= 0$ nur für $x = 0,\ x \in E$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist natürlich $\overline{< y, x >} =< y, x >$ und damit wird in diesem Fall ii) zu: $< x, y >=< y, x >,\ x, y \in E$.

**Definition 1.3.3** Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ setzen wir

$$|z| := \|z\|_2 := \sqrt{< z, z >} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2}.$$

**Satz 1.3.4** *Sind $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$, so gilt*

*i)* $$\Big|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu\Big| = |< z, w >| \leq |z||w| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2}.$$

*(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)*

*ii)* $$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^2} = |z + w| \leq |z| + |w| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2}.$$

*(Minkowskische Ungleichung)*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $w \neq 0$.

i) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$0 \leq < z - \lambda w, z - \lambda w > = < z, z > -\lambda < w, z > -\overline{\lambda} < z, w > +\lambda\overline{\lambda} < w, w > .$$

Setzen wir $\lambda = \frac{<z,w>}{|w|^2}$ ein, so gilt

$$0 \leq < z, z > - \frac{< z, w >< w, z >}{|w|^2} - \frac{\overline{< z, w >} < z, w >}{|w|^2} + \frac{< z, w > \overline{< z, w >}}{|w|^4} \cdot |w|^2$$

$$= |z|^2 - \frac{|< z, w >|^2}{|w|^2}.$$

Es folgt $|< z, w >|^2 \leq |z|^2|w|^2$ und damit $|< z, w >| \leq |z||w|$.

ii) Wegen $< z, w > + < w, z > = < z, w > + \overline{< z, w >} = 2\text{Re} < z, w >$ gilt:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= < z+w, z+w > = 2 < z, z > + < z, w > + < w, z > + < w, w > \\ &= |z|^2 + 2\text{Re} < z, w > + |w| \\ &\leq |z|^2 + 2| < z, w > | + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2. \end{aligned}$$

Also folgt $|z+w| \leq |z| + |w|$.

□

**Bemerkung 1.3.5** Der Betrag $|\cdot| : \mathbb{K}^n \to [0, \infty)$ erfüllt neben der Dreiecksungleichung $|z+w| \leq |z| + |w|$ auch noch $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K}^n$, und $|z| = 0$ nur für $z = 0$.

Allgemeiner setzt man:

**Definition 1.3.6** Eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ auf einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $E$ (wobei wie immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) heißt Norm auf $E$, falls gilt

$$\begin{aligned} &(\text{N1}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \ \lambda \in \mathbb{K}, \ x \in E, \\ &(\text{N2}) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ x, y \in E, \\ &(\text{N3}) \quad \|x\| = 0 \text{ nur für } x = 0. \end{aligned}$$

$E := (E, \|\cdot\|)$ heißt dann normierter Raum.

**Beispiel 1.3.7** i) $(\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{C}, |\cdot|)$ oder allgemeiner $(\mathbb{K}^n, |\cdot|), n \in \mathbb{N}$, sind normierte Räume.

ii) Ist $< \cdot, \cdot >$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $E$ und setzt man $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$, so ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $E$.
Dies folgt leicht aus den Eigenschaften des Skalarprodukts und dem Beweis von Satz 1.3.4.

iii) Ist für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|z\|_1 := \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu| \quad \text{und} \quad \|z\|_\infty := \sup\big\{|z_\nu| : 1 \le \nu \le n\big\} = \sup_{1\le\nu\le n} |z_\nu|,$$

so sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{K}^n$, und es gilt

$$\|z\|_\infty \le \|z\|_2 \le \|z\|_1 \le n\|z\|_\infty \text{ für alle } z \in \mathbb{K}^n,$$

siehe Übungen.

**Bezeichnung 1.3.8** Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x \in E$ und $r > 0$. Dann setzt man

$$\begin{aligned}
U_r(x) &:= \big\{y \in E : \|y - x\| < r\big\},\\
B_r(x) &:= \big\{y \in E : \|y - x\| \le r\big\},\\
U_E &:= \big\{y \in E : \|y\| < 1\big\} \text{ und}\\
B_E &:= \big\{y \in E : \|y\| \le 1\big\}.
\end{aligned}$$

$U_r(x)$ heißt die offene Kugel mit Radius $r$ um $x$, $B_r(x)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius $r$ um $x$, $U_E$ heißt die offene Einheitskugel und $B_E$ die abgeschlossene Einheitskugel. Im Falle $E = \mathbb{C}$ verwendet man $\mathbb{D} := U_\mathbb{C} = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\big\}$. $\mathbb{D}$ heißt der Einheitskreis in der komplexen Ebene.

**Beispiel/Bemerkung 1.3.9** .

i) Ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\big\},$$

ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2} < r\big\},$$

und ist $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, so ist

$$U_r((x_1, x_2)) = \big\{(y_1, y_2) : |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| < r\big\}.$$

ii) Ist $0 < r < r'$, so gilt für $x \in E$

$$U_r(x) \subset B_r(x) \subset U_{r'}(x).$$

**Definition 1.3.10** Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt beschränkt, falls ein $C \geq 1$ existiert mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in M$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder beschränkt ist.

**Beispiel/Bemerkung 1.3.11** Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

i) Gemäß unserer Bezeichnung 1.2.83 ist $M \subset E$ beschränkt genau dann, wenn $\sup\left\{\|x\| : x \in M\right\} = \sup\limits_{x\in M} \|x\| < \infty$.

ii) Teilmengen beschränkter Mengen sind beschränkt.

iii) Alle Mengen vom Typ $U_r(x)$ und $B_r(x)$ sind beschränkt.
Denn sei $C := r + \|x\|$, so gilt für $y \in B_r(x)$ :

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq C.$$

iv) Untervektorräume $V \neq \{0\}$ sind niemals beschränkt:
Es sei $x \in V\backslash\{0\}$. Dann gilt $\|x\| > 0$. Wegen $nx \in V,\ n \in \mathbb{N}$, und

$$\|nx\| = n\|x\| \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

ist $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ und damit $V$ nicht beschränkt. Hier wurde natürlich benutzt, daß $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

v) Endliche Vereinigungen beschränkter Mengen sind beschränkt.

vi) Sind $A, B \subset E$ beschränkt und ist $x \in E$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x + y : x \in A, y \in B\}, \\ x + B &:= \{x + y : y \in B\} \quad \text{und} \\ \lambda A &:= \{\lambda x : x \in A\} \end{aligned}$$

wieder beschränkt.

vii) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt genau dann, wenn $\operatorname{Re} M := \{\operatorname{Re} z : z \in M\}$ und $\operatorname{Im} M := \{\operatorname{Im} z : z \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt sind. Dies folgt aus

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,\ z \in \mathbb{C}.$$

**Beispiel/Definition 1.3.12** Es sei $X$ eine nichtleere Menge, $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Abbildung $f : X \to E$ heißt beschränkt, falls $f(X) = \big\{f(x) : x \in X\big\}$ beschränkt in $E$ ist.
Gemäß 1.3.11 ist dies genau dann der Fall, wenn $\sup\limits_{x\in X} \|f(x)\| < \infty$ gilt, also wenn $\big\{\|f(x)\| : x \in X\big\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

i) Ist $E = \mathbb{K}$, so setzt man

$$\begin{aligned}\ell_\infty(X,\mathbb{K}) := B(X,\mathbb{K}) \quad &:= \quad \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist beschränkte Abbildung}\}\\ &= \quad \{f : X \to \mathbb{K} : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}\\ &= \quad \{f : X \to \mathbb{K} : \text{ es gibt } C > 0 \text{ mit } |f(x)| \le C\\ &\qquad\ \text{für alle } x \in X\}\end{aligned}$$

als die Menge aller beschränkten Abbildungen von $X$ nach $\mathbb{K}$.
Dann ist $B(X,\mathbb{K})$ ein Untervektorraum des Vektorraumes

$$\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ ist Abbildung}\}.$$

Hierbei ist die Addition und Skalarmultiplikation folgendermaßen definiert: Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so setzt man die Abbildungen $f + g : X \to \mathbb{K}$ und $\lambda f : X \to \mathbb{K}$ durch

$$\begin{aligned}&(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und}\\ &(\lambda f)(x) := \lambda f(x)\end{aligned}$$

für $x \in X$.
$B(X,\mathbb{K})$ ist tatsächlich ein Untervektorraum:
Sind nämlich $f, g \in B(X,\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so existieren $C_f$ und $C_g$ mit $|f(x)| \le C_f$ sowie $|g(x)| \le C_g$ für alle $x \in X$.
Es folgt $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le C_f + C_g$ und $|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \le |\lambda| C_f$ für alle $x \in X$. Somit gilt $f + g \in B(X,\mathbb{K})$ und $\lambda f \in B(X,\mathbb{K})$.
Wir setzen

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| \quad (< \infty).$$

Dann ist $\|\cdot\|_\infty : B(X,\mathbb{K}) \to [0,\infty)$ eine Norm auf $B(X,\mathbb{K})$:

N1: Es sei $f \in B(X,\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$.
Ist $\lambda = 0$, so gilt $\|\lambda f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |0\cdot f(x)| = 0\cdot \sup\limits_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$.
Sei also $\lambda \neq 0$. Wir setzen $s := \|\lambda f\|_\infty = \sup\big\{|\lambda f(x)| : x \in X\big\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \big|\lambda(f(x)\big| \leq s,\ x \in X, \\ \Longrightarrow\quad & \big|f(x)\big| \leq \frac{s}{|\lambda|},\ x \in X, \\ \Longrightarrow\quad & \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \leq \frac{s}{|\lambda|} \\ \Longrightarrow\quad & |\lambda|\, \|f\|_\infty \leq s = \|\lambda f\|_\infty. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\, \|f\|_\infty$.
Insgesamt gilt also $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$.

N2: Es seien $f, g \in B(X,\mathbb{K})$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \big|(f+g)(x)\big| &= \big|f(x)+g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \leq \\ &= \sup_{y\in X} \big|f(x)\big| + \sup_{y\in X} \big|g(x)\big| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

also folgt auch

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} \big|(f+g)(x)\big| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

N3: Es sei $f \in B(X,\mathbb{K})$ mit $\|f\|_\infty = 0$, d.h. $\sup\limits_{x\in X} \big|f(x)\big| = 0$. Also ist $\big|f(x)\big| = 0$ und damit $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, $f$ ist also die Nullabbildung.

ii) Ist allgemeiner $(E, \|\cdot\|_E)$ ein beliebiger normierter Raum, so setzt man

$$\ell_\infty(X,E) := B(X,E) := \{f : X \to E :\ f \text{ ist beschränkte Abbildung}\}$$

als die Menge aller beschränkten Abbildungen von $X$ nach $E$. $B(X,E)$ ist dann wieder ein Untervektorraum von $E^X := \{f : X \to E : f \text{ ist Abbildung}\}$, wobei die Addition und die Skalarmultiplikation wie in i) definiert ist.
Weiter definiert

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E,$$

eine Norm auf $B(X,E)$.
All dies folgt, indem man in i) einfach $\mathbb{K}$ durch $E$ und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_E$ ersetzt.

**Konvention 1.3.13** *Im Folgenden versehen wir die Räume* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{K}^n$ *immer mit der Norm* $|\cdot|$ $(= \|\cdot\|_2)$ *und* $B(X,E)$ *mit* $\|\cdot\|_\infty$.

**Bemerkung 1.3.14** Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Untervektorraum. Dann ist

$$\|\cdot\|_F : F \to [0,\infty), \ \|x\|_F := \|x\|_E,$$

natürlich eine Norm auf $F$, und $(F, \|\cdot\|_F)$ ist selbst ein normierter Raum.

**Definition 1.3.15** Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, und es sei $E := \prod_{\nu=1}^{n} E_\nu$. Dann setzen wir

$$\|\cdot\| : E \to [0,\infty) \quad \text{durch} \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2}, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in E.$$

**Satz 1.3.16** $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf* $E$.

**Beweis.**

N1: Es sei $x \in \prod_{\nu=1}^{n} E_\nu, \ \lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|\lambda x_\nu\|_\nu^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} = |\lambda| \, \|x\|.$$

N2: Es seien $x, y \in E$. Dann gilt $\|x_\nu + y_\nu\|_\nu \leq \|x_\nu\|_\nu + \|y_\nu\|_\nu$, also auch $\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu + y_\nu\|_\nu^2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} \big(\|x_\nu\|_\nu + \|y_\nu\|_\nu\big)^2$. Es folgt mit der Minkowskischen Ungleichung

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu + y_\nu\|_\nu^2} \leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \big(\|x_\nu\|_\nu + \|y\|_\nu\big)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|y_\nu\|_\nu^2} = \|x\| + \|y\|.$$

N3: Ist $\|x\| = 0$, so sind alle $\|x_\nu\| = 0$, also alle $x_\nu = 0,\ 1 \leq \nu \leq n$, und damit $x = 0$.

$\square$

**Bemerkung/Bezeichnung 1.3.17** i) Sind $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, so schreibt man $\prod\limits_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu) := (E, \|\cdot\|)$.

ii) Wir erhalten für $(E_\nu, \|\cdot\|_\nu) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$:

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K}\times\ldots\times\mathbb{K} = \prod_{\nu=1}^{n} \mathbb{K} \quad \text{und} \quad |x| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu} = \|x\|,$$

also $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \big(\mathbb{K}, |\cdot|\big) = \big(\mathbb{K}^n, |\cdot|\big)$.

**Satz 1.3.18** *Es seien $\big(E_1, \|\cdot\|_1\big), \ldots, \big(E_n, \|\cdot\|_n\big)$ normierte Räume. Eine Teilmenge $M \subset \prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist beschränkt genau dann, wenn $\{x_j : (x_1, \ldots, x_n) \in M\} =: M_\nu$ in $E_\nu$ beschränkt ist für alle $1 \leq \nu \leq n$. Insbesondere ist $\prod\limits_{\nu=1}^{n} L_\nu$ beschränkt für beschränkte $L_\nu \subset E_\nu,\ 1 \leq \nu \leq n$.*

**Beweis.** Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\sup_{1\leq\nu\leq n} \|x_\nu\|_\nu \leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2} \leq \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu,\ x = (x_1, \ldots, x_n). \qquad \square$$

Bei der Definition der Begriffe „Cauchyfolge“ und „konvergente Folge“ hatten wir nur den Abstand $d(x, y) = |x - y|$ zweier Zahlen benutzt. Diesen Begriff des Abstandes wollen wir nun verallgemeinern.

**Definition 1.3.19** Es sei $X$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt Metrik (oder Abstand) auf $X$, falls gilt

(M1) $d(x, y) = d(y, x),\ x, y \in X,$

(M2) $\quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z), \; x,y,z \in X,$

(M3) $\quad d(x,y) = 0$ nur für $x = y, \; x,y \in X.$

Ist $d$ eine Metrik auf $X$, so heißt $(X,d)$ metrischer Raum.

**Beispiel 1.3.20** i) Es sei $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{K}$. Dann ist

$$d := d_{|\cdot|} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to [0,\infty), \; d(x,y) := |x-y|,$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}$:

M1: $\quad d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x),$

M2: $\quad d(x,z) = |x-z| \le |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z),$

M3: $\quad d(x,y) = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y.$

ii) Exakt der gleiche Beweis wie in i) liefert, dass

$$d_{|\cdot|} := d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\infty), \quad d(z,w) := |z-w|, \; z,w \in \mathbb{K}^n,$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}^n$ ist. $d_{|\cdot|}$ heißt euklidischer Abstand.
Ersetzt man $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$, so folgt genau so, dass für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ die Abbildung

$$d_{\|\cdot\|} := d : E \times E \to [0,\infty), \; d(x,y) := \|x-y\|, \; x,y \in E,$$

eine Metrik auf $E$ ist.

iii) Es sei $X$ eine Menge und es sei $d : X \times X \to [0,\infty)$ definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & : \; x \ne y \\ 0 & : \; x = y. \end{cases}$$

Dann ist $(X,d)$ ein metrischer Raum:
Offensichtlich gilt $d(x,y) = d(y,x)$. Sind $x,y,z \in X$ und $x = z$, so folgt $d(x,z) = 0 \le d(x,y) + d(y,z)$. Ist $x \ne z$, so gilt $x \ne y$ oder $y \ne z$. Also folgt auch hier

$$d(x,z) = 1 \le d(x,y) + d(y,z).$$

Ist $d(x,y) = 0$, so ist $x = y$ nach Definition von $d$.
$d$ heißt diskrete Metrik auf $X$.

iv) $\alpha$) Es sei $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty)$, $d(n, m) := |n - m|$. Dann ist $d$ eine Metrik (sie ist ja die Einschränkung des euklidischen Abstandes).

$\beta$) Eine andere interessante Metrik auf $\mathbb{N}$ entsteht folgendermaßen:
Wir setzen $d(n, m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$.
Dann ist auch $(\mathbb{N}, d)$ ein metrischer Raum.
Fügen wir einen zusätzlichen Punkt $\infty$ zu $\mathbb{N}$ hinzu und setzen wir also $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist

$$d : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to [0, \infty), \;\; d(n, m) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right| & : \; m, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{m} & : \; n = \infty, \; m \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{n} & : \; n \in \mathbb{N}, \; m = \infty \\ 0 & : \; n = m = \infty \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{N}^+$.

**Bezeichnung 1.3.21** Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, so sei für $x \in X$ und $r > 0$

$$U_r(x) := \{y \in X : d(y, x) < r\}$$

und

$$B_r(x) := \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

Diese Bezeichnung ist konsistent mit 1.3.8.

**Bemerkung 1.3.22** Man kann auch in metrischen Räumen den Begriff Beschränkheit von Mengen definieren, siehe Übungen.

**Definition/Bemerkung 1.3.23** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung

$$d_M : M \times M \to [0, \infty), \; d_M(x, y) := d(x, y),$$

von $d$ auf $M \times M$ eine Metrik auf $M$.

**Definition 1.3.24** Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, und es sei $X := \prod\limits_{\nu=1}^{n} X_\nu = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_\nu \in X_\nu,\ 1 \le \nu \le n\big\}$. Dann setzen wir

$$d : X \times X \to [0, \infty),\ d(x,y) := \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2},$$

$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$.

**Satz 1.3.25** *$d$ ist eine Metrik auf $X := \prod\limits_{\nu=1}^{n} X_\nu$.*

**Beweis.** Es seien $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n) \in X$.

$$\text{M1:} \quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(y_\nu, x_\nu)^2} = d(y,x).$$

$$\begin{aligned} \text{M2:} \quad d(x,z) &= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, z_\nu)^2} \le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \big(d_\nu(x_\nu, y_\nu) + d_\nu(y_\nu, z_\nu)\big)^2} \\ &\le \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(y_\nu, z_\nu)^2} \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

nach der Minkowskischen Ungleichung.
M3: Ist $d(x,y) = 0$, so sind alle $d_\nu(x_\nu, y_\nu) = 0$, also $x_\nu = y_\nu,\ 1 \le \nu \le n$, und damit ist $x = y$. □

**Bemerkung 1.3.26** Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Räume, und es sei $\prod\limits_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu)$ ihr Produkt, d.h. die Norm $\|\cdot\|$ auf $\prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist definiert durch

$$\big\|(x_1, \ldots, x_n)\big\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2}\ .$$

Ist nun $d_\nu$ die von $\|\cdot\|_\nu$ auf $E_\nu$ induzierte Metrik, also

$$d_\nu(x_\nu, y_\nu) = \|x_\nu - y_\nu\|_\nu,\ 1 \le \nu \le n,$$

und ist $d$ die von $\|\cdot\|$ auf $\prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$ induzierte Metrik, also

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

dann gilt

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu - y_\nu\|_\nu^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)^2}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod\limits_{\nu=1}^{n} E_\nu$.
Also ist

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu, d_{\|\cdot\|}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, d_{\|\cdot\|_\nu}) \ .$$

Insbesondere gilt $(\mathbb{K}^n, d_{|\cdot|}) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$.
Es ist also gleich, ob man zuerst das Produkt der normierten Räume bildet und dann die Metrik erzeugt, oder ob man zuerst die Metriken aus den Normen erzeugt und dann das Produkt der metrischen Räume bildet.

# Kapitel 2

# Folgen und Reihen

## 2.1 Folgen in normierten und metrischen Räumen

**Definition 2.1.1** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ heißt

i) Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ gilt,

ii) konvergent gegen $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt,

iii) konvergent, falls ein $x_0 \in X$ existiert, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$ konvergiert.

iv) divergent, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

**Bemerkung/Bezeichnung 2.1.2** i) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$, so schreiben wir

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,$$
$$x_n \longrightarrow x_0 \ (n \to \infty),$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

oder kürzer

$$x_n \longrightarrow x_0,$$
$$\lim x_n = x_0.$$

$x_0$ heißt Limes oder Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Es gilt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $\big(d(x_n, x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, d.h. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$.

iii) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt mit $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x-y\|, x, y \in E$:
Eine Folge $(x_n)_n$ in $E$ ist Cauchyfolge genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

gilt.
Analog: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $x_0$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ eixstiert, so dass für alle $n \geq N$

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

gilt.

**Satz 2.1.3** *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (konvergent gegen $z_0$) genau dann, wenn $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind ($\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$ gilt).*

**Beweis.** Es gelte $z_n = x_n + iy_n \to x_0 + iy_0 = z_0\,(n \to \infty)$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| < \varepsilon,\ n \geq N$. Dann folgt

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2} = |z_n - z_0| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$.
Analog zeigt man: $y_n \to y_0$.
Es gelte nun $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$, wobei $z_n = x_n + iy_n$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \varepsilon'$ und $|y_n - y_0| < \varepsilon',\ n \geq N$.
Dann gilt

$$|z_n - z_0| = |x_n + iy_n - (x_0 + iy_0)|$$
$$|x_n - x_0 + i(y_n - y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.
Die Aussagen über Cauchyfolgen beweist man analog. □

**Beispiel 2.1.4** i) Es sei $z_n = 1 + \frac{1}{n} + i\big(-1 - \frac{1}{n^2}\big)$. Dann gilt $\operatorname{Re} z_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ $(n \to \infty)$ und $\operatorname{Im} z_n = -1 - \frac{1}{n^2} \to -1$ $(n \to \infty)$. Es folgt also $z_n \to 1 - i$.

ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $z_n = z^n, n \in \mathbb{N}$.

$\alpha$) Ist $|z| < 1$, so gilt $z^n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Es gilt ja

$$0 \leq d_{|\cdot|}(z^n, 0) = |z^n - 0| = |z|^n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Also ist $d_{|\cdot|}(z^n, 0)$ eine Nullfolge und damit gilt $z^n \to 0$.

$\beta$) Ist $z = 1$, so gilt $z^n = 1^n = 1 \to 1$ $(n \to \infty)$.

**Satz 2.1.5** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Dann gilt*

*i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.*

*ii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.*

*iii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$.*

*iv) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist auch jede Teilfolge eine Cauchyfolge.*

*v) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar zum selben Grenzwert.*

**Beweis.** Ersetze im Beweis von 1.2.51 $|x - y|$ durch $d(x, y)$ und beachte Bemerkung 1.2.52. □

**Satz 2.1.6** *Jede Cauchyfolge in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist beschränkt.*

**Beweis.** Ersetze im Beweis von 1.2.53 $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$. □

**Definition 2.1.7** i) Ein metrischer Raum $(X, d)$ heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in $(X, d)$ konvergiert.

ii) Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ heißt vollständig (oder Banachraum) , falls $(E, d_{\|\cdot\|})$ (mit $(d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
Ein normierter Raum ist also vollständig genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ mit

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{m,n\geq N}{\forall} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

ein $x_0 \in E$ existiert, so dass

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N}{\forall} \quad \|x_n - x_0\| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

**Satz 2.1.8** $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *ist vollständig.*

**Beweis.**

1. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so konvergiert jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ nach Satz 1.2.76.

2. Ist $K = \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, so sind nach Satz 2.1.3 $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$, also nach Satz 1.2.76 (oder i)) existieren $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} z_n \to x_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to y_0$.
Mit Satz 2.1.3 folgt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z_0 := x_0 + iy_0$ konvergiert. □

**Satz 2.1.9** *Es seien* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$ *mit* $z_n \to z_0$ *und* $w_n \to w_0$. *Dann gilt*

*i)* $z_n + w_n \to z_0 + w_0$ *und* $z_n w_n \to z_0 \cdot w_0$.

*ii) Ist* $w_0 \neq 0$ *und setzt man*

$$\tilde{w}_n := \begin{cases} w_n & : \ w_n \neq 0 \\ 1 & : \ w_n = 0, \end{cases}$$

*so gilt* $\frac{z_n}{\tilde{w}_n} \to \frac{z_0}{w_0}$.

**Beweis.** Wie in 1.2.55, 1.2.56, 1.2.57. □

Völlig analog zu 1.2.55, Übungsaufgabe A6.1 und A9.3 oder durch Verwendung von $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \to 0$ beweist man allgemeiner

**Satz 2.1.10** *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $E$ sowie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.*

*i) Gilt $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$, so folgt $x_n + y_n \to x_0 + y_0$.*

*ii) Gilt $x_n \to x_0$ und $\lambda_n \to \lambda_0$, so folgt $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$.*

*iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\lambda_n \to 0$, so gilt $\lambda_n x_n \to 0$.*

*iv) Gilt $x_n \to 0$ und ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt $\lambda_n x_n \to 0$.*

*v) Gilt $x_n \to x_0$, so gilt $\|x_n\| \to \|x_0\|$.*

**Bemerkung 2.1.11** Analoge Sätze für Cauchyfolgen führen wir nicht auf, da wir üblicherweise vollständige normierte Räume betrachten, wo ja jede Cauchyfolge eine konvergente Folge ist.

**Satz 2.1.12** *Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ metrische Räume, und es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod\limits_{\nu=1}^{k} X_\nu$.*
*Dann gilt*

*i) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\prod\limits_{\nu=1}^{k} (X_\nu, d_\nu)$ genau dann, wenn $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(X_\nu, d_\nu)$ für alle $1 \le \nu \le k$ ist.*

*ii) $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}) \in \prod\limits_{\nu=1}^{k} X_\nu$ genau dann, wenn $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_\nu^{(0)}$ für alle $1 \le \nu \le k$ konvergiert.*

*In Worten: Eine Folge ist Cauchy (konvergent) genau dann, wenn jede Komponentenfolge Cauchy (bzw. konvergent) ist.*

**Beweis.** (vgl. 2.1.3) Wir beweisen i), ii) folgt analog.

1. Es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\prod\limits_{\nu=1}^{k}(X_\nu, d_\nu)$, und es sei $1 \leq \nu \leq k$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig.
   Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon,\ n, m \geq N$. Aus $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) \leq \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} d_j(x_j^{(n)}, x_j^{(m)})^2} = d(x^{(n)}, x^{(m)})$ folgt
   $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

2. Es sei $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $(X_\nu, d_\nu)$, $1 \leq \nu \leq k$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N_\nu \in \mathbb{N}$ mit $d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{k},\ n, m \geq N_\nu, 1 \leq \nu \leq k$, und setze $N := \max\{N_1, \ldots, N_k\}$.
   Dann folgt für $n, m \geq N$:

$$d(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)})^2} \leq \sum_{\nu=1}^{k} d_\nu(x_\nu^{(n)}, x_\nu^{(m)}) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

□

**Beispiel 2.1.13** i) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$\alpha$) Ist $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$, so divergiert die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\beta$) Ist $z = 1$, so gilt $z^n = 1 \to 1$.

$\gamma$) Ist $|z| < 1$, so gilt $z^n \to 0$.

**Beweis:** $\alpha$) Ist $|z| > 1$, so gilt $|z^n| = |z|^n \to \infty$, also ist die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also kann sie keine Cauchyfolge sein und ist damit nicht konvergent.
Ist $|z| = 1$ und $z \neq 1$, so gilt

$$|z^n - z^{n+1}| = |1 - z||z|^n = |1 - z| \quad (> 0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, damit ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und damit nicht konvergent.
Für $\beta$ und $\gamma$ siehe 2.1.4. □

ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Betrachte die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z^\nu = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$.
Nach Satz 1.2.13 (geometrische Summenformel) gilt $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, n \in$

$\mathbb{N}_0$, wenn $z \neq 1$.
Dann divergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn $|z| \geq 1$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-z}$, wenn $|z| < 1$.

**Beweis:** Ist $z = 1$, so gilt $s_n = n + 1$, also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt. Ist $|z| < 1$, so gilt mit Satz 2.1.5 und i)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{\lim(1-z^{n+1})}{1-z} \\ &= \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.\end{aligned}$$

Es sei $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$. Wir nehmen an, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dann konvergiert auch

$$(z^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} = \big(1-(1-z)s_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Dies widerspricht aber i) $\alpha$).
Also divergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

iii) Es sei $s^{(n)} = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{2^\nu}, \frac{1}{3^\nu}, \frac{1}{4^\nu}\right) \in \mathbb{R}^3$.
Nach Definition der Vektoraddition gilt

$$s^{(n)} = \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^\nu}, \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{3^\nu}, \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{4^\nu}\right)$$

und damit nach Satz 2.1.12 und i): $s^{(n)} \to \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ $(n \to \infty)$.

**Satz 2.1.14** *Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ vollständige metrische Räume. Dann ist auch ihr Produkt $\prod\limits_{\nu=1}^{m} (X_\nu, d_\nu)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

**Beweis.** Es sei $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}), n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchyfolge. Dann sind $(x_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nach 2.1.12 i) Cauchyfolgen in $(X_\nu, d_\nu), 1 \leq \nu \leq m$. Da $(X_\nu, d_\nu)$ vollständig ist, existieren $x_\nu^{(0)} \in X_\nu$ mit $x_\nu^{(n)} \to x_\nu^{(0)}$, $1 \leq \nu \leq m$. Es sei $x^{(0)} := (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$. Nach 2.1.12 ii) gilt $x^{(n)} \to x^{(0)}$ in $\prod\limits_{\nu=1}^{m} (X_\nu, d_\nu)$. □

**Korollar 2.1.15** *i) Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ vollständige normierte Räume. Dann ist auch ihr Produkt $\prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, \|\cdot\|_\nu)$ ein vollständiger normierter Raum.*

*ii) $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ ist vollständig.*

**Beweis.**

i) Die Norm auf $\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu$ ist definiert durch $\|(x, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|_\nu^2}$, und nach 1.3.26 gilt $\left(\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu, d_{\|\cdot\|}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} (E_\nu, d_{\|\cdot\|_\nu})$. Da $(E_\nu, \|\cdot\|_\nu), 1 \leq \nu \leq n$, nach Voraussetzung vollständig ist, folgt die Behauptung mit 2.1.14.

ii) Nach 2.1.8 ist $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ vollständig, mit i) ist also dann $\prod_{\nu=1}^{n} (\mathbb{K}, |\cdot|)$ vollständig. 1.3.17 liefert $(\mathbb{K}^n, |\cdot|) = \prod_{\nu=1}^{n} (\mathbb{K}, |\cdot|)$. □

**Satz 2.1.16** *(Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{K}^n$)*
*Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^m$ besitzt eine konvergente Folge. (Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ eine konvergente Teilfolge.)*

**Beweis.**

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir führen einen Indikationsbeweis über die Dimension $m$.

   $\alpha$) Für $m = 1$ gilt die Aussage nach 1.2.94.

   $\beta$) $m \mapsto m + 1$. Es gelte die Aussage des Satzes für $m$, und es sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{m+1}$.
   Wir schreiben wie üblich $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left((x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^m$, nach Indikationsannahme existiert also eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$ mit $(x_1^{(n_k)}, \ldots, x_m^{(n_k)}) \to (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ $(k \to \infty)$. Nun ist $(x_{m+1}^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, also existiert mit 1.2.94 eine streng monoton wachsende Folge $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und ein $x_{m+1}^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit $x_{m+1}^{(n_{k_\ell})} \to x_{m+1}^{(0)}$ $(\ell \to \infty)$. Es folgt mit 2.1.12 $x^{(n_{k_\ell})} \to (x_1^{(0)}, \ldots, x_{m+1}^{(0)})$.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mit Hilfe der Abbildung

$$j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m},\ x+iy := (x_1+iy_1, \ldots, x_m+iy_m) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$$

dürfen wird $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{R}^{2m}$ als metrische Räume identifizieren, denn es gilt ja $|x+iy| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_\nu^2 + y_\nu^2} = |j(x+iy)|$ und damit $d(x+iy, u+iv) = d(j(x+iy), j(u+iv))$.
Somit folgt die Behauptung für $\mathbb{C}^m$ aus 1., angewandt auf $\mathbb{R}^{2m}$. □

**Satz 2.1.17** *Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum. Dann ist $B(X, E)$ vollständig.*

**Beweis.** Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(X, E)$. Dann ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $E$ für jedes $x \in X$, dies folgt sofort aus der Ungleichung $\|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Da $E$ vollständig ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $f(x) \in E$ mit $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$. Wir zeigen $f_n \to f : X \to E,\ x \mapsto f(x)$.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Es sei $n \geq N$. Zu beliebigem $x \in X$ wähle $m \geq N$ mit $\|f_m(x) - f(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \|f_n(x) - f_m(x)\|_E + \|f_m(x) - f(x)\|_E < \varepsilon.$$

Also gilt auch $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon$. □

**Bemerkung 2.1.18** i) Ist $X$ eine Menge, $E$ ein vollständiger normierter Raum, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(X, E)$, so existiert nach 2.1.17 $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in B(X, E)$, d.h.

$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E = \|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Dies impliziert insbesondere, dass $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in X$. Es folgt

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in X$.

ii) Gilt $\sup_{x\in X} \|g_n(x) - g(x)\|_E \to 0\,(n \to \infty)$, so sagt man, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig auf $X$ gegen $g$.
Gilt $\|g_n(x) - g(x)\|_E \to 0\,(n \to \infty)$ (d.h. $g_n(x) \to g(x)\,(n \to \infty)$ in $E$ für alle $x \in X$), so sagt man, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen $g$.

Nach i) impliziert also die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz.

## 2.2 Reihen in normierten Räumen

Wir haben schon öfter Folgen der Form $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$, betrachtet, wobei $(a_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ war.
Etwas allgemeiner definiert man:

**Definition 2.2.1** Es sei $(z_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$.

i) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt die mit $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Reihe, und anstelle von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schreibt man $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$. $s_n$ heißt $n$-te Partialsumme von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

ii) Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt konvergent zur Summe $s \in E$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $s$ konvergiert.
In diesem Fall schreibt man $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu = s$.

**Bemerkung 2.2.2** i) Manchmal betrachten wir auch Reihen der Form $\sum_{\nu=M}^{\infty} z_\nu$ mit $M \in \mathbb{Z}$ fest. Hier ist dann $s_n = \sum_{\nu=M}^{n} z_\nu$, $n \geq M$, und falls $(s_n)_{n\geq M}$ gegen $s$ konvergiert, so schreibt man $\sum_{\nu=M}^{\infty} z_\nu = s$.

ii) Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, wobei $(z_\nu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen ist, konvergiert definitionsgemäß gegen die Summe $s$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\left| \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu - s \right| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Im Falle, dass $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem beliebigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist, muss man nur $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$ ersetzen.

**Beispiel 2.2.3** i) Nach A 6.2 divergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$.

ii) Nach A 6.4 konvergieren die Reihen $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^k}$ (für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, fest).

iii) Ist $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert nach 2.1.13 ii) die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ genau dann, wenn $|z| < 1$ gilt. In diesem Fall ist $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ (geometrische Reihe).

**Satz 2.2.4** *Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergente Reihen, und es sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann konvergiert auch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \lambda z_\nu + w_\nu$, und es gilt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \lambda z_\nu + w_\nu = \lambda \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$.*

**Beweis.** Dies folgt aus 2.1.10, angewendet auf die Partialsummen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda z_\nu + w_\nu &= \lim_{n\to\infty} \lambda \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu + \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu.
\end{aligned}$$

□

**Satz 2.2.5** *Es seien $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine Reihe komplexer Zahlen.*

*i) Dann konvergieren $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_\nu$ genau dann, wenn $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert, und es gilt dann $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_\nu = \operatorname{Re} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_\nu = \operatorname{Im} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.*

*ii) Falls* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert, so konvergiert auch* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu}$, *und es gilt* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}$.

**Beweis.** Der Teil i) folgt durch Anwendung von 2.1.3 auf die Partialsummen.

ii): $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{n} \overline{z_\nu} - \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}\right| = \left|\overline{\sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}\right| = \left|\sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\right| \to 0$, also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{z_\nu} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \overline{z_\nu} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}$. □

**Satz 2.2.6** *Ist die Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergent, so gilt* $z_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

**Beweis.** Es sei $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu,\ n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.2.7** Ist $z_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, so gilt zwar $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, aber die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ divergiert.

**Satz 2.2.8** *(Klammerung von Reihen)*
*Es sei* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen mit* $n_0 = -1$, *und es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu\right)$, *und es gilt* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu\right) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

**Beweis.** Es sei $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu$ und $\sigma_\ell = \sum\limits_{k=0}^{\ell} \Big( \sum\limits_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} z_\nu \Big) = (z_0 + z_1 + \ldots + z_{n_1}) + \ldots + (z_{n_\ell+1} + \ldots + z_{n_{\ell+1}}) = \sum\limits_{\nu=0}^{n_{\ell+1}} z_\nu = s_{n_{\ell+1}}$. Damit ist $(\sigma_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und damit nach 2.1.5 iii) ebenfalls konvergent mit gleichem Grenzwert. $\square$

**Bemerkung 2.2.9** Es kann vorkommen, dass die Klammerung konvergiert, ohne dass die Riehe selbst konvergiert: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu$ divergiert, aber

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\nu=2k}^{2k+1} (-1)^\nu}_{=0} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 0$ konvergiert (gegen 0).

**Satz 2.2.10** *(Cauchykriterium)*
*Es sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$. Genau dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\Big\| \sum_{\nu=n}^{m} z_\nu \Big\| < \varepsilon$$

*für alle $m \geq n \geq N$ gilt.*

**Beweis.** Es sei $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} z_\nu$. Die angegebene Bedingung besagt gerade (beachte: $s_m - s_{n-1} = \sum\limits_{\nu=n}^{m} z_\nu$), dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Da $(E, \|\cdot\|)$ nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind, erhalten wir also

**Korollar 2.2.11** *Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ in $\mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\Big| \sum_{\nu=n}^{m} z_\nu \Big| < \varepsilon$$

*für alle $m \geq n \geq N$ gilt.*

**Definition 2.2.12** Eine Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ in einem normierten Raum heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \|z_\nu\|$ (in $\mathbb{R}$) konvergiert.

**Satz 2.2.13** *Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine absolutkonvergente Reihe in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$, so konvergiert sie und es gilt $\|\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \|z_\nu\|$. Ist also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.*

**Beweis.** Dies folgt aus $\Big\| \sum\limits_{\nu=n}^{m} z_\nu \Big\| \leq \sum\limits_{\nu=n}^{m} \|z_\nu\| = \Big| \sum\limits_{\nu=n}^{m} \|z_\nu\| \Big|$ und dem Cauchykriterium sowie aus 2.1.10 v). □

**Satz 2.2.14** *(Majorantenkriterium)*
*Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine Reihe in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$. Gibt es eine Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen, ein $C \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit*

*i) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent und*

*ii) $\|z_\nu\| \leq C a_\nu$ für alle $\nu \geq \mathbb{N}$,*

*dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ absolut.*

**Beweis.** Dies folgt aus $\sum\limits_{\nu=n}^{m} \|z_\nu\| \leq C \cdot \sum\limits_{\nu=n}^{m} a_\nu = \Big| \sum\limits_{\nu=n}^{m} a_\nu \Big|$ und dem Cauchykriterium. □

**Beispiel 2.2.15** Es sei $(\varrho_\nu)_{\nu=\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und $|z| < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu z^\nu$ absolut. In der Tat, sei $a_\nu := |z|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, und $C := \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\varrho_\nu|$ $(< \infty)$. Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, und es gilt $|\varrho_\nu z^\nu| \leq C a_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Das Majorantenkriterium (wie auch die Definition der absoluten Konvergenz) regt dazu an, Reihen nichtnegativer reeller Zahlen zu betrachten. Zunächst wollen wir aber zeigen, dass nicht alle konvergenten Reihen auch absolut konvergieren.

**Satz 2.2.16** *(Leibnizkriterium)*
*Es sei* $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ *eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x_\nu$.

**Beweis.** O. E. sei $x_\nu > 0, \nu \in \mathbb{N}_0$.
Wir setzen wie üblich $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu x_\nu$, und wir betrachten zunächst die Teilfolgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:
Aus $s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} = -x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq 0$ folgt, dass $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist. Analog zeigt man, dass $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wächst. Wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -x_{2n+1} \leq 0$ impliziert dies, dass $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$ gilt. $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also nach unten beschränkt. Mit dem Hauptsatz über monotone Folgen existiert also $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Analog gilt, dass $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt ist, also ist auch $s' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existent. Wegen $s - s' = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$ gilt $s = s'$.
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |s_{2n+1} - s| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gilt für alle $n \geq 2N + 1$:

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

□

**Beispiel 2.2.17** Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber wegen $\left|\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu}$ und der Divergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}$ nicht absolut.

Kommen wir zu Kriterien für Reihen mit nichtnegativen Gliedern:

**Satz 2.2.18** *Eine Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ *reeller Zahlen mit* $x_\nu \geq 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$, *ist genau dann konvergent, wenn die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist, d.h. wenn* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu = \sup\Big\{ \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu : n \in \mathbb{N}_0\Big\} < \infty$ *gilt.*

**Beweis.** Dies folgt aus dem Hauptsatz über monotone Folgen. □

**Satz 2.2.19** *(Cauchyscher Verdichtungssatz)*
*Es sei* $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ *eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ *genau dann (absolut), wenn* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu x_{2^\nu}$ *konvergiert.*

**Beweis.** O. E. $x_\nu > 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$.
Es sei $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} x_\nu$ und $\sigma_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} 2^\nu x_{2^\nu}$.
Wir zeigen: ist $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, so auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$; die Umkehrung wird in den Übungen gezeigt.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu \quad &\leq \quad \sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1} x_\nu = x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} x_\nu \\ &\leq \quad x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} x_{2^\mu} \\ &\leq \quad x_0 + \sum_{\mu=0}^{n} 2^\mu x_{2^\mu} = x_0 + \sigma_n \leq x_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu x_{2^\nu}. \end{aligned}$$

Damit ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt, und die Behauptung folgt mit 2.2.18. □

**Beispiel 2.2.20** Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu \sqrt[k]{\nu}}$.

**Beweis.** Nach dem Cauchyschen Verdichtungssatz genügt es, die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \frac{1}{2^\nu \sqrt[k]{2^\nu}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2^\nu}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)^\nu$ nachzuweisen.

Wegen $\left|\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt[k]{2}} < 1$ konvergiert aber diese geometrische Reihe nach Beispiel 2.1.13 ii). □

Das folgende Kriterium basiert auf dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe und den Majorantenkriterium.

**Satz 2.2.21** *(Wurzelkriterium)*
*Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *eine Reihe in einem vollständigen normierten Raum* $(E, \|\cdot\|)$.

*(i) Gilt* $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\|z_\nu\|} < 1$, *so konvergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *(absolut).*

*(ii) Gilt* $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\|z_\nu\|} > 1$, *so divergiert* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

**Beweis.** Es sei $x_\nu := \|z_\nu\|$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, und es sei $\alpha := \limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu}$.

(i) Ist $\alpha < 1$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1$ mit $\sup\limits_{\nu\geq N} \sqrt[\nu]{x_\nu} < x \ (< 1)$.
Hieraus folgt $0 \leq x_\nu < x^\nu$, $\nu \geq N$. Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ ergibt sich mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$.

(ii) Ist $\alpha > 1$, dann gibt es nach 1.2.93 eine Teilfolge $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{x_{\nu_k}} = \alpha$.
Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit $\alpha - \varepsilon > 1$. Dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[\nu_k]{x_{\nu_k}} > \alpha - \varepsilon$ für alle $k \geq K$, d.h. $x_{\nu_k} > (\alpha-\varepsilon)^{\nu_k} \geq (\alpha-\varepsilon)^k, k \geq K$.
Wegen $(\alpha-\varepsilon)^k \to \infty \ (k \to \infty)$ ist dann $(x_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und somit auch $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Nach 2.2.6 kann $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ nicht konvergieren.

□

**Beispiel/Bemerkung 2.2.22** (i) Für den Beweis des zweiten Teiles des Wurzelkriteriums benötigten wir nicht die Vollständigkeit.

(ii) Um das Wurzelkriterium anzuwenden, benötigt man häufig

$\alpha$) $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1 \ (\nu \to \infty)$, $\sqrt[\nu]{x} \to 1 \ (\nu \to \infty)$ für alle $x > 0$, β) $\sqrt[\nu]{\nu^k} \to 1$ $(\nu \to \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

γ) $\sqrt[\nu]{\nu!} \to \infty$ $(\nu \to \infty)$,

δ) $\sqrt[\nu]{\frac{R^\nu}{\nu!}} \to 0$ $(\nu \to \infty)$ für alle $R \geq 0$.

zu $\alpha$): 1. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\nu \leq (1+\varepsilon)^\nu, \nu \geq N$ (siehe A.7.1), also auch $\sqrt[\nu]{\nu} \leq 1+\varepsilon, \nu \geq N$. Hieraus folgt $1 \leq \liminf\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \leq \limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \leq 1+\varepsilon$ und damit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.
2. $1 \leq \sqrt[\nu]{x} \leq \sqrt[\nu]{\nu}$ für $\nu \geq x$.

β) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu^k} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^k = 1$ mit $\alpha$).

γ) Es gilt (siehe 1.2.59 iii), dass $\frac{x^\nu}{\nu!} \to 0$ $(\nu \to \infty)$ für alle $x \geq 0$, ist also $R \geq 1$ beliebig, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R^\nu}{\nu!} \leq 1, \nu \geq \mathbb{N}$, also $\frac{\nu!}{R^\nu} \geq 1, \nu \geq \mathbb{N}$, und damit $\sqrt[\nu]{\nu!} \geq R, \nu \geq \mathbb{N}$.

δ) Aus γ) folgt $\sqrt[\nu]{\frac{R^\nu}{\nu!}} = R \cdot \frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu!}} \to 0$ $(n \to \infty)$.

ii) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ absolut. Dies folgt aus $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|z^\nu|}{\nu!}} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|z|^\nu}{\nu!}} = 0 < 1$.
$\exp(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ heißt Exponentialreihe, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$ heißt Exponentialfunktion.

iii) Es sei $x_\nu = \nu\left(\frac{2\nu+1}{3\nu+2}\right)^\nu$. Dann gilt

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\nu} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{2\nu+1}{3\nu+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$.

**Satz 2.2.23** *(Quotientenkriterium)*
*Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ eine Reihe in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ und es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_\nu \neq 0$ für alle $\nu \geq N$.*
*Gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \frac{\|z_{\nu+1}\|}{\|z_\nu\|} < 1$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ (absolut).*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $x_\nu := \|z_\nu\| > 0,\ \nu \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen

$$\alpha := \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{x_\nu} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} =: \beta.$$

Die Behauptung folgt dann mit dem Wurzelkriterium.
Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{\nu \geq N} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \leq \beta + \varepsilon, \nu \geq N$.
Für $\nu > N$ folgt dann

$$\begin{aligned} x_\nu &= x_N \cdot \prod_{k=N}^{\nu-1} \left( \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \right) \leq x_N \cdot (\beta + \varepsilon)^{\nu - N} \\ &= (\beta + \varepsilon)^\nu \cdot \frac{x_N}{(\beta + \varepsilon)^N}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{(\beta + \varepsilon)^\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\frac{x_N}{(\beta + \varepsilon)^N}} \\ &= (\beta + \varepsilon) \limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\frac{x_N}{(\beta + \varepsilon)^N}} = \beta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\alpha \leq \beta$. $\square$

**Beispiel 2.2.24** Es sei $z_\nu = \frac{z^\nu}{\nu!}, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $z \neq 0$

$$\limsup_{\nu \to \infty} \frac{|z_{\nu+1}|}{|z_\nu|} = \limsup_{\nu \to \infty} \frac{|z|}{\nu + 1} = 0 < 1.$$

Also konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, siehe 2.2.22 ii).

**Definition 2.2.25** Für eine Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$ setzt man $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ s_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu (z - z_0)^\nu$. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt die mit $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ und $z_0$ gebildete Potenzreihe. Anstelle $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ schreibt man $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt $s_n$ die $n$-te Partialsumme der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$.
$R := \frac{1}{\limsup\limits_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe. Hierbei ist $+\infty := \frac{1}{0}$ und $0 := \frac{1}{+\infty}$ gesetzt.

**Satz 2.2.26** *Ist $R$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ absolut für $|z-z_0| < R$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ divergiert für $|z-z_0| > R$.*
*$R$ ist also das eindeutig bestimmte $x \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

*i)* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *konvergiert für alle $|z-z_0| < x$,*

*ii)* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ *divergiert für alle $|z-z_0| > x$.*

*Konvergiert also $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so gilt $R \geq |z-z_0|$, divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so gilt $R \leq |z-z_0|$.*

**Beweis.** Es sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Wir setzen $z_\nu := a_\nu (z-z_0)^\nu, \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|z_\nu|} = \frac{|z-z_0|}{R}$.
Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ sicher dann (absolut), falls $\frac{|z-z_0|}{R} < 1$, d.h. $|z-z_0| < R$, und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ divergiert sicher dann, wenn $\frac{|z-z_0|}{R} > 1$, d.h. $|z-z_0| > R$. □

**Bemerkung 2.2.27** i) Sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_1)^\nu$ zwei Potenzreihen und existiert $N \in \mathbb{N}$ und $C \geq 1$ mit $\frac{1}{C}|a_\nu| \leq |b_\nu| \leq C|a_\nu|, \nu \geq N$, so haben $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_1)^\nu$ den selben Konvergenzradius. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} &= \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\frac{|a_\nu|}{C}} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{C|a_\nu|} \\ &= \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}.\end{aligned}$$

ii) Ist $R$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, so macht obiger Satz keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Reihe

$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für $|z-z_0| = R$.

Nochmal: Ist $R$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ für alle $z \in U_R(z_0)$ (sogar absolut) und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \backslash B_R(z_0) = B_R(z_0)^c$.

**Beispiel 2.2.28**

i) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ hat Konvergenzradius $\infty$.

ii) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ hat Konvergenzradius 1, für alle $|z| = 1$ divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$.

iii) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$ hat Konvergenzradius 1, für $z = 1$ divergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$, für $z = -1$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$.

iv) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$ hat Konvergenzradius 1, für $|z| = 1$ konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$.

v) Die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \nu! z^\nu$ hat Konvergenzradius 0.

**Satz 2.2.29** *Sind $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_1$ bzw. $R_2$, ist $\lambda \in \mathbb{C}$, und ist $R$ der Konvergenzradius von $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu$, so gilt $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ (wobei $\min\{s, +\infty\} =: s$) und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu = \lambda \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ für alle $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$.*

**Beweis.** Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \min\{R_1, R_2\}$. Aus 2.2.26 und 2.2.4 folgt, dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu$ konvergiert und dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\lambda a_\nu + b_\nu)(z-z_0)^\nu = \lambda \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu$ gilt.

Mit 2.2.26 folgt $R \geq |z - z_0|$. Da $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \min\{R_1, R_2\}$ beliebig war, gilt $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. $\square$

**Bemerkung 2.2.30** Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R$. Weiter sei $r < R$ beliebig. Wir setzen $U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ und $g_\nu : U_r(z_0) \to C, g_\nu(z) = a_\nu z^\nu$ und $s_n : U_r(z_0) \to \mathbb{C}, s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Dann sind $g_\nu$ und $s_n$ Elemente von $B(U_r(z_0), \mathbb{C}) = \{f : U_r(z_0) \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$. Setzen wir $\|f\|_{U_r(z_0)} := \sup\limits_{|z-z_0|<r} |f(z)| = \sup\limits_{z \in U_r(z_0)} |f(z)|$, so war in 2.1.17 gezeigt, dass $B(U_r(z), \mathbb{C})$ ein vollständiger normierter Raum ist.
Aus

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n} \|g_\nu\|_{U_r(z_0)} &= \sum_{\nu=0}^{n} \sup_{|z-z_0|<r} |g_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| r^\nu \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| r^\nu (< \infty) \end{aligned}$$

folgt, dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ in $B(U_r(z_0), \mathbb{C})$ absolut konvergiert.
Es sei $f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$. Dann gilt für $|z - z_0| < r$ mit 2.1.18 $f(z) = \Big(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\Big)(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$.
Insbesondere ist also $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine beschränkte Funktion, und es gilt

$$\sup_{z \in U_r(z_0)} |f(z) - s_n(z)| = \sup_{z \in U_r(z_0)} \Big| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(z) \Big|$$

$$= \Big\| f - \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \Big\|_{U_r(z_0)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

da $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu = f$ in $B(U_r(z_0), \mathbb{C})$.

Man sagt, die Partialsummen konvergieren gleichmäßig auf $U_r(z_0)$ gegen die Potenzreihe.

**Beispiel 2.2.31** i) Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ die geometrische Reihe. Sie hat den Konvergenzradius 1, also ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$, wohldefiniert ($\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$).
Ist wie oben $g_\nu(z) := z^\nu$, so gilt (mit $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$) nach 2.2.30 für $z < 1$:

$\alpha$) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \|g_\nu\|_{\mathbb{D}_r} \Big( = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sup\limits_{|z|<r} |g_\nu(z)| = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \Big)$ konvergiert.

$\beta$) $f\big|_{\mathbb{D}_r} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\big|_{\mathbb{D}_r}$ in $B(\mathbb{D}_r, \mathbb{C})$.

Ist $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu \in B(\mathbb{D}, \mathbb{C}), n \in \mathbb{N}_0$, so ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt, da $\sup\limits_{|z|<1} |s_n(z)| = n + 1 \to \infty$. Weiter ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ keine beschränkte Abbildung, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-(n-\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. **Keinesfalls** kann also gelten, dass $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu = f$ in $B(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, obwohl $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu|_{\mathbb{D}_r} = f|_{\mathbb{D}_r}$ in $B(\mathbb{D}_r, \mathbb{C}), (r < 1)$.

ii) Es sei die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$ vorgelegt. Wegen $\sup\limits_{|z|<1} \Big| \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2} \Big| \leq \sup\limits_{|z|\leq 1} \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt $f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} g_\nu$ in $B(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, wobei $g_\nu(z) = \frac{z^\nu}{\nu^2}, f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^2}$.

iii) Ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, die Exponentialfunktion, dann gilt mit obiger Bemerkung und $g_\nu(z) := \frac{z^\nu}{\nu!}$:

$$\exp\big|_{\mathbb{D}_r} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\big|_{\mathbb{D}_r} \text{ in } B(\mathbb{D}_r, \mathbb{C}) \text{ für alle } r > 0,$$

d.h. $\sup\limits_{|z|<r} \Big| \exp(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \Big| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $r > 0$.

**Bemerkung 2.2.32** Es sei $\exp(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}, z \in \mathbb{C}$, die Exponentialreihe. Wir wollen die fundamentale Gleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w), \;\; z, w \in \mathbb{C},$$

beweisen. Nach Anwendung des binomischen Satzes ist diese äquivalent zu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!(\nu-k)!}\,z^k w^{\nu-k}\Big)=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,w^k\Big),\ \ z,w\in\mathbb{C}.$$

Wir stehen vor dem Problem, folgende Menge von komplexen Zahlen „aufzusummieren“:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & z & \frac{z^2}{2} & \frac{z^3}{6} & \dots \\[2ex]
w & zw & \frac{z^2}{2}w & \frac{z^3}{6}w & \dots \\[2ex]
\frac{w^2}{2} & z\frac{w^2}{2} & \frac{z^2}{2}\frac{w^2}{2} & \frac{z^3}{6}\frac{w^2}{2} & \\[2ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Summieren wir zunächst die „Antidiagonalen“ auf, bilden dann eine Reihe, so erhalten wir die linke Seite obiger Gleichung.
Bilden wir aber zunächst die Reihen, welche den Zeilen entsprechen, und dann die Reihe dieser Reihen, so erhalten wir die rechte Seite der Gleichung. Analoges gilt, wenn wir zunächst spaltenweise und dann zeilenweise „aufaddieren“.
Wir müssen noch beweisen, um unsere Gleichung zu zeigen, dass es gleich ist, wie wir „summieren“.
Wir beginnen mit

**Definition 2.2.33** Es sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $z : I \to E$ eine Abbildung in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$.
Man setzt $z_\iota := z(\iota), \iota \in I$ und schreibt $z = (z_\iota)_{\iota\in I}$.
$(z_\iota)_{\iota\in I}$ heißt Familie in $E$. Ist $J \subset I$ endlich und ist $|J| = n, J = \{\iota_1, \dots, \iota_n\}$, so setzt man $\sum\limits_{\iota\in J} z_\iota := \sum\limits_{\nu=1}^{n} z_{\iota_\nu}$. Ist $J = \emptyset$, so sei $\sum\limits_{\iota\in J} z_\iota =: 0$.
Die Familie $(z_\iota)_{\iota\in I}$ heißt summierbar zur Summe $s \in E$, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M \subset I$ existiert, so dass für alle endlichen Teilmengen $M \subset \hat{M} \subset I$

$$\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\| < \varepsilon$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir $\sum\limits_{\iota\in I} z_\iota := s$.

**Beispiel 2.2.34** Es sei $I = \mathbb{N}_0^2 = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}_0\}, z,w \in \mathbb{C}$ und $z_{(n,m)} := \frac{w^n}{n!}\frac{z^m}{m!}, (n,m) \in \mathbb{N}_0^2$.
Ist $J = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2)\}$, so gilt $\sum\limits_{(n,m)\in J} z_{(n,m)} = 1 + w + z + zw + \frac{z^2}{2} + \frac{w^2}{2}$.

**Satz 2.2.35** *Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in dem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$, die summierbar zur Summe $s$ sei. Ist $\tau : J \to I$ bijektiv, so ist auch die Familie $(z_{\tau(j)})_{j\in J}$ summierbar zur Summe $s$.*

**Beweis.** Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $M \subset I, |M| < \infty$, so dass

$$\Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big\| < \varepsilon$$

für alle $M \subset \hat{M} \subset I, |\hat{M}| < \infty$.
Es sei $L := \tau^{-1}(M) \subset J$. Dann ist $|L| = |M| < \infty$. Ist $L \subset \hat{L} \subset J, |\hat{L}| < \infty$, so setzen wir $\hat{M} := \tau(\hat{L})$.
Aus

$$\sum_{j\in\hat{L}} z_{\tau(j)} = \sum_{j\in\{\tau^{-1}(\iota):\iota\in\hat{M}\}} z_{\tau(j)} = \sum_{\iota\in\hat{M}} z_{\tau(\tau^{-1}(\iota))} = \sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota$$

folgt

$$\Big\|\sum_{j\in\hat{L}} z_{\tau(j)} - s\Big\| = \Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big\| < \varepsilon.$$

□

**Bemerkung 2.2.36** Satz 2.2.35 besagt gerade, dass summierbare Familien stabil unter Umordnungen sind.
Der Riemannsche Umordnungssatz, den wir hier nicht beweisen wollen, besagt, dass für eine beliebige konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ reeller Zahlen, und für jedes $s \in \mathbb{R}$ man eine Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ finden kann, so dass

$$s = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\tau(\nu)}.$$

Wir werden später zeigen, dass Summierbarkeit einer Familie $(x_n)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ reeller (oder komplexer) Zahlen gerade die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$ bedeutet und dass in diesem Fall $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x_\nu = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0} x_\nu$ gilt.

**Satz 2.2.37** *Sind* $(z_\iota)_{\iota\in I}$ *und* $(w_\iota)_{\iota\in I}$ *summierbare Familien und ist* $\lambda \in \mathbb{K}$, *so ist auch* $(\lambda z_\iota + w_\iota)_{\iota\in I}$ *summierbar, und es gilt* $\sum\limits_{\iota\in I} \lambda z_\iota + w_\iota = \lambda \sum\limits_{\iota\in I} z_\iota + \sum\limits_{\iota\in I} w_\iota$.

**Beweis.** Dies folgt aus $\sum\limits_{\iota\in M} \lambda z_\iota + w_\iota = \lambda \sum\limits_{\iota\in M} z_\iota + \sum\limits_{\iota\in M} w_\iota$ für alle $M \subset I, |M| < \infty$. □

**Satz 2.2.38** *Ist* $(z_\iota)_{\iota\in I}$ *eine Familie komplexer Zahlen, so ist* $(z_\iota)_{\iota\in I}$ *genau dann summierbar, wenn* $(\operatorname{Re} z_\iota)_{\iota\in I}$ *und* $(\operatorname{Im} z_\iota)_{\iota\in I}$ *summierbar sind. In diesem Fall gilt* $\sum\limits_{\iota\in I} z_\iota = \sum\limits_{\iota\in I} \operatorname{Re}(z_\iota) + i \sum\limits_{\iota\in I} \operatorname{Im} z_\iota$ *und auch* $\sum\limits_{\iota\in I} \overline{z_\iota} = \overline{\sum\limits_{\iota\in I} z_\iota}$.

**Beweis.** Übungen. □

Auch im Fall der Summierbarkeit zeigen wir ein Cauchykriterium:

**Lemma 2.2.39** *Eine Familie in einem vollständigen normierten Raum* $(E, \|\cdot\|)$ *ist genau dann summierbar, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $M \subset I$ *endlich mit*

$$\|\sum_{\iota\in K} z_\iota\| < \varepsilon$$

*für alle* $K \subset I \backslash M, |K| < \infty$, *existiert.*

**Beweis.**

1. Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar, und es sei $\varepsilon > 0$.
   Wähle $M \subset I$ endlich mit $\|\sum\limits_{\iota\in \hat{M}} z_\iota - \sum\limits_{\iota\in I} z_\iota\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $M \subset \hat{M} \subset I$.
   Ist nun $K \subset I\backslash M$ endlich, so folgt

$$\begin{aligned}
\|\sum_{\iota\in K} z_\iota\| &= \|\sum_{\iota\in K\cup M} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota + \sum_{\iota\in I} z_\iota - \sum_{\iota\in M} z_\iota\| \\
&\leq \|\sum_{\iota\in K\cup M} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\| + \|\sum_{\iota\in I} z_\iota - \sum_{\iota\in M} z_\iota\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Es gelte die Cauchyeigenschaft. Wir wählen gemäß dieser eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlichen Teilmengen von $I$ mit $M_{n+1} \supset M_n$ und $\big\|\sum\limits_{\iota\in K} z_\iota\big\| < \frac{1}{2^n}$ für alle $K \subset I\backslash M_n$ endlich und setzen $s_n := \sum\limits_{\iota\in M_n} z_\iota$. Es folgt für $m \geq n$: $\|s_m - s_n\| = \big\|\sum\limits_{\iota\in M_m\backslash M_n} z_\iota\big\| < \frac{1}{2^n}$, also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $E$, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $s \in E$ konvergiert. Es folgt $\|s - s_n\| \leq \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ und setze $M := M_N$. Dann folgt für $M \subset \hat{M} \subset I$ mit $|\hat{M}| < \infty$:

$$\Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - s\Big\| \leq \Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in M_N} z_\iota\Big\| + \Big\|\sum_{\iota\in M_n} z_\iota - s\Big\|$$

$$\leq \Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}\backslash M_N} z_\iota\Big\| + \|s_n - s\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Korollar 2.2.40** *Ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine summierbare Familie in einem vollständigen normierten Raum und ist $J \subset I$, so ist auch $(z_\iota)_{\iota\in J}$ summierbar.*

**Beweis.** Die Cauchyeigenschaft aus 2.2.39 überträgt sich offensichtlich auf Teilfamilien (Ist $K \subset J\backslash M$, so gilt $K \subset I\backslash M$). □

**Satz 2.2.41** *Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in dem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$. Ist $\big\{\sum\limits_{\iota\in M} \|z_\iota\| : M \subset I, |M| < \infty\big\}$ beschränkt (in $\mathbb{R}$), so ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar (und es gilt $\big(\big\|\sum\limits_{\iota\in I} z_\iota\big\| \leq \sum\limits_{\iota\in I} \|z_\iota\|\big)$.*

**Beweis.** Es sei $c := \sup\big\{\sum\limits_{\iota\in M} \|z_\iota\| : M \subset I, |M| < \infty\big\}$, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $M \subset I, |M| < \infty$ mit $\sum\limits_{\iota\in M} \|z_\iota\| > c - \varepsilon$. Dann gilt für alle $K \subset I\backslash M,\ |K| < \infty$:

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{\iota\in K} z_\iota\Big\| &\leq \sum_{\iota\in K} \|z_\iota\| = \sum_{\iota\in K\cup M} \|z_\iota\| - \sum_{\iota\in M} \|z_\iota\| \\ &< c - (c - \varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also hat $(z_\iota)_{\iota\in I}$ die im Lemma 2.2.39 geforderte Cauchyeigenschaft. $\square$

**Korollar 2.2.42** *Es sei $(x_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie nichtnegativer reeller Zahlen. Dann sind äquivalent*

*i)* $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *summierbar,*

*ii)* $\sup\big\{\sum_{\iota\in M} x_\iota : M\subset I, |M|<\infty\big\}<\infty$.

**Beweis.** ii) $\Rightarrow$ i) folgt aus 2.2.41.
i) $\Rightarrow$ ii) Nach der Definition der Summierbarkeit existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $M\subset I,\ |M|<\infty$, so dass

$$\big|\sum_{\iota\in\hat M} x_\iota - \sum_{\iota\in I} x_\iota\big| < \varepsilon\ (=1)$$

für alle $M\subset\hat M\subset I, |\hat M|<\infty$.
Also gilt

$$\sum_{\iota\in\hat M} x_\iota \le 1 + \sum_{\iota\in I} x_\iota$$

für alle $\hat M\subset I, |\hat M|<\infty$. $\square$

**Satz 2.2.43** *Ist $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie in $\mathbb{K}$, so sind äquivalent*

*i)* $(z_\iota)_{\iota\in I}$ *ist summierbar,*

*ii)* $\sup\big\{\sum_{\iota\in M} |z_\iota| : M\subset I, |M|<\infty\big\}<\infty$.

**Beweis.** ii) $\Rightarrow$ i) folgt aus 2.2.41.
i) $\Rightarrow$ ii)

1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Es sei $\varepsilon>0$ beliebig. Nach 2.2.39 existiert ein $M\subset I, |M|<\infty$ mit

$$\Big|\sum_{\iota\in L} z_\iota\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $L \subset I \backslash M, |L| < \infty$.
Ist nun $K \subset I \backslash M, |K| < \infty$, so sei

$$K^+ := \{\iota \in K : z_\iota \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad K^- := \{\iota \in K : z_\iota \leq 0\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{\iota \in K} |z_\iota|\Big| &= \sum_{\iota \in K} |z_\iota| = \sum_{\iota \in K^+} z_\iota - \sum_{\iota \in K^-} z_\iota \\ &= \Big|\sum_{\iota \in K^+} z_\iota\Big| + \Big|\sum_{\iota \in K^-} z_\iota\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also hat $\big(|z_\iota|\big)_{\iota \in I}$ die in 2.2.39 geforderte Cauchyeigenschaft, und mit 2.2.42 folgt dann $\sup\big\{\sum\limits_{\iota \in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\big\} < \infty$.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Da $(z_\iota)_{\iota \in I}$ summierbar, sind mit 2.2.38 auch $(\operatorname{Re} z_\iota)_{\iota \in I}$ und $(\operatorname{Im} z_\iota)_{\iota \in I}$ summierbar. Es folgt mit 1.

$$\begin{aligned} &\sup\Big\{\sum_{\iota \in M} |z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\Big\} \\ &\leq \sup\Big\{\sum_{\iota \in M} |\operatorname{Re} z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\Big\} + \\ &\quad \sup\Big\{\sum_{\iota \in M} |\operatorname{Im} z_\iota| : M \subset I, |M| < \infty\Big\} < +\infty. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.2.44** *Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in dem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$. Dann sind äquivalent*

*i) Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert absolut,*

*ii) $\big(\|z_\nu\|\big)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ ist summierbar.*

*Ist eine der beiden Bedingungen erfüllt, so gilt für alle bijektiven Abbildungen $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$:*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z_{\tau(\nu)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} z_{\tau(\nu)} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} z_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu.$$

**Beweis.** i) und ii) sind gemäß den Sätzen 2.2.18 und 2.2.41 jeweils äquivalent zu
$$\sup\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\|z_\nu\| : n\in\mathbb{N}\right\}<\infty.$$
Aufgrund von Satz 2.2.35 genügt es, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ zu zeigen. Es sei dazu $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $M\subset\mathbb{N}_0$ endlich mit $\Big\|\sum\limits_{n\in\hat{M}} z_n - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} z_n\Big\|<\varepsilon$ für alle $M\subset\hat{M}\subset\mathbb{N}_0, |\hat{M}|<\infty$. Sei $N:=\sup M$. Dann gilt für alle $n\geq N$:
$$\Big\|\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu - \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu\Big\| = \Big\|\sum_{\nu\in\{0,\ldots,n\}} z_\nu - \sum_{\nu\in\mathbb{N}_0} z_\nu\Big\| < \varepsilon,$$
da $\{0,\ldots,n\}\supset M$. □

**Satz 2.2.45** *(Umordnungssatz)*
*Es sei $(z_\iota)_{\iota\in I}$ eine summierbare Familie in dem vollständigen normierten Raum $(E,\|\cdot\|)$, und es sei $(I_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Zerlegung von $I$ (d.h. $\bigcup\limits_{\kappa\in K} I_\kappa = I, I_{\kappa_1}\cap I_{\kappa_2}=\emptyset$, falls $\kappa_1\neq\kappa_2$, und $I_\kappa\neq\emptyset$ für alle $\kappa\in K$). Dann ist $(z_\iota)_{\iota\in I_\kappa}$ für alle $\kappa\in K$ summierbar, die Familie $\Big(\sum\limits_{\iota\in I_\kappa} z_\iota\Big)_{\kappa\in K}$ ist summierbar, und es gilt*
$$\sum_{\kappa\in K}\sum_{\iota\in I_\kappa} z_\iota = \sum_{\iota\in I} z_\iota.$$

**Beweis.** Da $I_\kappa\subset I$, folgt mit 2.2.40, dass $(z_\iota)_{\iota\in I_\kappa}$ summierbar ist.
Es sei $\varepsilon>0$. Da $(z_\iota)_{\iota\in I}$ summierbar ist, existiert ein $M\subset I, |M|<\infty$ mit
$$\Big\|\sum_{\iota\in\hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota\in I} z_\iota\Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2},\quad \hat{M}\supset M, |\hat{M}|<\infty.$$
Sei $L\subset K$ definiert durch $L:=\{\kappa\in K : I_\kappa\cap M\neq\emptyset\}$. Dann ist $|L|<\infty$ (da $M$ endlich und $(I_\kappa)_{\kappa\in K}$ Zerlegung). Sei nun $K\supset\hat{L}\supset L, |\hat{L}|<\infty$.
Wähle $I_\kappa\supset S_\kappa$ endlich mit

$\alpha)$ $\Big\|\sum\limits_{\iota\in S_\kappa} z_\iota - \sum\limits_{\iota\in I_\kappa} z_\iota\Big\| < \dfrac{\varepsilon}{2|\hat{L}|},\ \kappa\in\hat{L}$ und

$\beta)$ $S_\kappa\supset M\cap I_\kappa,\ \kappa\in L.$

Aus $\beta$) folgt $\hat{M} := \bigcup_{\kappa \in \hat{L}} S_\kappa \supset \bigcup_{\kappa \in L} S_\kappa \supset M$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{\kappa \in \hat{L}} \sum_{\iota \in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\iota \in I} z_\iota \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{\kappa \in \hat{L}} \sum_{\iota \in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\kappa \in \hat{L}} \sum_{\iota \in S_\kappa} z_\iota + \sum_{\iota \in \hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota \in I} z_\iota \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{\kappa \in \hat{L}} \sum_{\iota \in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\kappa \in \hat{L}} \sum_{\iota \in S_\kappa} z_\iota \Big\| + \Big\| \sum_{\iota \in \hat{M}} z_\iota - \sum_{\iota \in I} z_\iota \Big\| \\
&\leq \sum_{\kappa \in \hat{L}} \Big\| \sum_{\iota \in I_\kappa} z_\iota - \sum_{\iota \in S_\kappa} z_\iota \Big\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Korollar 2.2.46** *(Doppelreihensatz)*
*Es sei $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$ eine Familie in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$, und es gelte $\sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \|a_{n,k}\| < \infty$. Dann ist $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$ (absolut) summierbar, und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$$

*sowie*

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu, n-\nu}.$$

**Beweis.** Die Voraussetzung impliziert $\sup\Big\{ \sum_{(n,k) \in M} \|a_{n,k}\| : M \subset \mathbb{N}_0^2, |M| < \infty \Big\} < \infty$ (also ist $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$ absolutsummierbar), und da $(E, \|\cdot\|)$ vollständig ist, ist nach 2.2.41 $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2}$ auch summierbar.

Aus dem Umordnungssatz und Satz 2.2.44 folgt mit $I_n := \{(n,k) : k \in \mathbb{N}_0\}$:

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{(n,k)\in I_n} a_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}.$$

Analog zeigt man $\sum\limits_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,k}$.

Es sei $I_n := \{(\nu,\mu) \in \mathbb{N}_0^2 : \nu + \mu = n\}$.

Dann gilt wieder mit dem Umordnungssatz und 2.2.44

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2} a_{n,k} &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{(\nu,\mu)\in I_n} a_{\nu,\mu} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,n-\nu}.
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.2.47** Wir wollen für $z, w \in \mathbb{C}, |z|, |w| < 1$ die Familie $(z^n w^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2}$

$$\begin{array}{cccc}
1 & w & w^2 & \dots \\
z & zw & zw^2 & \dots \\
z^2 & z^2w & z^2w^2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

auf Summierbarkeit untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} |z^n w^m| &= \sum_{n=0}^{N} |z|^n \cdot \sum_{m=0}^{N} |w|^m \\
&\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{1}{1-|w|}.
\end{aligned}$$

Also folgt aus dem Doppelreihensatz, dass $(z^n w^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2}$ summierbar ist und dass

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2} z^n w^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z^n w^m = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{m=0}^{\infty} w^m = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-w}.$$

**Korollar 2.2.48** *(Satz vom Cauchyprodukt)*
*Sind* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *und* $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} w_\mu$ *zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen, so gilt*

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z_n w_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z_n w_k$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu w_{n-\nu}.$$

**Beweis.** Die Familie $(z_n w_k)_{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ erfüllt wegen

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |z_n w_k| = \Big(\sum_{n=0}^{N}|z_n|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{N}|w_k|\Big) \le \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N}|w_k|\Big)$$

die Voraussetzung des Doppelreihensatzes. □

**Korollar 2.2.49** *(Produktsatz für Potenzreihen)*
*Es seien* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *und* $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu$ *zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien* $R_1$ *bzw.* $R_2$*.*
*Dann ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\big) z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \ge \min\{R_1, R_2\}$*, und es gilt*

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\Big)\cdot\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big) z^\nu$$

*für* $|z| < \min\{R_1, R_2\}$*.*

**Beweis.** Es sei $|z| < \min\{R_1, R_2\}$.
Dann folgt aus dem vorhergehenden Korollar

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu b_{n-\nu} z^{n-\nu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big) z^n.$$

□

**Beispiel 2.2.50** Es sei $|z| < 1, z \in \mathbb{C}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{\mu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{\nu=0}^{n} 1 \Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n . \end{aligned}$$

# Kapitel 3

# Elementare Funktionen I

Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R$. Dann heißt $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, die durch $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (z-z_0)^\nu$ dargestellte Funktion.
Die einfachsten dieser Funktionen sind die Polynome, d.h. Funktionen der Form $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$.

Wir wollen in diesem Kapitel etwas kompliziertere Funktionen betrachten, nämlich die Exponentenfunktion und ihre Ableger, die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, welche auch durch Potenzreihen dargestellt werden.

## 3.1 Die Exponentialfunktion

**Definition 3.1.1** Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, heißt Exponentialfunktion.

**Lemma 3.1.2** *Sind $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $|a_\nu|, |b_\nu| \leq 1,\ 1 \leq \nu \leq n$, so gilt*

$$\Big| \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu \Big| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu|.$$

**Beweis.** (durch vollständige Induktion)
$n = 1$. Ist offensichtlich.

$n-1 \mapsto n$. Es sei $a := \prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu$ und $b := \prod_{\nu=1}^{n-1} b_\nu$.
Dann folgt

$$\Big|\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu\Big| = |a(a_n - b_n) + b_n(a-b)|$$

$$\leq |a_n - b_n| + \Big|\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{n-1} b_\nu\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - b_\nu|.$$

$\square$

**Satz 3.1.3** *Es gilt* $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

**Beweis.** Es sei $s_n(z) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}$ und $t_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$.
Wir zeigen $|s_n(z) - t_n(z)| \to 0\,(n \to \infty)$.
Denn dann folgt $t_n(z) = \big(t_n(z) - s_n(z)\big) + s_n(z) \to \exp(z)\,(n \to \infty)$.
Mit dem binomischen Lehrsatz gilt

$$t_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{1}{n^\nu} z^\nu = 1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}.$$

Mit 3.1.2 folgt dann für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
|s_n(z) - t_n(z)| &= \Big|1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} - \Big(1 + z + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} 1 - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big| \\
&\leq \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \Big|\prod_{k=0}^{\nu-1} 1 - \prod_{k=0}^{\nu-1} \frac{n-k}{n}\Big| \\
&\leq \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \Big|1 - \frac{n-k}{n}\Big| \\
&= \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{k}{n} = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \frac{(\nu-1)\nu}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}|z|^2 \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{|z|^\nu}{\nu!} \leq \frac{1}{2n}|z|^2 \exp(|z|) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.1.4** *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w).$$

**Beweis.** Nach dem Satz über das Cauchyprodukt und dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} z^\mu\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} n! \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(n-\nu)!} z^\nu w^{n-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w).
\end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.5** Es sei

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

**Korollar 3.1.6** *Es gilt*

*i)* $\exp(z) \neq 0$, $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$ *und* $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

*ii)* $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$, $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$ *und* $\exp(x) < \exp(y)$ *für* $x < y$.
$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist also injektiv.*

*iii)* $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

*iv)* $|\exp(ix)| = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

*v)* $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

**Beweis.**

i) Mit 3.1.4 gilt $\exp(z)\cdot\exp(-z) = \exp(0) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{0^\nu}{\nu!} = 1$. Also ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
Der zweite Teil folgt aus $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{\frac{z^\nu}{\nu!}} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{\nu!} = \exp(\overline{z})$.

ii) Ist $x > 0$, so gilt $\exp(x) = 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} > 1 > 0$.
Mit i) ist dann auch $\exp(-x) > 0$ für $x > 0$.
Aus 3.1.3 folgt $\exp(1) = e$.
Ist $x < y$, so ist $\exp(y) = \exp(y-x)\cdot\exp(x) > \exp(x)$, da $y - x > 0$.

iii) $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z+\overline{z}) = \exp(\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2$.
Mit ii) folgt $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

iv) folgt aus iii), $\exp(0) = 1$ und $\operatorname{Re}(ix) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

v) $\exp(n) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} \exp(1) = \prod\limits_{\nu=1}^{n} e = e^n$ für $n > 1$,
$\exp(0) = 1 = e^0$ und
$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n = e^{-n}$ für $n > 1$.

$\square$

Wegen v) setzt man:

**Definition 3.1.7** Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$e^z := \exp(z).$$

**Bemerkung 3.1.8** (stetige Verzinsung)
Ein Anfangskapital $K$ wächst bei einem Jahreszins $q$ ($> 0$) und bei Verzinsung jeweils nach dem $n$-ten Teil eines Jahres auf das Endkapital $K_n = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{n}\right)^n \cdot K$, z. B.

$$K_1 = \left(1 + \frac{q}{100}\right)K \qquad \text{(jährliche Verzinsung)}$$

$$K_{12} = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{12}\right)^{12} K \qquad \text{(monatliche Verzinsung)}$$

$$K_{365} = \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{365}\right)^{365} K \quad \text{(tägliche Verzinsung)}$$

Im Grenzfall (sogenannte stetige Verzinsung) erhält man

$$K_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{q}{100}}{n}\right)^n K = e^{\frac{q}{100}} K.$$

**Satz 3.1.9** *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.*

*i) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^k} = +\infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

*ii) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k e^{x_n} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

*iii) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ($\in \mathbb{R}$), so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{x_0} \quad \text{(Stetigkeit der Exponentialfunktion).}$$

**Beweis.** in den Übungen.
Hinweis: Für iii) zeige man zunächst

$\alpha$) $e^y \geq 1 + y,\ y \in \mathbb{R}$, und

$\beta$) $e^y \leq \frac{1}{1-y},\ y < 1$, dann schreibe man $e^{x_n} = e^{x_0} \cdot e^{x_n - x_0}$ und verwende $\alpha$) und $\beta$) für $y = x_n - x_0$.

□

## 3.2 Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

**Definition 3.2.1** (trigonometrische Funktionen)
Es seien $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cos z := \cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{und}$$

$$\sin z := \sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),\ z \in \mathbb{C}.$$

**Satz 3.2.2** *Es gilt*

*i)* $\cos z = \cos(-z),\ \ \sin z = -\sin(-z),\ z \in \mathbb{C}$.

*ii)* $e^{iz} = \cos z + i \sin z,\ z \in \mathbb{C}$ *(Eulersche Formel).*

*iii)* $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$, *für* $x \in \mathbb{R}$ *und sogar* $-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

*iv)* $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1,\ z \in \mathbb{C}$.

*v)* $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix},\ \sin x = \operatorname{Im} e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$, *und* $e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

*vi)* $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ *und*
$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,\ z, w \in \mathbb{C}$ *(Additionstheoreme).*

*vii)* $\cos z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ *und*

$\sin z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\ z \in \mathbb{C}$.

**Beweis.**

i) $\cos(-z) = \frac{1}{2}\left(e^{-iz} + e^{iz}\right) = \cos z$, für sin analog.

ii) $\cos z + i \sin z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + \frac{i}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = e^{iz}$.

iii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\cos x} &= \overline{\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\overline{ix}} + e^{\overline{-ix}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) = \cos x,
\end{aligned}$$

damit $\cos x \in \mathbb{R}$. Weiter folgt $|\cos x| \le \frac{1}{2}\left(|e^{ix}| + |e^{-ix}|\right) = 1$.
Analog zeigt man die Behauptung für sin.

iv) $\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2$
$= \frac{1}{4}\left(2e^{iz} \cdot 2e^{-iz}\right) = e^0 = 1$.

v) folgt aus ii) und iii).

vi) $\cos(z + w) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}\right)$
$= \frac{1}{2}\Big((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w)\Big)$
$\quad +\Big(\cos(-z) + i \sin(-z)\Big)\Big(\cos(-w) + i \sin(-w)\Big)$
$= \frac{1}{2}\Big(\cos z \cos w - \sin z \sin w + i(\sin z \cos w + \cos z \sin w)$
$\quad + \cos z \cos w - \sin z \sin w - i(\sin z \cos w + \cos z \sin w)\Big)$
$= \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

Analog für $\sin(z + w)$.

vii) Aus $e^z = \exp(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ erhalten wir

$$e^{iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{i^\nu}{\nu!} z^\nu \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^\nu}{\nu!} z^\nu.$$

Für die Potenzreihe $\cos z = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(i^\nu + (-i)^\nu)\frac{1}{\nu!}}_{=:a_\nu} z^\nu$ gilt also $a_{2\nu} =$

$(-1)^\nu \frac{1}{(2\nu)!}$ und $a_{2\nu+1} = 0$ und somit

$$\cos z = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Analog zeigt man die Darstellung für $\sin z$.

□

**Definition 3.2.3** (hyperbolische Funktionen)
Es seien die Abbildungen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cosh z := \cosh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \quad \text{und}$$
$$\sinh z := \sinh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

Es gilt

**Satz 3.2.4** *Es gilt*

*i)* $\cosh(-z) = \cosh(z), \ \sinh(-z) = -\sinh(z), \ z \in \mathbb{C}$.

*ii)* $\cosh(z) = \cos(iz), \ \sinh(z) = -i\sin(iz), \ z \in \mathbb{C}$.

*iii)* $\cosh x, \sinh x \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $\frac{1}{2}\, e^{|x|} \leq \cosh x \leq e^{|x|}, \ x \in \mathbb{R}$.

*iv)* $(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$.

*v)* $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$
$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$ *(Additionstheoreme).*

*vi)* $\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \ \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ z \in \mathbb{C}$.

**Beweis.** Analog zu 3.2.2. □

# Kapitel 4

# Topologische Grundbegriffe

## 4.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann hat das Intervall $(a, b)$ die folgende Eigenschaft: Für alle $x \in (a, b)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$U_\varepsilon(x) = \big\{y \in \mathbb{R} : |y - x| = d_{|\cdot|}(y, x) < \varepsilon\big\} \subset (a, b).$$

Man wähle zum Beispiel $\varepsilon := \min\big\{|x - a|, |x - b|\big\}$ oder $\varepsilon$ kleiner.
Allgemeiner setzen wir

**Definition 4.1.1** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen (in $X$), falls für alle $x \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$U_\varepsilon(x) = \big\{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\big\} \subset A.$$

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $A^c = X \backslash A$ offen ist.

**Bemerkung 4.1.2** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $r > 0$ und $z \in X$. Dann gilt

i) $U_r(z)$ ist offen: Es sei $x \in U_r(z)$. Dann gilt $d(x, z) < r$, also ist $\varepsilon := r - d(x, z) > 0$. Ist nun $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig, so gilt $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \varepsilon + d(x, z) = r$.
Also gilt $U_\varepsilon(x) \subset U_r(z)$.

ii) $B_r(z)$ $(= \{y \in X : d(y, z) \leq r\})$ ist abgeschlossen: Es sei $x \in B_r(z)^c$. Dann gilt $d(x, z) > r$, also ist $\varepsilon := d(x, z) - r > 0$. Ist $y \in U_\varepsilon(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} d(y,z) &\geq |d(y,x) - d(x,z)| \\ &\geq d(x,z) - d(y,x) > d(x,z) - \varepsilon = r. \end{aligned}$$

Also gilt $U_\varepsilon(x) \subset B_r(z)^c$.

**Beispiel 4.1.3** Es sei $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Dann sind alle Intervalle der Form $(a,b)$ offen und alle Intervalle der Form $[a,b]$ abgeschlossen. Weiter sind $(-\infty,a),(b,\infty)$ offen und $(-\infty,a],[b,\infty)$ abgeschlossen.
$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

**Satz 4.1.4** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Dann gilt:*

*(T1)* *$\emptyset$ ist offen, und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.*

*(T2)* *$X$ ist offen, und der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist wieder offen.*

*(H)* *Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen $U$ und $V$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

**Beweis.** Da die leere Menge $\emptyset$ kein Element enthält, gilt für jedes ihrer Elemente $x$ (nämlich keines), dass $U_\varepsilon(x) \subset \emptyset$. Trivialerweise ist $X$ offen.
Es sei nun $\mathscr{F}$ ein Mengensystem auf $X$, so dass jedes $F \in \mathscr{F}$ offen ist.
Es sei $x \in \cup\mathscr{F} = \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}} F$. Dann existiert ein $F \in \mathscr{F}$ mit $x \in F$. Da $F$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset F$. Es folgt $U_\varepsilon(x) \subset F \subset \cup\mathscr{F}$. Also ist auch $\cup\mathscr{F}$ offen.
Es sei nun zusätzlich $\mathscr{F}$ endlich (d.h. $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ mit $F_j$ offen, $1 \leq j \leq n$). Es sei $x \in \cap\mathscr{F} = \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} F$. Da jedes $F \in \mathscr{F}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon_F > 0$ mit $U_{\varepsilon_F}(x) \subset F$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_F : F \in \mathscr{F}\}$ $(> 0)$. Dann folgt $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} U_{\varepsilon_F}(x) \subset \bigcap\limits_{F \in \mathscr{F}} = \cap\mathscr{F}$. Also ist auch $\cap\mathscr{F}$ offen.
Zu (H): Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}\, d(x,y) > 0$ und $U := U_\varepsilon(x), V := U_\varepsilon(y)$. Dann sind $U$ und $V$ offen, weiter ist $x \in U$ und $y \in V$.
Nehmen wir an, es existiere ein $z \in U \cap V$. Für dieses $z$ gilt dann $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x,y)$, Widerspruch! Also ist $U \cap V = \emptyset$. $\square$

**Korollar 4.1.5** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Dann sind $\emptyset, X$ abgeschlossen, der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.*

**Beweis.** Wir zeigen exemplarisch die Aussage über den Durchschnitt. Sei also $\mathscr{F}$ ein Mengensystem in $X$, so dass alle $F \in \mathscr{F}$ abgeschlossen sind. Dann ist $F^c$ offen für alle $F \in \mathscr{F}$. Also ist nach 4.1.4 $\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F^c$ offen. Aus den deMorganschen Regeln folgt $\Big(\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F\Big)^c = \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F^c$. Also ist $\Big(\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F\Big)^c$ offen und damit $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F = \cap\mathscr{F}$ definitionsgemäß abgeschlossen. □

**Definition 4.1.6** Es sei $A$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $(X,d)$. Dann heißt

i) $\overset{\circ}{A} := \bigcup\limits_{\substack{O\subset A\\ O \text{ offen}}} O$ das Innere von $A$,

ii) $\overline{A} := \bigcap\limits_{\substack{B\supset A\\ B \text{ abgeschlossen}}} B$ der Abschluss von $A$,

iii) $\partial A := \overline{A}\setminus\overset{\circ}{A}$ der Rand von $A$,

iv) $x \in A$ innerer Punkt von $A$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset A$,

v) $x \in X$ Randpunkt von $A$, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$.

**Satz 4.1.7** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

*i)* $\overset{\circ}{A}$ *ist offen und* $\overset{\circ}{A}$ *ist die größte offene Menge, die in* $A$ *enthalten ist.*

*ii)* $\overline{A}$ *und* $\partial A$ *sind abgeschlossen,* $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge, die* $A$ *enthält.*

*iii)* $\overline{A} = X\setminus\big(\overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}}\big)$,

$\overset{\circ}{A} = X\setminus\big(\overline{X\setminus A}\big)$,

$\partial A = \overline{A} \cap \big(\overline{X\setminus A}\big)$,

*iv)* *A ist offen* $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$,
*A ist abgeschlossen* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$,

*v)* $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow x$ *ist innerer Punkt von* $A$,

*vi)* $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt* $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$,

*vii)* $x \in \partial A \Leftrightarrow x$ *ist Randpunkt von* $A$.

**Beweis.**

i) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{O \subset A \\ O \text{ offen}}} O$ ist Vereinigung offener Mengen, also mit 4.1.4 wieder offen.

ii) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abgeschlossen}}} B$ ist Durchschnitt abgeschlossener Mengen, also mit 4.1.5 wieder abgeschlossen.
$X \backslash \overset{\circ}{A}$ ist mit i) abgeschlossen, $\overline{A}$ ist mit ii) abgeschlossen, also ist $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (X \backslash \overset{\circ}{A})$ als Durchschnitt (zweier) abgeschlossener Mengen nach 4.1.5 wieder abgeschlossen.

iii) Mit den deMorganschen Regeln gilt

$$\begin{aligned} X \backslash \overline{A} &= X \backslash \bigcap\limits_{\substack{B \supset A \\ B \text{abgeschlossen}}} B = \bigcup\limits_{\substack{B \supset A \\ B \text{abgeschlossen}}} X \backslash B = \bigcup\limits_{\substack{C \subset X \backslash A \\ C \text{offen}}} \\ &= \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}} \, . \end{aligned}$$

Also gilt $\overline{A} = X \backslash (X \backslash \overline{A}) = X \backslash ( \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}} )$.

Es sei $B := X \backslash A$. Dann gilt $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash B}} = X \backslash \overline{B} = X \backslash \big(\overline{X \backslash A}\big)$.
$\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \big(X \backslash \overset{\circ}{A}\big) = \overline{A} \cap \big(\overline{X \backslash A}\big)$.

iv) folgt aus i) und ii).

v) ist eine Umformulierung der Definitionen.

vi) $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash A}}$

$$\underset{\text{v)}}{\Leftrightarrow} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; U_\varepsilon(x) \subset X \backslash A.$$

Damit gilt $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \not\subset X \backslash A$

$$\Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

vii) $X \in \partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X \backslash A}\right)$

$\underset{\text{vi)}}{\Leftrightarrow} \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset.$

□

**Beispiel 4.1.8** i) Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.
Ist $I$ ein beschränktes Intervall mit linker Grenze $a$ und rechter Grenze $b$, so gilt

$$\overset{\circ}{I} = (a, b), \quad \overline{I} = [a, b], \quad \partial I = \{a, b\}.$$

Analoges gilt für unbeschränkte Intervalle. Leicht einzusehen ist auch $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, also $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$:
Wir zeigen $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und nehmen dazu an, dass $x_0 \in \mathbb{Q}$ innerer Punkt ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{Q}.$$

Nun wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}\sqrt{2} < \varepsilon$.
Dann gilt $x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2} \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \mathbb{Q}$. Widerspruch!
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ folgt aus 1.2.70, vgl. 1.2.74.
Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $\overset{\circ}{\widehat{\{x_0\}}} = \emptyset$, $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$, und allgemeiner $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\overline{M} = M$ für jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$.

ii) Ist $(X, d) = (\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$, so gilt z.B.

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist offen
$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ also $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} =: S^1$
$\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, also $\partial\mathbb{R} = \mathbb{R}$

(Achtung: Hier wird $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet!)

Wir zeigen z.B. $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$.
Wir nehmen an, $x_0 \in \mathbb{R}$ sei innerer Punkt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Dann ist

$$x_0 + \frac{1}{n} i \in U_\varepsilon(x_0) \backslash \mathbb{R}, \text{ Widerspruch!}$$

**Bemerkung 4.1.9** i) Endliche Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen. In der Tat, da endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, muss man nur zeigen, dass Mengen der Form $\{x_0\}$ abgeschlossen sind. Dies folgt aber aus $\{x_0\} = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(x_0)$ und der Tatsache, dass beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

ii) Es gibt metrische Räume, in denen jede Teilmenge sowohl abgeschlossen als auch offen ist. Hierzu sein $M$ eine beliebige Menge und

$$d : M \times M \to [0, \infty),\ d(x, y) := \begin{cases} 1 & : x \neq y \\ 0 & : x = y. \end{cases}$$

Es sei $A \subset M$ und $x_0 \in A$. Für $\varepsilon = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x_0) &= \{x \in M : d(x, x_0) < 1\} \\ &= \{x_0\} \subset A. \end{aligned}$$

Eine Beschreibung des Abschlusses liefert

**Satz 4.1.10** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt $x_0 \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A$ existiert, so dass $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.*

**Beweis.** Es sei $x_0 \in \overline{A}$. Dann existiert mit 4.1.7 vi) zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$. Es folgt $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$.
Gilt andererseits $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ mit $x_n \in A,\ n \in \mathbb{N}$, und ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt $x_N \in U_\varepsilon(x_0)$ und damit $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$.
Mit 4.1.7 vi) folgt $x_0 \in \overline{A}$. $\square$

**Definition 4.1.11** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

i) $x_0 \in X$ Häufungspunkt von $A$, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\big(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset$.

ii) $x_0 \in A$ isolierter Punkt von $A$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\{x_0\} = U_\varepsilon(x_0) \cap A$ gilt.

**Satz 4.1.12** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

*i) $x_0 \in \overline{A}$ genau dann, wenn $x_0$ entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt von $A$ ist.*

*ii) Die Menge der Häufungspunkte von $A$ ist abgeschlossen.*

*iii) Ist $A = X$, so ist $\{x_0\}$ genau dann isolierter Punkt von $X$, wenn $\{x_0\}$ offen ist.*

**Beweis.** In den Übungen. □

**Beispiel 4.1.13** Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in dem metrischen Raum $(Y, d_Y)$ (also zum Beispiel in $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ mit Grenzwert $x_0$, und es gelte $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, $d_X(x, y) := d_Y(x, y)$, $x, y \in X$, so gilt für $A \subset X$.

$\alpha$) Ist $x_0 \in A$, so ist $A$ offen in $(X, d_X)$ genau dann, wenn $X \setminus A$ endlich.

$\beta$) Ist $x_0 \notin A$, so ist $A$ offen in $(X, d_X)$.

**Beweis.** In den Übungen. □

**Definition 4.1.14** Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $(X, d)$ heißt dicht, falls $\overline{A} = X$ gilt.

**Beispiel 4.1.15** i) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ (siehe 4.1.8).

ii) $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{C}$. Sei dazu $z_0 = x_0+iy_0 \in \mathbb{C}$. Wähle $x_n \in \mathbb{Q}, y_n \in \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$. Es folgt $x_n + iy_n \to x_0 + iy_0 = z_0$.

**Satz 4.1.16** *(Baire)*
*Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, und es sei $O_n \subset X$ offen und dicht, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht.*

**Beweis.** Es sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir konstruieren ein $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n \cap U_\varepsilon(x_0)$.
Dann folgt mit 4.1.7 vi), dass $x_0 \in \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n}$, und da $x_0$ beliebig, $X = \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n}$.
Es sei $0 < \varepsilon_0 < \min\{\varepsilon, 1\}$. Da $O_1$ dicht ist, existiert (mit 4.1.7 vi)), ein $x_1 \in B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x_0) \cap O_1$. Wähle $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ mit $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_1$. Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gewählt, so existiert mit 4.1.7 vi) ein $x_{n+1} \in B_{\frac{\varepsilon_n}{2}}(x_n) \cap O_{n+1}$, da $\overline{O_{n+1}} = X \supset \{x_n\}$. Wähle $0 < \varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{2}$ mit $B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset O_{n+1}$.
Es gilt nun für $m > n$, dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{\nu=n}^{m-1} d(x_\nu, x_{\nu+1}) \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{2} \\ &\leq \varepsilon_n \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ impliziert dies zunächst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da $(X, d)$ nach Voraussetzung vollständig ist, besitzt diese einen Grenzwert $x^*$.
Es folgt

$$\begin{aligned} d(x^*, x_n) &\leq d(x^*, x_m) + d(x_m, x_n) \\ &\leq d(x^*, x_m) + \varepsilon_n \to \varepsilon_n \ (m \to \infty), \end{aligned}$$

also $d(x^*, x_n) \leq \varepsilon_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, insbesondere ist $x^* \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U_\varepsilon(x_0)$ und $x^* \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset O_n$, also $x^* \in U_\varepsilon(x_0) \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. □

**Korollar 4.1.17** *(Baire)*
*Es sei $(X, d)$ ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum, und es sei $A_n \subset X$ abgeschlossen, $n \in \mathbb{N}$. Gilt $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{A}_N \neq \emptyset$.*

**Beweis.** Wir nehmen an, dass $\overset{\circ}{A}_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Setze $O_n := X \backslash A_n$. Dann ist $O_n$ offen und wegen $\overline{O_n} = \overline{X \backslash A_n} = X \backslash \overset{\circ}{A}_n = X$ auch dicht, $n \in \mathbb{N}$.
Mit 4.1.16 ist dann auch $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht, und wegen $X \neq \emptyset$ folgt hieraus, dass $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$.
Damit gilt $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = X \backslash \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq X$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{A}_N \neq \emptyset$. □

**Definition 4.1.18** Es sei $M$ eine Menge. $M$ heißt abzählbar, falls $M$ endlich oder eine Bijektion von $\tau : \mathbb{N} \to M$ existiert.
Im zweiten Fall heißt $M$ abzählbar unendlich.
Ist $M$ nicht abzählbar, so heißt $M$ überabzählbar.

**Satz 4.1.19** *Es sei $M$ eine Menge. Dann sind äquivalent:*

*i) $M$ ist abzählbar.*

*ii) Es existiert eine Injektion $\iota : M \to \mathbb{N}$.*

*iii) Es existiert eine Surjektion $\sigma : \mathbb{N} \to M$.*

**Beweis.** i) ⇒ ii), iii) ist trivial.
ii) ⇒ i): Es sei $n_1 = \min \iota(M)$ und

$$n_k = \min \iota(M) \backslash \{n_1, \ldots, n_{k-1}\},\ k \geq 2.$$

Dann ist $\iota : M \to \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ bijektiv. Setze $\tau(k) := \iota^{-1}(n_k),\ k \in \mathbb{N}$.
iii) ⇒ i): Es sei $n_1 := 1$ und

$$n_k = \min \mathbb{N} \backslash \sigma^{-1}\big(\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_{k-1})\}\big),\ k \geq 2,$$

d.h. $n_k$ ist die kleinste natürliche Zahl $n$ mit $\sigma(n) \notin \big\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_{k-1})\big\}$.
Dann ist $\sigma : \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \to M$ bijektiv. Setze $\tau(k) := \sigma(n_k),\ k \in \mathbb{N}$. □

**Satz 4.1.20** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar, und damit ist $M \times N$ abzählbar für $M, N$ abzählbar.*

**Beweis.** Es sei $\iota : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\iota(m,n) = 2^{m+n} + m,$$

$\iota$ ist injektiv: Sei $\iota(m,n) = \iota(k,\ell)$, also

$$2^{m+n} + m = 2^{k+\ell} + k.$$

Wir nehmen an, dass $m+n > k+\ell$ gilt. Dann folgt $2^{k+\ell}\underbrace{(2^{m+n-k-\ell}-1)}_{>1} = k-m$ und daraus wiederum $2^{k+\ell} < k-m < k$, Widerspruch.
Analog zeigt man, dass der Fall $k+\ell > m+n$ nicht auftreten kann, also gilt $m+n = k+\ell$, also dann auch $m = k$ und schließlich $n = \ell$. $\square$

Man kann auch konkrete Abzählungen $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ angeben. Beispielsweise:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) \\
\downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & \\
& \nearrow & & \nearrow & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & \\
& \nearrow & & & & & \\
(4,1) & & & & & &
\end{array}$$

$$\tau(1) = (1,1),\ \tau(2) = (2,1),\ \tau(3) = (1,2),$$
$$\tau(4) = (3,1),\ \tau(5) = (2,2),\ \tau(6) = (1,3), \ldots$$

**Beispiel 4.1.21** $\mathbb{Z}$ ist abzählbar nach Beispiel 1.1.33 iii).
Mit 4.1.20 ist dann auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar, also existiert $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ bijektiv. Da $\sigma : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}(n,m) \mapsto \frac{n}{m}$ surjektiv ist, ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar, denn $\sigma \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist surjektiv und 4.1.19 liefert die Behauptung.
Dieses Beispiel zeigt, dass 4.1.17 ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit falsch ist.

**Satz 4.1.22** $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

**Beweis.** Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist.
Dann existiert eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, und daher gilt mit $A_n := \{\tau(n)\}$, $n \in$

$\mathbb{N}$, dass $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach 4.1.17 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\{ \overset{\circ}{\tau_{(n)}} \right\} = \overset{\circ}{A}_N \neq \emptyset$ im Widerspruch zu 4.1.8 i). □

Es sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Mit der eingeschränkten Metrik $d_M : M \times M \mapsto [0, \infty), d_M(x, y) := d_X(x, y)$, ist $(M, d_M)$ wieder ein metrischer Raum. Es gilt dann

**Satz 4.1.23** *Ist $(X, d_X)$ ein metrischer Raum und $M \subset X$, so folgt*

*i) $A \subset M$ ist offen in $(M, d_M)$ genau dann, wenn es ein $\tilde{A} \subset X, \tilde{A}$ offen in $(X, d_X)$ gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$.*

*ii) $A \subset M$ ist abgeschlossen in $(M, d_M)$ genau dann, wenn es ein $\tilde{A} \subset X, \tilde{A}$ abgeschlossen in $(X, d_X)$ gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$*

*iii) Ist $(M, d_M)$ vollständig, so ist $M$ abgeschlossen in $(X, d_X)$.*
*Ist $(X, d_X)$ vollständig und $M$ abgeschlossen in $(X, d)$, so ist $(M, d_M)$ vollständig.*

**Beweis.**

i) Es sei $A \subset M$ in $M$ offen.
Wähle zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit

$$U^M_{\varepsilon_x}(x) := \{y \in M : d_M(x, y) < \varepsilon_x\} \subset A$$

und setze

$$\tilde{A} := \bigcup_{x\in A} U^X_{\varepsilon_x} = \bigcup_{x\in A} \{y \in X : d_X(x, y) < \varepsilon_x\}.$$

Dann ist $\tilde{A}$ offen in $X$, und es gilt

$$\tilde{A} \cap M = \Big( \bigcup_{x\in A} U^X_{\varepsilon_x}(x) \Big) \cap M = \bigcup_{x\in A} \big( U^X_{\varepsilon_x} \cap M \big) = \bigcup_{x\in A} U^M_{\varepsilon_x}(x) = A.$$

Es sei $\tilde{A} \subset X$ offen in $X$. Dann existiert zu $x \in \tilde{A} \cap M$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U^X_\varepsilon(x) \subset \tilde{A}$.
Es folgt $U^M_\varepsilon(x) = U^X_\varepsilon(x) \cap M \subset \tilde{A} \cap M$.
Also ist $\tilde{A} \cap M$ offen in $M$.

ii) folgt aus i) durch Komplementbildung.

iii) Es sei $(M, d_M)$ vollständig und $x_0 \in \overline{M}$.
Nach 4.1.10 existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \to x_0$. Insbesondere ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X$ und damit auch in $M$. Also besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $y$ in $M$. Da Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, gilt $x_0 = y \in M$.
Es sei $M$ abgeschlossen in $(X, d_X)$ und $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in $M$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $X$, sie besitzt daher einen Grenzwert $x_0$. Mit 4.1.10 folgt $x_0 \in M$, d.h. $x_n \to x_0$ in $(M, d_M)$.

□

**Satz 4.1.24** *Es sei $M \subset \mathbb{K}^n$ nicht leer und perfekt (d.h. $M$ ist abgeschlossen, und jeder Punkt von $M$ ist Häufungspunkt). Dann ist $M$ überabzählbar.*

**Beweis.** Es sei $d_M : M \times M \to [0, \infty)$, $d_M(x, y) := |x - y|$. Nach 4.1.23 ist dann $(M, d_M)$ vollständig. Ist $x_0 \in M$ beliebig, so gilt $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$ nach 4.1.9 i) und $\overset{\circ}{\widehat{\{x_0\}}} = \emptyset$, da $x_0$ kein isolierter Punkt von $M$ ist, siehe 4.1.12 iii). Derselbe Beweis wie in 4.1.22 zeigt, dass $M$ überabzählbar ist. □

**Beispiel 4.1.25** (Cantormenge)
Es sei $C_0 := [0, 1]$ und $C_{n+1} := \left\{\frac{1}{3}\,x : x \in C_n\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,x : x \in C_n\right\}, n \in \mathbb{N}_0$.
Wir setzen $C := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Die Menge $C$ heißt Cantormenge.
$C_n$ besteht aus $2^n$ disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_k^{(n)}, k = 1, \ldots, 2^n$, der Länge $\frac{1}{3^n}$, also ist $C_n$ abgeschlossen und somit ist auch $\bigcap\limits_n C_n = C$ abgeschlossen.
Weiter gilt $C_{n+1} \subset C_n$, wie man mit vollständiger Induktion zeigt (Fallunterscheidung nötig!). Überdies gilt $\sup I_k^{(n)} = \sup I_{2k}^{(n+1)}$ und $\inf I_k^{(n)} = \inf I_{2k-1}^{(n+1)}$, was zusammen mit $C_{n+1} \subset C_n, n \in \mathbb{N}_0$, schon $\inf I_k^{(n)} \in C$ und $\sup I_k^{(n)} \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ impliziert. (Mit anderen Worten: Die Intervallgrenzen der $I_k^{(n)}$ liegen in $C$.)
Insbesondere ist $C$ nicht leer. Ist $x \in C$, so liegt $x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in genau einem $I_{k_n}^{(n)}$.
Es sei $x_n := \sup I_{k_n}^{(n)} \in C$ und $y_n := \inf I_{k_n}^{(n)} \in C$. Dann gilt $y_n \leq x \leq x_n$

und $|x_n - y_n| = \frac{1}{3^n}$.
Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Dann gilt $x_n, y_n \in U_\varepsilon(x)$ und wegen $x_n \neq y_n$ auch

$$C \cap U_\varepsilon(x) \backslash \{x\} \supset \{x_n, y_n\} \backslash \{x\} \neq \emptyset.$$

Also ist $x$ Häufungspunkt von $C$.
Insgesamt ist $C$ perfekt und nach 4.1.24 überabzählbar.
Es gilt $\overset{\circ}{C} = \emptyset$: Sei dazu $x \in C$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$\alpha$) $x \in U_\varepsilon(x) \cap C \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$.

$\beta$) Es sei $\big(I_{k_n}^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Da $I_{k_n}^{(n)}$ die Länge $\frac{1}{3^n}$ hat, muss $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}\backslash C) \supset U_\varepsilon(x) \backslash C_n \neq \emptyset$ gelten.

Mit $\alpha), \beta)$ ist $x \in \partial C$, es gilt also $C = \partial C$ und damit $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

## 4.2 Stetige Abbildungen

**Definition 4.2.1** Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. $f$ heißt

i) stetig in $x_0 \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in X \\ d_X(x,x_0)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

ii) $f$ heißt stetig (auf $X$), falls $f$ in allen $x_0 \in X$ stetig, ist, d.h.

$$\underset{\substack{x_0\in X \\ \varepsilon>0}}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in X \\ d_X(x,x_0)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

iii) $f$ heißt gleichmäßig stetig (auf $X$), falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) <$

$\delta$ gilt.
Kurzschreibweise:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x_1,x_2\in X\\ d_X(x_1,x_2)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\varepsilon.$$

Ist $A\subset X$ eine Teilmenge, so heißt $f$ stetig (bzw. gleichmäßig stetig) auf $A$, falls $f|_A : A\to Y$ stetig (bzw. gleichmäßig) ist.

**Bemerkung 4.2.2** Es seien $(X,d_X),(Y,d_Y)$ metrische Räume, $x_0\in X$ und $A\subset X$. Weiter sei $f:X\to Y$ eine Abbildung.

i) $f$ ist stetig auf $A\subset X$ genau dann, wenn

$$\underset{\substack{\varepsilon>0\\ x_0\in A}}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in A\\ d_X(x,x_0)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon.$$

ii) $f$ ist gleichmäßig stetig auf $A\subset X$ genau dann, wenn

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x_1,x_2\in A\\ d_X(x_1,x_2)<\delta}}{\forall} \quad d_Y\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\varepsilon.$$

iii) Ist $f$ gleichmäßig stetig auf $A$, so ist $f$ stetig auf $A$; setze in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit $x_2:=x_0$ und $x_1:=x$. Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet, dass $\delta$ nur von $\varepsilon$ abhängt, in der Definition der Stetigkeit darf $\delta$ von $\varepsilon$ und $x_0$ abhängen.

iv) $f$ ist stetig in $x_0\in X$ genau dann, wenn

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad f\big(U_\delta(x_0)\big)\subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big),$$

denn es gilt ja $d_X(x,x_0)<\delta \Leftrightarrow x\in U_\delta(x_0)$ und $d_Y\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.

v) $f$ ist stetig in $x_0\in X$ genau dann, wenn es ein $\varrho>0$ gibt, so dass $f|_{U_\varrho(x_0)}$ stetig in $x_0$ ist.
Es sei dazu $f|_{U_\varrho(x_0)}$ stetig und $\varepsilon>0$ beliebig. Dann existiert ein $\tilde\delta>0$, so dass für alle $x\in U_\varrho(x_0)$ mit $d_X(x,x_0)<\tilde\delta$ gilt, dass

$d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.
Setze $\delta := \min\{\tilde{\delta}, \varrho\}$. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$, dass $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.
Also ist $f$ stetig an $x_0$.
Mit anderen Worten: $f$ ist stetig an $x_0$ genau dann, wenn es eine offene Menge $O \subset X$ gibt mit $x_0 \in O$, so dass $f|_O$ an $x_0$ stetig ist.

vi) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so sei wie üblich $d_E := d_{\|\cdot\|}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik (d.h. $d_E(x, y) = \|x-y\|,\ x, y \in E$). Damit ist die Stetigkeit von Abbildungen ausgehend von $E$ oder von Abbildungen in $E$ erklärt.

**Beispiel 4.2.3** Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume.

i) Ist $y_0 \in Y$, so ist die Abbildung $f : X \to Y,\ f(x) := y_0$, gleichmäßig stetig.
Sie hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := 1$ (oder irgendeine andere positive Zahl). Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$, dass $d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \varepsilon$.
Also ist insbesondere für $a_0 \in \mathbb{K}$ die Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, f(x) := a_0$, gleichmäßig stetig.

ii) $\mathrm{id}_X : X \to X,\ \mathrm{id}_X(x) = x$, ist gleichmäßig stetig. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$, dass

$$d_X\big(\mathrm{id}_X(x_1), \mathrm{id}_X(x_2)\big) = d_X(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon.$$

Also ist insbesondere $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ f(z) = z$, gleichmäßig stetig.

iii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so ist $f$ gleichmäßig stetig auf $I$ (und mit 4.2.2 v) ist dann $f$ stetig auf $\mathbb{R}$).
Sie hierzu $I$ ein beliebiges beschränktes Intervall und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2\cdot\sup\{|x|:x\in I\}+1}$ $(> 0)$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}\big|f(x_1) - f(x_2)\big| &= |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \\ &< \delta\big(|x_1| + |x_2|\big) \leq \delta 2 \sup\big\{|x| : x \in I\big\} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$f$ ist aber **nicht** gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
Nehmen wir dies nämlich an, so existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon = 1$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Es sei $x_1 := \frac{1}{\delta}$ und $x_2 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ Dann gilt $|x_1 - x_2| < \delta$, aber $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2}\big(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\big) > 1 = \varepsilon$, Widerspruch.

iv) Es sei $M$ eine Teilmenge des metrischen Raumes $(X, d)$. Die charakteristische Funktion

$$\chi_M : X \to \mathbb{R},\ \chi_M(x) := \begin{cases} 1 & : \ x \in M \\ 0 & : \ x \in X \backslash M \end{cases}$$

ist stetig an $x_0 \in X$ genau dann, wenn $x_0 \notin \partial M$.

Es sei $x_0 \notin \partial M$, also $x_0 \in X \backslash \partial M = \overset{\circ}{\widehat{X \backslash M}} \cup \overset{\circ}{M}$.

Es sei zunächst $x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{X \backslash M}} =: O$. Da $f|_O(x) = 0, x \in O$, ist $f|_O$ nach 4.2.3 i) stetig (insbesondere an $x_0$), also ist mit 4.2.2 v) $f$ stetig an $x_0$. Analog zeigt man, dass $\chi_M$ stetig an $x_0 \in \overset{\circ}{M}$.

Es sei $x_0 \in \partial M$. Wir nehmen an, dass $\chi_M$ stetig an $x_0$ sei. Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| < \varepsilon = 1 \text{ für alle } x \in U_\delta(x_0).$$

Da $x_0 \in \partial M$, ist $U_\delta(x_0) \cap M \neq \emptyset$ und $U_\delta(x_0) \cap (X \backslash M) \neq \emptyset$.

Wenn $x_0 \in M$, so wähle $x \in U_\delta(x_0) \cap (X \backslash M)$. Dann gilt $\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$, und wenn $x_0 \in X \backslash M$, so wähle $x \in U_\delta(x_0) \cap M$, dann gilt $\big|\chi_M(x) - \chi_M(x_0)\big| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch.

Also kann $\chi_M$ nicht stetig an $x_0$ sein.

Ist speziell $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist

$$\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \chi_I(x) := \begin{cases} 1 & : \ x \in I \\ 0 & : \ x \notin I \end{cases}$$

stetig an $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x_0 \notin \partial I$, d.h. $x_0$ ist keine Intervallgrenze.

**Satz 4.2.4** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

*i) Ist $x_0 \in X$, so ist $f$ stetig in $x_0$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ mit $x_n \to x_0$ schon $f(x_n) \to f(x_0)$ gilt.*

*ii) $f$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_X(x_n, y_n) \to 0$ schon $d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) \to 0$ gilt.*

*iii) Ist $f$ gleichmäßig stetig und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X$, so ist $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $Y$.*

**Beweis.**

i) Es sei $f$ stetig in $x_0$ und $x_n \to x_0$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Stetigkeit von $f$ in $x_0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$. Da $x_n \to x_0$, existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \delta$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta$ für alle $n \geq N$. Es folgt $d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Es gelte die angegebene Bedingung. Wir nehmen an, $f$ sei nicht stetig an $x_0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ein $x_n \in X$ existiert mit $d_X(x_n, x_0) < \delta = \frac{1}{n}$, aber $d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$ gilt. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$, aber $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, Widerspruch.
Also ist $f$ stetig an $x_0$.

ii) Dies beweist man analog zu i).

iii) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und $f$ sei gleichmäßig stetig. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert also ein $\delta > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$. Wir wählen zu $\tilde{\varepsilon} := \delta$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, x_m) < \tilde{\varepsilon} = \delta,\ n, m \geq N$. Mit $x := x_n,\ y := x_m$ folgt

$$d_Y\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

$\square$

**Satz 4.2.5** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume, und es sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $\operatorname{graph}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\}$ in $X \times Y$ abgeschlossen.*

**Beweis.** Es sei $(x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph}(f)}$. Dann existiert nach 4.1.10 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ mit $\big(x_n, f(x_n)\big) \to (x_0, y_0)$, d.h. $x_n \to x_0$ in $X$ und $f(x_n) \to y_0$

in $Y$. Da $f$ stetig an $x_0$, folgt mit 4.2.4, dass $f(x_n) \to f(x_0)$. Da Grenzwerte eindeutig sind, gilt $y_0 = f(x_0)$ und es folgt $(x_0, y_0) = \big(x_0, f(x_0)\big) \in \text{graph}(f)$.
$\square$

**Bemerkung/Beispiel**

i) Die Umkehrung von 4.2.5 gilt nicht, ein Beispiel ist
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}.$$
$f$ hat abgeschlossenen Graphen, aber $f$ ist unstetig an $x_0 = 0$.

ii) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x = 0 \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$
Nach 4.2.3 iv) ist $f$ unstetig an $x_0 = 0$. Auch ist graph$(f)$ nicht abgeschlossen.

**Satz 4.2.6** *Es seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3)$ metrische Räume und $f_1 : X_1 \to X_2$ sowie $f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Ist $f_1$ stetig in $x_0 \in X_1$ und ist $f_2$ stetig in $f_1(x_0)$, so ist $f_2 \circ f_1$ stetig in $x_0$.*

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X_1$ mit $x_n \to x_0$. Nach 4.2.4 i) folgt $f_1(x_n) \to f_1(x_0)$ und hieraus wieder mit 4.2.4 i): $f_2\big(f_1(x_n)\big) \to f_2\big(f_1(x_0)\big)$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ beliebig, folgt mit 4.2.4 i), dass $f_2 \circ f_1$ stetig an $x_0$ ist. $\square$

**Bemerkung 4.2.7** Ist in 4.2.6 zusätzlich $f_1$ gleichmäßig stetig auf $X_1$ und $f_2$ gleichmäßig stetig auf $f(X_1)$, so ist $f_2 \circ f_1$ gleichmäßig stetig auf $X_1$. Dies beweist man analog mit Hilfe von 4.2.4 ii) anstelle von 4.2.4 i).

**Beispiel 4.2.8** Es sei $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{K}, d_{|\cdot|})$.

i) Sind $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ und ist $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ f(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$, ein Polynom, so ist $f$ stetig. Es sei dazu $x_0 \in \mathbb{K}$ beliebig.
Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ ist mit $x_n \to x_0$, so folgt aus 2.1.9, dass $f(x_n) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu \to \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu x_0^\nu = f(x_0)$ gilt.
Mit 4.2.4 ist $f$ stetig.

ii) Sind $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_k \in \mathbb{K}$, ist $M := \left\{z \in \mathbb{K} : \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu z^\nu \neq 0\right\}$, und ist $f : M \to \mathbb{K},\ f(x) = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x^\nu}$ eine rationale Funktion, so ist $f : M \to \mathbb{K}$ stetig. Sei dazu $x_0 \in M$ beliebig. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$ mit $x_n \to x_0$, so folgt wieder mit 2.1.9, dass $f(x_n) = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x_n^\nu} \to \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x_n^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu x_n^\nu} = f(x_0)$ gilt. Mit 4.2.4 ist $f$ stetig.
Insbesondere ist $f : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K},\ f(z) = \frac{1}{z}$, stetig!

iii) Mit 3.1.9 iii) ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
(Wir werden zeigen, dass sogar $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.)

iv) Mit obigen Beispielen und 4.2.6 erhalten wir eine Fülle stetiger Abbildungen, z.B. sind

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) := \exp(x^2) \quad \text{oder}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) := \exp(-x),$$

stetig.

v) Die Abbildungen $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Re} z$, und $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \operatorname{Im} z$, sind stetig wegen 2.1.3 und 4.2.4.
(2.1.3: $z_n \to z_0 \Rightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$)

vi) Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist die Abbildung $\sqrt[k]{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt[k]{x}$, stetig. Es sei dazu $x_0 \in [0, \infty)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty)$ mit $x_n \to x_0$. Nehmen wir an, dass $\left(\sqrt[k]{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $\sqrt[k]{x_0}$ konvergiert, so folgt aus der Beschränktheit von $\left(\sqrt[k]{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (beachte: $\sqrt[k]{x_n} \leq 1 + x_n,\ n \in \mathbb{N}$) mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß die Existenz eines $y \in [0, \infty) \backslash \sqrt[k]{x_0}$ und einer Teilfolge $\left(\sqrt[k]{x_{n_\ell}}\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $\sqrt[k]{x_{n_\ell}} \to y$ $(\ell \to \infty)$.
Wegen $y \neq \sqrt[k]{x_0}$ gilt auch $y^k \neq x_0$, also folgt mit i)

$$x_{n_\ell} = \left(\sqrt[k]{x_{n_\ell}}\right)^k \to y^k \neq x_0 \quad (\ell \to \infty),$$

im Widerspruch zu $x_n \to x_0$.

**Satz 4.2.9** *Es sei* $(X, d)$ *ein metrischer Raum. Dann ist* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *stetig.*

**Beweis.** Es sei $(x_0, y_0) \in X \times X$ und $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Dann gilt: $|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \le |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_0)| + |d(x_n, y_0) - d(x_0, y_0)| \le d(y_n, y_0) + d(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty)$. □

**Satz 4.2.10** *Es sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum.*

*i)* $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ *ist stetig.*

*ii)* $+ : E \times E \to E,\ (x, y) \mapsto x + y$ *ist stetig.*

*iii)* $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *ist stetig.*

**Beweis.**

i) Es sei $x_0 \in E$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \le \|x_n - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ii), iii) folgen aus 2.1.10 i) und ii).

□

**Bemerkung 4.2.11** In 4.2.9 sowie 4.2.10 i) und ii) kann man auch gleichmäßige Stetigkeit nachweisen, hierzu muss man auf die $\varepsilon - \delta -$Definition oder auf 4.2.4 ii) zurückgreifen.
Ist $E \ne \{0\}$, so ist in 4.2.10 die Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ **nicht** gleichmäßig stetig.

**Satz 4.2.12** *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto x + y, \\ \cdot &: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy \ \textit{und} \\ \div &: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

*sind stetig.*

**Beweis.** Für die ersten beiden Abbildungen setze $E := \mathbb{K}$ in 4.2.9, die Stetigkeit der dritten Abbildung folgt aus 2.1.9 iii). $\square$

**Satz 4.2.13** *Es seien $(X, d)$ und $(Y_1, d_1), \dots, (Y_m, d_m)$ metrische Räume und $f_\nu : X \to Y_\nu$ Abbildungen. Für $x_0 \in X$ sind äquivalent:*

*i)* $f_\nu : X \to Y_\nu$ *ist stetig in* $x_0$, $1 \le \nu \le m$.

*ii)* $f := (f_1, \dots, f_m) : X \mapsto \prod_{\nu=1}^{n} Y_\nu$, $f(x) := \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$ *ist stetig in* $x_0$.

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii): Es sei $x_0 \in X$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$ mit $x_n \to x_0$ und sind alle $f_\nu$ an $x_0$ stetig $(1 \le \nu \le n)$, so gilt $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0), 1 \le \nu \le m$, also mit 2.1.12 ii) $f(x_n) \to f(x_0)$.

ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $x_n \to x_0$ und $f$ an $x_0$ stetig. Dann gilt $f(x_n) \to f(x_0)$, also mit 2.1.12 ii) $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0), 1 \le \nu \le m$. $\square$

**Bemerkung 4.2.14** Auch in 4.2.13 kann man "stetig in $x_0$" durch "gleichmäßig stetig" ersetzen.

**Korollar 4.2.15** *Es sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum.*

*i)* *Ist $(Y, d_Y)$ ein metrischer Raum und sind $f, g : X \to Y$ stetig in $x_0$, so ist auch $F : X \to [0, \infty)$, $F(x) := d_X\big(f(x), g(x)\big)$, stetig in $x_0$. Insbesondere ist für $z_0 \in X$ fest, der Abstand zu $z_0$, $d_{z_0} : X \to [0, \infty)$, $d_{z_0}(x) := d(x, z_0)$, stetig.*

*ii)* *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so gilt:*

*α)* *Ist $f : X \to E$ stetig in $x_0$, so ist auch $F : X \to [0, \infty)$, $F(x) := \|f(x)\|$, stetig in $x_0$.*

*β)* *Sind $f, g : X \to E$ stetig in $x_0$, so ist auch $f + g : X \to E$, $x \mapsto f(x) + g(x)$, stetig in $x_0$.*

*γ)* *Sind $g : X \to \mathbb{K}$ und $f : X \to E$ stetig in $x_0$, so ist auch $g \cdot f : X \to E$, $x \mapsto g(x)f(x)$, stetig in $x_0$.*

*iii) Sind $f : X \to \mathbb{K}$ und $g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0$, so sind auch folgende Abbildungen stetig in $x_0$:*

$$|f| : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto |f(x)|$$
$$f + g : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$g \cdot f : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x)g(x)$$

*und gilt zusätzlich noch $g(X) \subset \mathbb{K}^*$ (d.h. $g$ hat keine Nullstelle), so ist auch*

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{K},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

*stetig in $x_0$.*

**Beweis.**

i) Gemäß 4.2.13 ist $(f, g) : X \to Y \times Y$ stetig in $x_0$, und gemäß 4.2.9 ist $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$ stetig. Also ist mit 4.2.6 auch die Verkettung $F = d \circ (f, g)$ in $x_0$ stetig.

ii) $\alpha$) Wegen 4.2.10 i) ist $\|\cdot\|$ stetig. Mit 4.2.6 folgt, dass dann $F = \|\cdot\| \circ f$ stetig in $x_0$ ist.

$\beta$) Gemäß 4.2.13 ist $(f, g) : X \to E \times E$ stetig in $x_0$, und gemäß 4.2.10 ii) ist $+ : E \times E \to E$ stetig. Also ist mit 4.2.6 auch die Verkettung $f + g = + \circ (f, g)$ stetig in $x_0$.

$\gamma$) und iii) beweist man analog unter Verwendung von 4.2.10 iii) bzw. 4.2.12 anstelle von 4.2.10 ii).

□

**Bemerkung 4.2.16** In 4.2.15 i) sowie ii) $\alpha$), $\beta$) kann man “stetig (in $x_0$)” durch “gleichmäßig stetig” ersetzen. Dies folgt aus 4.2.7, 4.2.11 und 4.2.14. Also, im Falle $f, g$ gleichmäßig stetig, sind auch in 4.2.15 iii) die Abbildungen $|f| : X \to \mathbb{K}$ und $f + g : X \to \mathbb{K}$ gleichmäßig stetig.
Analoge Aussagen gelten nicht bei $g \cdot f$ und $\frac{f}{g}$.

**Beispiele:**

i) $X = \mathbb{R},\ g = f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Dann ist $g \cdot f(x) = x^2$, und $g \cdot f$ ist nicht gleichmäßig stetig nach 4.2.3 iii).

ii) $X = (0, \infty)$, $g = \mathrm{id}_{(0,\infty)}$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
Dann ist $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$. $\frac{f}{g}$ ist ebenfalls nicht gleichmäßig stetig: Sei $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}$.

Dann gilt $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$,

aber $\left|\frac{f}{g}(x_n) - \frac{f}{g}(y_n)\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1 \not\to 0$.

**Korollar 4.2.17** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $C(X, E) := \{f : X \to E : f \text{ stetig}\}$ ein Untervektorraum von $E^X$. Insbesondere ist $C(X) := C(X, \mathbb{K})$ ein Vektorraum.*

**Beweis.** Es seien $f, g \in C(X, E)$.
Mit 4.2.14 $\beta$) ist $f + g \in C(X, E)$.
Ist $f \in C(X, E), \lambda \in \mathbb{K}$, so ist mit $g(x) := \lambda$ nach 4.2.14 $\gamma$) auch $\lambda f = g \cdot f \in C(X, E)$. $\square$

**Korollar 4.2.18** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist*

$$CB(X, E) := \{f : X \to E : f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

*ein Untervektorraum des normierten Raumes $B(X, E)$.*
*Insbesondere ist $CB(X) := CB(X, \mathbb{K})$ ein normierter Raum.*

**Beweis.** Es gilt $CB(X, E) = C(X, E) \cap B(X, E)$.
Man beachte, dass der Schnitt von Untervektorräumen wieder ein Vektorraum ist. $\square$

Ein wichtiges Kriterium für die Stetigkeit ist

**Satz 4.2.19** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*
*Dann sind äquivalent:*

*i) $f$ ist stetig.*

*ii)* $f^{-1}(O)$ *ist offen für alle* $O \subset Y$ *offen.*

*iii)* $f^{-1}(A)$ *ist abgeschlossen für alle* $A \subset Y$ *abgeschlossen.*

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii): Es sei $O \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(O)$ (d.h. $f(x_0) \in O$). Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset O$. Da $f$ stetig in $x_0$, existiert $\delta > 0$ mit $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset O$, also $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(O)$.
ii) $\Rightarrow$ i): Es sei $x_0 \in X$ beliebig. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist nach ii) $f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$ offen in $X$, damit existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$, also gilt $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) folgt aus $X \backslash f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \backslash M)$ für alle $M \subset Y$. $\square$

**Beispiel 4.2.20** Obigen Satz kann man dazu verwenden, um Offenheit bzw. Abgeschlossenheit von Teilmengen metrischer Räume nachzuweisen:

i) $\alpha$) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ist offen.

$\beta$) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 1\}$ ist abgeschlossen.

Zu $\alpha$): Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(z) = \operatorname{Im} z$.
Dann ist $f$ nach 4.2.8 v) stetig, und mit obigem Satz ist

$$\big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\big\} = \big\{z \in \mathbb{C} : f(z) \in (0, \infty)\big\} = f^{-1}\big((0, \infty)\big)$$

offen als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung.

Zu $\beta$): Verwende $[1, \infty)$ anstelle von $(0, \infty)$.

ii) $\Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 > 0, \big|(x_1, x_2, x_3)\big| < 1\Big\}$ ist offen. Es sei

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x_1,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x_2,$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_3(x) = |x|.$$

Dann sind $f_1, f_2, f_3$ stetig, mit obigem Satz sind dann $O_1 = f_1^{-1}\big((0, \infty)\big), O_2 = f_2^{-1}\big((0, \infty)\big)$ und $O_3 = f_3^{-1}\big((-\infty, 1)\big)$ offen, also ist auch der endliche

Schritt $O_1 \cap O_2 \cap O_3$ offen. Wegen

$$\begin{aligned} & \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0 \text{ und } x_2 > 0 \text{ und } |x| < 1\big\} \\ = \;& \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\} \\ = \;& \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_1(x) \in (0,\infty)\big\} \cap \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_2(x) \in (0,\infty)\big\} \\ & \cap \big\{x \in \mathbb{R}^3 : f_3(x) \in (-\infty, 1)\big\} \\ = \;& O_1 \cap O_2 \cap O_3 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

**Korollar 4.2.21** *Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv. Sind $f$ und $f^{-1}$ stetig, so gilt*

*i) $f(O)$ ist offen genau dann, wenn $O$ offen ist.*

*ii) $f(A)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A$ abgeschlossen ist.*

**Beispiel 4.2.22** Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x_0 \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Ist $O \subset E$ offen, so sind $\lambda O := \{\lambda x : x \in O\}$ und $x_0 + O := \{x_0 + x : x \in O\}$ offen.
Analoges gilt für "abgeschlossen" anstelle von "offen".
Dies folgt aus obigem Korollar, da die Abbildungen $M_\lambda : E \to E,\ x \mapsto \lambda x$, und $T_{x_0} : E \to E,\ x \mapsto x + x_0$ stetig sowie bijektiv sind und ihre Inversen vom selben Typ, also auch stetig, sind.

**Definition 4.2.23** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $\varphi : M \to X$ heißt Kontraktion, falls ein $\gamma < 1$ existiert, so dass

$$\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \le \gamma d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$ gilt.

**Bemerkung 4.2.24** Eine Kontraktion ist gleichmäßig stetig (wähle $\delta := \varepsilon$) und daher stetig.

**Satz 4.2.25** *(Banachscher Fixpunktsatz)*
*Es sei $(X, d)$ ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $\varphi : X \to X$ eine Kontraktion.*
*Dann existiert genau ein $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$. (Ein solches $x^*$ heißt Fixpunkt von $\varphi$.)*

**Beweis.** Es sei $\gamma < 1$ mit $d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \leq \gamma d(x, y),\ x, y \in X$.
Wir wählen $x_0 \in X$ und setzen rekursiv $x_n := \varphi(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Aus

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d\big(\varphi(x_k), \varphi(x_{k-1})\big) \\ &\leq \gamma d(x_k, x_{k-1}) \end{aligned}$$

erhalten wir per Induktion

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma^n d(x_1, x_0),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ist nun $m > n$, so folgt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \gamma^k d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^k = d(x_1, x_0) \cdot \frac{\gamma^n}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, welche aufgrund der Vollständigkeit von $(X, d)$ gegen ein $x^* \in X$ konvergiert. Es folgt

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x^*),$$

da jede Kontraktion stetig ist. Damit existiert $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$.
Es sei nun $y \in X$ mit $\varphi(y) = y$. Dann gilt

$$d(x^*, y) = d\big(\varphi(x^*), \varphi(y)\big) < \gamma d(x^*, y),$$

also ist $d(x^*, y) = 0$ und somit $x^* = y$.
Insgesamt folgt, dass genau ein $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$ existiert. $\square$

**Bemerkung 4.2.26** Es ergibt sich aus dem Beweis folgende Fehlerabschätzung:

$$d(x^*, x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ d \text{ stetig}}}{=} \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0)\frac{\gamma^n}{1-\gamma}.$$

**Satz 4.2.27** *Es sei $U$ eine offene Teilmenge des vollständigen normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$, und es sei $\phi : U \to E$ eine Kontraktion. Ist $f : U \to E,\ f(x) := x + \phi(x)$, so gilt*

*i)* *$f$ ist injektiv.*

*ii)* *$f(U)$ ist offen.*

*iii)* *$f^{-1} : f(U) \to U$ ist stetig.*

**Beweis.** Es sei $\gamma < 1$ mit $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|,\ x_1, x_2 \in U$.

i) Sind $x_1, x_2 \in U$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, so gilt

$$\|x_1 - x_2\| = \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|$$

und damit $x_1 = x_2$.

ii) Es sei $x_0 \in U$ beliebig. Wir zeigen, dass $f(x_0)$ innerer Punkt von $f(U)$ ist, d.h. wir konstruieren $\varrho > 0$ mit $f(U) \supset B_\varrho\big(f(x_0)\big)$. Dazu sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset U$. Es sei $\varrho := (1-\gamma)r$. Ist $y \in B_\varrho\big(f(x_0)\big)$, so setzen wir $\varphi : B_r(0) \to E,\ \varphi(x) = y - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)$.
Es gilt für alle $\|x\| \leq r$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)\| &= \|y - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)\| \\
&\leq \|y - f(x_0)\| + \|f(x_0) - \big(x_0 + \phi(x + x_0)\big)\| \\
&\leq \varrho + \|\phi(x_0) - \phi(x + x_0)\| \\
&\leq \varrho + \gamma\big\|x_0 - (x + x_0)\big\| \\
&\leq (1-\gamma)r + \gamma r = r.
\end{aligned}$$

Also gilt $\varphi\big(B_r(0)\big) \subset B_r(0)$.
Weiter gilt für $x_1, x_2 \in B_r(0)$

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = \big\|\phi(x_2 + x_0) - \phi(x_1 + x_0)\big\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|.$$

Also ist $\varphi : B_r(0) \to B_r(0)$ eine Kontraktion und nach dem Banachscher Fixpunktsatz existiert $z \in B_r(0)$ mit $\varphi(z) = z$. Dann ist $z + x_0 \in B_r(x_0) \subset U$, und es gilt

$$\begin{aligned} f(z+x_0) &= z + x_0 + \phi(z+x_0) = \varphi(z) + x_0 + \phi(z+x_0) \\ &= y - \big(x_0 + \phi(z+x_0)\big) + x_0 + \phi(z+x_0) = y. \end{aligned}$$

iii) Es sei $x_0 \in U$ beliebig. Im Beweis von ii) haben wir gezeigt: Für alle $r > 0$ (mit $B_r(x_0) \subset U$) existiert ein $\varrho > 0$ mit $f\big(B_r(x_0)\big) \supset B_\varrho\big(f(x_0)\big)$. Da $f$ injektiv ist, ist dies äquivalent zu:
Für alle $r > 0$ existiert ein $\varrho > 0$ mit $f^{-1}\big(B_\varrho(f(x_0))\big) \subset B_r(x_0)$. Mit anderen Worten: $f^{-1}$ ist stetig an $f(x_0)$.

□

**Beispiel 4.2.28** i) Da $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig in 0 ist und $\exp(0) = 1$ gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\exp(\varepsilon) - 1 \leq \frac{1}{2}$. Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ und $\phi : U \to \mathbb{C},\ \phi(z) = \exp(z) - z$. Sind $z, w \in U$, so gilt nach A. 5.2

$$\frac{|\phi(z) - \phi(w)|}{|z - w|} = \left| \frac{\exp(z) - \exp(w)}{z - w} - 1 \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{z - w} (z^\nu - w^\nu) \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} z^k w^{\nu-k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu-1} \varepsilon^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, \varepsilon^\nu = \exp(\varepsilon) - 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Somit ist $\phi : U \to \mathbb{C}$ eine Kontraktion. Wegen $\exp(z) = z + \phi(z)$ folgt mit 4.2.27, dass $\exp(U)$ eine offene Menge mit $1 \in \exp(U)$ ist.

ii) Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (z.B. $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}^n, |\cdot|)$), und es sei $A : E \to E$ eine lineare Abbildung auf $E$, so dass ein $\gamma < 1$ existiert mit

$$\big\|A(x)\big\| \leq \gamma \|x\|,\ x \in E.$$

Dann gilt $\|A(z) - A(w)\| = \|A(z-w)\| \leq \gamma\|z-w\|,\ z,w \in E$, also ist $A$ eine Kontraktion.
Damit ist nach 4.2.25 $S := \mathrm{id} - A$ injektiv, $S(E)$ ist offen in $E$ und $S^{-1} : S(E) \to E$ ist stetig. Da $S(E)$ ein Untervektorraum von $E$ ist, ist $0 \in S(E)$, und es existiert (da $S(E)$ offen) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) = \{x \in E : \|x\| < \varepsilon\} \subset S(E)$.
Sei $y \in E \setminus \{0\}$ beliebig. Dann ist $\frac{\varepsilon}{2\|y\|} y \in U_\varepsilon(0) \subset S(E)$, und damit ist auch $y = \frac{2\|y\|}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2\|y\|} y\right) \in S(E)$ (da $S(E)$ Untervektorraum).
Es folgt: $S$ ist auch surjektiv. Damit ist $S$ ein Vektorraumisomorphismus.
Man beachte: Wir benutzten keine Dimensionsformel!

## 4.3 Zusammenhang und Konvexität

**Definition 4.3.1** Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum.

i) Sind $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen von $X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$, so heißt $\{U, V\}$ offene Zerlegung von $X$.

ii) $(X,d)$ heißt zusammenhängend, falls für jede offene Zerlegung $\{U, V\}$ von $X$ schon $X = U$ oder $X = V$ gilt. Mit anderen Worten: $\{X, \emptyset\}$ ist die einzige offene Zerlegung von $X$.

iii) $M \subset X$ heißt zusammenhängend, falls $(M, d_M)$ (mit $d_M(x,y) = d(x,y)$) zusammenhängend ist.

**Satz 4.3.2** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

*i) $X$ ist zusammenhängend.*

*ii) Ist $\emptyset \neq A \subset X$ offen und abgeschlossen, dann gilt $A = X$.*

*iii) $\emptyset$ und $X$ sind die einzigen Teilmengen von $X$, die offen und abgeschlossen sind.*

*Ist $M \subset X$, so ist $M$ genau dann zusammenhängend, wenn für alle $U, V \subset X$ offen in $X$ mit $U \cap V \cap M = \emptyset$ und $M \subset U \cap V$ schon $M \subset U$ oder $M \subset V$ folgt.*

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii): Sei $A \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen. Setze $U := A, V := X \backslash A$. Dann gilt mit i) $X = U$ oder $X = V$. Wegen $A \neq \emptyset$ ist $V \neq X$, also gilt $X = U = A$.

ii) $\Rightarrow$ i): Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$. Wegen $U \cup V = X \neq \emptyset$ ist dann ohne Einschränkung $U \neq \emptyset$. Ansonsten vertausche $U$ und $V$. Setze $A := U$. Dann ist $X \backslash A = V$ offen, also $A$ abgeschlossen. Damit gilt $A = X$ nach ii), also $X = U$.

ii) $\Rightarrow$ iii) ist nur eine Umformulierung.

Der zweite Teil des Satzes ist eine Umformulierung der Definition unter Beachtung, dass mit 4.1.22 eine Menge $S \subset M$ genau dann offen in $M$ ist, wenn ein $U \subset X$ offen in $X$ existiert mit $S = U \cap M$. $\square$

**Beispiel 4.3.3** Es sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.

i) $M := [-2, -1] \cup [1, 2]$ ist nicht zusammenhängend. Wähle $U := (-\infty, 0)$, $V := (0, \infty)$.

ii) $M := \mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend. Wähle $U := \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$, $V := \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$.

**Satz 4.3.4** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.*

**Beweis.** Es sei $\{U, V\}$ eine offene Zerlegung von $A \cup B$. Dann ist $\{U \cap A, V \cap A\}$ offene Zerlegung von $A$, also gilt $A = U \cap A$ oder $A = V \cap A$.
Ohne Einschränkung sei $A = U \cap A$. Da auch $\{U \cap B, V \cap B\}$ eine offene Zerlegung von $B$ ist und $U \cap B \supset U \cap A \cap B = A \cap B \neq \emptyset$, gilt $U \cap B = B$. Insgesamt folgt $U \cap (A \cup B) = A \cup B$, also $U = A \cup B$. $\square$

**Satz 4.3.5** *Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $X$ ein Intervall ist.*

**Beweis.** 1. Es sei $I = X$ ein Intervall. Angenommen, es existiert eine offene Zerlegung $\{U, V\}$ von $I$ mit $U \neq \emptyset \neq V$. Wähle $u \in U$ und $v \in V$, ohne Einschränkung sei $u < v$, sonst vertausche $U$ und $V$. Da $I$ ein Intervall ist, gilt $[u, v] \subset I$.
Es sei $S := U \cap [u, v]$. Da $U = I \backslash V$ abgeschlossen in $I$, ist $S$ abgeschlossen in $[u, v]$, also auch in $\mathbb{R}$.
Da $S$ auch beschränkt ist, gilt mit A 13.1, dass $s := \sup S \in S$, $s$ ist also das größte Element von $U \cap [u, v]$, damit ist $s < v$ wegen $v \notin U$ und $(s, v] \subset V \cap [u, v]$. Auf der anderen Seite existiert aufgrund der Offenheit von $U$ ein $v - s > \varepsilon > 0$, so dass $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U$. Damit ist $s + \frac{\varepsilon}{2} \in U \cap V$, Widerspruch. Also ist $I$ zusammenhängend.
2. Es sei $X$ kein Intervall. Dann existieren $u, v \in X$ und $s \in \mathbb{R} \backslash X$ mit $s \in [u, v]$.
Setze $U := X \cap (-\infty, s),\ V := S \cap (s, \infty)$, sind offen, $U \cup V = X,\ U \cap V = \emptyset$, aber $U \neq \emptyset \neq V$. Also ist $X$ nicht zusammenhängend. $\square$

**Satz 4.3.6** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und ist $M \subset X$ zusammenhängend, so ist $f(M)$ zusammenhängend.*
*Mit anderen Worten: Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen sind zusammenhängend.*

**Beweis.** $f|_M : (M, d_M) \to \big(f(M), d_{f(M)}\big)$ ist stetig. Ist nun $\emptyset \neq A \subset f(M)$ offen und abgeschlossen, so ist $f|_M^{-1}(A) \subset M$ offen, abgeschlossen und nicht leer, also gilt mit 4.3.2, dass $(f|_M)^{-1}(A) = M$, also $f(M) = f|_M(M) = f|_M\big(f|_M^{-1}(A)\big) \subset A$. Mit 4.3.2 folgt die Behauptung. $\square$

**Korollar 4.3.7** *(Zwischenwertsatz)*
*Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $M \subset X$ zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(M)$ ein Intervall, d.h. für alle $a, b \in M$ mit $f(a) < y < f(b)$ existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.*

**Beweis.** 4.3.5 und 4.3.6. $\square$

**Korollar 4.3.8** *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

**Beweis.** 4.3.7 und 4.3.5. $\square$

**Definition 4.3.9** Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt $f$

i) monoton (streng monoton) wachsend, falls $f(x_1) \le f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

ii) monoton (streng monoton) fallend, falls $f(x_1) \ge f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

iii) monoton (streng monoton), falls $f$ monoton (streng monoton) wachsend oder fallend ist.

**Bemerkung 4.3.10** i) Streng monotone Funktionen sind injektiv, und die Inverse ist wieder streng monoton vom selben Typ.

ii) Genau dann ist $f$ monoton (streng monoton) wachsend, wenn $-f$ monoton (streng monoton) fallend ist.

**Satz 4.3.11** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend) und stetig. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall, und $f^{-1} : J \to I$ ist stetig.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $f$ streng monoton wachsend. Es bleibt zu zeigen, dass $f^{-1}$ stetig ist.
Sei dazu $f(x_0) \in J$ beliebig. Nehmen wir an, dass $f^{-1}$ an $f(x_0)$ unstetig ist, so existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I$ und $\varepsilon > 0$ mit $f(x_n) \to f(x_0)$ aber $|x_n - x_0| = \left|f^{-1}(f(x_n)) - f^{-1}(f(x_0))\right| \ge \varepsilon$. Ohne Einschränkung sei $N := \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_0\}$ unendlich. Da $I$ ein Intervall ist, gilt $[x_1, x_0] \subset I$, und daher ist $y := \sup\limits_{n\in N} x_n \in I$. Es folgt $y \le x_0 - \varepsilon$ und damit liefert die strenge Monotonie $f(x_0) > f(y) \ge f(x_n)$ für alle $n \in N$. Somit ergibt sich $f(x_0) > \sup\limits_{n\in N} f(x_n) \ge \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in N}} f(x_n) = f(x_0)$, Widerspruch. $\square$

**Definition 4.3.12** Eine Teilmenge $A$ eines Vektorraumes $E$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass auch $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$.

**Bemerkung 4.3.13** i) Setzt man für $x_1, x_2 \in E$

$$[x_1, x_2] := \big\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \lambda \in [0,1]\big\},$$

so ist $A$ konvex genau dann, wenn $[x_1, x_2] \subset A$ für alle $x_1, x_2 \in A$.

ii) Eine Teilmenge $X$ von $\mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie ein Intervall ist.

**Satz 4.3.14** *Eine konvexe Teilmenge eines normierten Raumes ist zusammenhängend.*

**Beweis.** Wir nehmen an, $A$ sei nicht zusammenhängend. Dann existiert eine offene Zerlegung $\{U, V\}$ von $A$ mit $U \neq \emptyset \neq V$. Es seien $x_1 \in U, x_2 \in V$ und

$$f : [0,1] \to A,\ x \mapsto \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Dann ist $f$ stetig, und daher ist $\big\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\big\}$ eine offene Zerlegung von $[0,1]$. Wegen $0 \in f^{-1}(V)$ und $1 \in f^{-1}(U)$ gilt $f^{-1}(U) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V)$ im Widerspruch zur Tatsache, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist. $\square$

**Beispiel 4.3.15** i) Es sei $E$ ein normierter Raum.
Dann ist $E$ und seine Untervektorräume konvex. Weiter sind für alle $r > 0$ und $x_0 \in E$ die Kugeln $B_r(x_0)$ und $U_r(x_0)$ konvex.
Sei dazu $x, y \in B_r(x_0)$, d.h. $\|x - x_0\|, \|y - x_0\| \leq r$. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$:

$$\big\|(\lambda x + (1-\lambda)y) - x_0\big\| = \big\|\lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - x_0)\big\|$$
$$\leq \lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)\|y - y_0\| \leq r,$$

also ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_r(x_0)$.
Im Falle $U_r(x_0)$ verfährt man analog.

ii) Die Menge $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ist nicht konvex, aber zusammenhängend im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $n \geq 2$. Wir zeigen dies am Beispiel $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dann seien

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \qquad A_2 := \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

$$A_3 := \{z : \operatorname{Im} < 0\}, \qquad A_4 := \{z : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Dann sind alle $A_\nu$ konvex, $1 \leq \nu \leq 4$.
Hierzu seien $z = x + iy,\ w = u + iv \in A_1$, d.h. $y, v > 0$. Ist $\lambda \in [0,1]$, so gilt $\lambda y + (1-\lambda)v > 0$, also $\operatorname{Im}(z + w) > 0$.
Analog zeigt man die Konvexität der anderen Mengen. Insbesondere sind die $A_\nu, 1 \leq \nu \leq 4$, zusammenhängend. Wegen $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ist mit 4.3.4 auch $A_1 \cup A_2$ zusammenhängend.
Wegen $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \neq \emptyset$ ist wieder mit 4.3.4 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ zusammenhängend. Wegen $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 \neq \emptyset$ ist schließlich auch

$$\mathbb{C}^* = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \text{ zusammenhängend.}$$

**Definition 4.3.16** Eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer konvexen Menge $A$ heißt

i) konvex, falls $f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

ii) konkav, falls $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

**Bemerkung 4.3.17** i) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
Denn sind $y_1 > y_2$ und $\mu \in [0,1]$, so gilt mit $x_1 := y_2$ und $x_2 := y_1, \lambda := 1 - \mu$:

$$f(\mu y_1 + (1-\mu)y_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq$$

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \mu f(y_1) + (1-\mu)f(y_2).$$

Eine analoge Bemerkung gilt für konkave Funktionen.

ii) $f$ ist konvex genau dann, wenn $-f$ konkav ist.

**Satz 4.3.18** *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, so ist $f$ genau dann konvex, wenn $f^{-1}$ konkav ist.*

**Beweis.** Es gilt mit $f(x_\nu) = y_\nu,\ \nu = 1, 2$, dass

$$\begin{aligned} & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ \Leftrightarrow\quad & f\big(\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2)\big) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2). \end{aligned}$$

□

**Beispiel 4.3.19** i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, ist konvex. Es seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ & = \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - \lambda^2 x_1^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 - (1-\lambda)^2x_2^2 \\ & = \lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Mit i) und 4.3.18 ist $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$, konkav.

iii) Ist $E$ ein reeller Vektorraum (z.B. $E = \mathbb{R}^n$) und ist $f : E \to \mathbb{R}$ linear, so ist $f$ konvex und konkav, da $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

# Kapitel 5

# Elementare Funktionen II

## 5.1 Der Logarithmus

**Satz/Definition 5.1.1** Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv. Ihre Umkehrabbildung $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) Logarithmus. log ist stetig.

**Beweis.** Wir haben in 3.1.9 gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend und stetig ist. Also ist mit 4.3.10 $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall und $\log : \exp(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig. Es bleibt zu zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt. Dazu sei $y_0 \in (0, \infty)$ beliebig. Wegen $\exp(n) \to +\infty \, (n \to \infty)$ und $\exp(-n) \to -\infty \, (n \to \infty)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y_0 \in \big[\exp(-n), \exp(n)\big]$. Da $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall ist, gilt $y_0 \in \exp(\mathbb{R})$. □

**Bemerkung 5.1.2** Für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt also $y = \log x \Leftrightarrow e^y = \exp(y) = x$.

**Satz 5.1.3** *Es seien $x, x_1, x_2 > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

*i)* $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$,

*ii)* $\log(x^n) = n \log x$, *also ist insbesondere* $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$.

**Beweis.**

i) Nach 3.1.4 gilt

$$\begin{aligned}\exp(\log x_1 + \log x_2) &= \exp(\log x_1)\exp(\log x_2) = x_1 x_2 \\ &= \exp\big(\log(x_1 x_2)\big),\end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned}\log(x_1) + \log(x_2) &= \log\big(\exp(\log x_1 + \log x_2)\big) \\ &= \log\exp\log(x_1 x_2) = \log x_1 x_2.\end{aligned}$$

ii) Nach 3.1.4 und 3.1.6 gilt

$$x^n = \exp\big(\log(x)\big)^n = \exp(n \log x),$$

also folgt

$$\log x^n = \log\exp(n\log x) = n \log x.$$

$\square$

## 5.2 Allgemeine Potenzen

**Definition 5.2.1** Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned}&a^z := \exp(z \log a), \\ &0^z = 0,\ z \neq 0,\ \text{und} \\ &0^0 = 1.\end{aligned}$$

Man beachte, dass dies in Konsistenz mit früheren Definitionen steht!

**Satz 5.2.2** *(allgemeine Potenzgesetze)*
*Es seien $a, a_1, a_2 > 0$ und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

*i)* $a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$ *und im Falle* $z_1 \in \mathbb{R}$ *auch* $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 z_2}$.

*ii)* $a_1^z a_2^z = (a_1 a_2)^z$.

**Beweis.** Wir verwenden 3.1.4 und 5.1.3

i)
$$
\begin{aligned}
a^{z_1}a^{z_2} &= \exp(z_1 \log a) \cdot \exp(z_2 \log a) \\
&= \exp\big((z_1 + z_2) \log a\big) = a^{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a^{z_1})^{z_2} &= \exp\big(z_2 \log(a^{z_1})\big) \\
&= \exp\big(z_2 \log(\exp(z_1 \log a))\big) \\
&= \exp(z_2 z_1 \log a) = a^{z_1 z_2}
\end{aligned}
$$

□

ii)
$$
\begin{aligned}
a_1^z a_2^z &= \exp(z \log a_1) \cdot \exp(z \log a_2) \\
&= \exp\big(z(\log a_1 + \log a_2)\big) \\
&= \exp(z \log a_1 a_2) = (a_1 a_2)^z.
\end{aligned}
$$

**Korollar 5.2.3** *Ist $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.*

**Beweis.** $\big(\sqrt[k]{a}\big)^k = a = \big(a^{\frac{1}{k}}\big)^k$, und da die Gleichung $x^k = a$ nur eine positive Lösung hat, muss $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$ gelten. □

**Satz 5.2.4** *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

**Beweis.** Ist $\alpha = 1$, so ist die vorgelegte Reihe gerade die harmonische und deren Divergenz wurde in A.6.2 gezeigt.
Ist $\alpha < 1$, so folgt $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$ und die Divergenz folgt aus 2.2.6.
Es sei also $\alpha > 1$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \varepsilon := \alpha - 1$.
Dann gilt
$$n^\alpha = n^{1+\varepsilon} \geq n^{1+\frac{1}{k}} = n \cdot n^{\frac{1}{k}} = n \cdot \sqrt[k]{n},$$
also $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n\sqrt[k]{n}}$. Die Konvergenz folgt dann aus dem Majorantenkriterium und 2.2.20. □

## 5.3 Anwendung: Höldersche Ungleichung

**Satz 5.3.1** $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist konvex und* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist konkav.*

**Beweis.** Es sei $0 \leq \lambda \leq 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung sei $x_1 > x_2$, ansonsten vertausche $x_1$ und $x_2$ und verwende $(1 - \lambda)$ anstelle von $\lambda$. Für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\big(\lambda(x_1 - x_2)\big)^\nu \leq \lambda(x_1 - x_2)^\nu.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&\exp\big(\lambda(x_1 - x_2)\big) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\big(\lambda(x_1 - x_2)\big)^\nu \\
&\leq 1 + \lambda \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(x_1 - x_2)^\nu = (1 - \lambda) + \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(x_1 - x_2)^\nu \\
&= \lambda \exp(x_1 - x_2) + (1 - \lambda).
\end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $\exp(x_2)$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\exp(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \exp(\lambda(x_1 - x_2) + x_2) \\
&= \exp\big(\lambda(x_1 - x_2)\big) \cdot \exp(x_2) \leq \lambda \exp(x_1 - x_2) \exp(x_2) \\
&+(1 - \lambda) \exp(x_2) = \lambda \exp(x_1) + (1 - \lambda) \exp(x_2).
\end{aligned}$$

Also ist exp konvex. Satz 4.3.18 liefert, dass $\log = \exp^{-1}$ konkav ist. □

**Lemma 5.3.2** *Ist* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine konkave Funktion auf einem Intervall* $I$*, so gilt für alle* $x_1, \ldots, x_n \in I$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ *mit* $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$*, dass*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \leq f\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\Big).$$

**Beweis.** (durch Induktion).
$n = 1$ ist trivial.
$n \mapsto n + 1$. Sind $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu = 1$

gegeben, so sei ohne Einschränkung $0 < \lambda_{n+1} < 1$. Setze $\lambda := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \in (0,1)$. Dann gilt $\lambda_{n+1} = (1-\lambda)$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu f(x_\nu) &= \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda} f(x_\nu) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \\
&\leq \lambda f\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda}\, x_\nu\Big) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \\
&\leq f\Big(\lambda \cdot \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\lambda_\nu}{\lambda}\, x_\mu\Big) + (1-\lambda) x_{n+1}\Big) \\
&= f\Big(\sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu x_\nu\Big).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.3.3** i) Analog zeigt man: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex auf einem Intervall $I$, so gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$, dass

$$f\big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\big) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu).$$

ii) Man kann in 5.3.2 und 5.3.3 i) natürlich das Intervall durch eine beliebige konvexe Menge ersetzen.

**Korollar 5.3.4** *(Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und dem gewichteten geometrischen Mittel).*
*Sind $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu = 1$, so gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{\lambda_\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu,$$

*insbesondere gilt* $\sqrt[n]{\prod\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu} \leq \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

**Beweis.** Ohne Einschränkung seien $x_\nu, \lambda_\nu > 0$, $1 \le \nu \le n$, da

$$0^{\lambda_\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda_\nu = 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda_\nu > 0. \end{cases}$$

Aus der Konkavität von log (siehe 5.3.1) folgt mit 5.3.2, dass $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \log x_\nu \le \log\big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\big)$. Die Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten dieser Ungleichung ergibt (exp ist streng monoton wachsend!)

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{\lambda_\nu} &= \prod_{\nu=1}^{n} \exp(\lambda_\nu \log x_\nu) = \exp\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \log x_\nu\Big) \\ &\le \exp\Big(\log\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\Big)\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu. \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 5.3.5** Die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to [0,\infty), \ \|z\|_p := \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1,\infty),$$

heißt die $p$-Norm auf $\mathbb{K}^n$.

**Bemerkung 5.3.6** i) Für $p = \infty$ haben wir

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to [0,\infty), \ \|z\|_\infty := \sup_{1 \le \nu \le n} |z_\nu|,$$

gesetzt, und wir hatten schon gezeigt, dass $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen sind.

ii) Wir haben noch nicht gezeigt, dass $\|\cdot\|_p$ für $p \in (1,\infty)$ eine Norm ist. Offensichtlich gilt

$\alpha$) $\|z\|_p = 0 \Leftrightarrow z = 0$ und

$\beta$) $\|\lambda z\|_p = |\lambda| \|z\|_p$

für $z \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Das Problem ist die Dreiecksungleichung.

**Satz 5.3.7** *(Höldersche Ungleichung) Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\begin{aligned} | < z, w > | &= \Big| \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu \Big| \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \\ &\le \|z\|_p \|z\|_q \end{aligned}$$

*für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung seien $z, w \neq 0$. Aus 5.3.4 folgt $\big($mit $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = \frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p}$, $x_2 = \frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}\big)$, dass

$$\frac{|z_\nu w_\nu|}{\|z\|_p \|w\|_q} = \Big(\frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p}\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}\Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}\frac{|z_\nu|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|w_\nu|^q}{\|w\|_q^q}$$

für alle $1 \le \nu \le n$. Aufsummieren ergibt

$$\frac{1}{\|z\|_p \|w_q\|} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \le \frac{1}{p}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^p}{\|z\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^q}{\|w\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{also}$$

$$| < z, w > | \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu||w_\nu| \le \|z\|_p \|w\|_q.$$

□

**Korollar 5.3.8** *(Minkowskische Ungleichung)*
*Es sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt*

$$\|z + w\|_p \le \|z\|_p + \|w\|_p$$

*für alle $z, w \in \mathbb{K}^n$.*

**Beweis.** Es sei $s_\nu := |z_\nu + w_\nu|^{p-1}, s := (s_1, \ldots, s_n)$. Ist $q := \frac{p}{p-1}$, so gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also liefert Hölder

$$\|z + w\|_p^p = \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^p$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu| s_\nu \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu| s_\nu + |w_\nu| s_\nu$$

$$\le \|z\|_p \|s\|_q + \|w\|_p \|s\|_q.$$

Wegen

$$\|s\|_q = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \big(|z_\nu + w_\nu|^{p-1}\big)^{\frac{p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \Big(\Big(\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu + w_\nu|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)^{p-1} = \|z + w\|_p^{p-1}$$

folgt $\|z + w\|_p^p \leq \big(\|z\|_p + \|w\|_p\big)\|z + w\|_p^{p-1}$, also gilt auch $\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$. □

**Korollar 5.3.9** *Für alle* $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ *ist* $\| \cdot \|_p$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$.

**Beweis.** $p = 1, \infty$ sind in den Übungen behandelt worden. Mit 5.3.6 ii) und 5.3.8 folgt die Behauptung für $p \in (1, \infty)$. □

## 5.4 Mehr zu exp, die Zahl $\pi$ und Polarkoordinaten

**Satz 5.4.1** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig, und es gilt* $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

**Beweis.** Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, die gegen $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt mit 3.1.9 iii):

$$\frac{|\exp(z_n) - \exp(z_0)|}{|\exp(z_0)|} = |\exp(z_n - z_0) - 1|$$

$$= \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}(z_n - z_0)^\nu\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}|z_n - z_0|^\nu$$

$$= \exp\big(|z_n - z_0|\big) - \exp(0) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist mit 4.2.4 i) exp stetig an $z_0$. Da $z_0$ beliebig war, ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

In Beispiel 4.2.28 haben wir eine offene Menge $U$ mit $0 \in U$ konstruiert, für

die $\exp(U) = \{\exp(u) : u \in U\}$ offen ist. Nach 4.2.22 ist dann $w \cdot \exp(U) = \{w \cdot \exp(u) : u \in U\}$ offen für alle $w \in \mathbb{C}^*$.
Aus $\exp(z) \cdot \exp(U) = \{\exp(z \cdot u) : u \in U\} \subset \exp(\mathbb{C})$ folgt

$$\exp(\mathbb{C}) = \bigcup_{z\in\mathbb{C}} \exp(z) \cdot \{1\} \subset \bigcup_{z\in\mathbb{C}} \exp(z) \cdot \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C})$$

und damit ist $\exp(\mathbb{C})$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen in $\mathbb{C}$ und damit offen in $\mathbb{C}^*$.
Ist $A := \mathbb{C}^* \setminus \exp(\mathbb{C})$ und ist $w \in A$, so gilt

$$w \cdot \exp(\mathbb{C}) \cap \exp(\mathbb{C}) = \emptyset,$$

da ansonsten $w \exp(z_1) = \exp(z_2)$ mit $z_i \in \mathbb{C}$ gilt, was aber $w = \exp(z_2 - z_1) \in \exp(\mathbb{C})$ und damit $w \notin A$ nach sich zöge.
Also gilt $w \cdot \exp(\mathbb{C}) \subset A$ für alle $w \in A$. Es folgt

$$A = \bigcup_{w\in A} w \cdot \{1\} \subset \bigcup_{w\in A} w \cdot \exp(U) \subset A,$$

also ist auch $A$ offen.
$\{\exp(\mathbb{C}), A\}$ ist somit eine offene Zerlegung von $\mathbb{C}^*$. Da $\mathbb{C}^*$ nach Beispiel 4.3.15 iii) zusammenhängend ist, muss also $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ gelten. □

**Korollar 5.4.2** $e^{i\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{iz}$, *ist stetig. Weiter sind* $\cos, \sin, \cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *stetig.*

**Korollar 5.4.3** $e^{i\cdot} = \exp(i\cdot) : \mathbb{R} \to S^1 := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\},\ x \mapsto e^{ix}$, *ist surjektiv (und stetig).*

**Beweis.** Es sei $|w| = 1$. Dann existiert ein $z = a + ix \in \mathbb{C}$, wobei $a, x \in \mathbb{R}$, mit $e^z = w$. Wegen $e^a = |e^z| = |w| = 1$ gilt $a = 0$, also $e^{ix} = w$. □

**Satz/Definition 5.4.4** Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl $\pi$ mit

$$e^{i\pi} = -1.$$

**Beweis.** Es sei $M = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = -1\}$. Da $e^{i\cdot}$ stetig ist, folgt, dass $M = (e^{i\cdot})^{-1}\big(\{-1\}\big)$ abgeschlossen ist. Daher ist $M \cap [0,\infty)$ abgeschlossen, nach unten beschränkt und wegen $M = -M$ auch nicht leer.
Es sei $\pi := \inf M \cap [0,\infty)$. Dann gilt $\pi \in M$ nach A 13.1. Aus $e^{i0} = 1 \neq -1$ folgt $\pi > 0$. $\square$

**Satz 5.4.5** *Es gilt* $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z} = \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

**Beweis.**

1. Aus $e^{i\pi} = -1$ folgt $e^{i2\pi} = e^{i\pi} \cdot e^{i\pi} = 1$.
   Es folgt $e^{k2\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

2. Es sei nun $e^z = 1$. Dann gilt (siehe oben) $z = ix$ mit einem $x \in \mathbb{R}$.
   Ohne Einschränkung sei $x \geq 0$. Sei $k = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : x - 2\pi n \geq 0\}$. Dann ist $y := x - 2\pi k \in [0, 2\pi)$, und es gilt $e^{iy} = 1$ nach 1.
   Wir nehmen an, dass $y > 0$ ist, so folgt $0 < \frac{y}{2} < \pi$. Aus $(e^{i\frac{y}{2}})^2 = e^{iy} = 1$ folgt $e^{i\frac{y}{2}} \in \{1, -1\}$. Die Minimalität von $\pi$ erzwingt $e^{i\frac{y}{2}} = 1$. Mit demselben Argument folgt induktiv $e^{i\frac{y}{2^n}} = 1,\ n \in \mathbb{N}$, und damit $e^{i\frac{m}{2^n}\cdot y} = \big(e^{i\frac{y}{2^n}}\big)^m = 1^m = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Ist $m_n = \inf\big\{m \in \mathbb{N} : \frac{my}{2^n} \geq \pi\big\}$, so gilt wegen $\frac{(m_n-1)y}{2^n} < \pi \leq \frac{m_n y}{2^n}$, dass $\frac{m_n y}{2^n} \to \pi\,(n \to \infty)$.
   Es folgt $1 = e^{\frac{im_n y}{2^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{i\pi} = -1$, Widerspruch.
   Also ist $y = 0$ und damit $z \in \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$.

$\square$

**Korollar 5.4.6** *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z), k \in \mathbb{Z}$.

**Beweis.** $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z)\exp(2\pi ik) = \exp(z)$ für $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

**Satz 5.4.7** *Für* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp : \big\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\big\} \to \mathbb{C}^*$ *bijektiv.*

**Beweis.** Es sei $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\}$.
Ist $w \in \mathbb{C}^*$, so wähle man ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z_1) = w$ und dann ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z := z_1 - 2\pi ik \in M$. Es folgt $\exp(z) = \exp(z_1) = w$. Also ist $\exp(M) = \mathbb{C}^*$.
Seien $z_1, z_2 \in M$ mit $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, so gilt $\exp(z_1 - z_2) = 1$, also $z_1 = z_2 + 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Sei ohne Einschränkung $k \geq 0$.
Dann gilt $x_0 + 2\pi > \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 + 2\pi k \geq x_0 + 2\pi k$, also muss $k = 0$ und damit $z_1 = z_2$ gelten.
Also ist $\exp : M \to \mathbb{C}^*$ auch injektiv. □

**Korollar 5.4.8** *(Polarkoordinaten)*
*Es sei* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Dann ist* $P : (0, \infty) \times [x_0, x_0 + 2\pi) \to \mathbb{C}^*, (r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ *bijektiv.*

**Beweis.** Es sei $f : (0, \infty) \times [x_0, x_0 + 2\pi) \to M, f(r, \varphi) := \log r + i\varphi$, wobei wieder $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in [x_0, x_0 + 2\pi)\}$.
Dann ist $f$ bijektiv (beachte: $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv), und wegen $P = \exp \circ f$ ist auch $P$ bijektiv. □

**Korollar 5.4.9** *Es sei* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Die Abbildung* $e^{i\cdot} : [x_0, x_0 + 2\pi) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *ist bijektiv.*

**Satz 5.4.10** *Es sei* $z \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z} = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Beweis.** Es gilt

$$2i \sin z = e^{-iz}(e^{2iz} - 1),$$
$$2 \cos z = e^{i(\pi - z)}\left(e^{2i(z - \frac{1}{2}\pi)} - 1\right).$$

Also folgt

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz \in 2\pi i\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}.$$

Analog:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow 2i\Big(z - \frac{1}{2}\pi\Big) \in 2\pi i Z$$
$$\Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

□

**Satz 5.4.11** $\sin > 0$ *auf* $(0,\pi)$ *und damit* $\sin\frac{\pi}{2} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ *und* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

**Beweis.** Nach 5.4.10 gilt dass $\sin x \neq 0$ auf für alle $x \in (0,\pi)$. Also ist nach dem Zwischenwertsatz entweder $\sin > 0$ auf $(0,\pi)$ oder $\sin < 0$ auf $(0,\pi)$. In Beispiel 4.2.28 wurde gezeigt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\sup_{|z|,|w|\le\varepsilon}\Big|\frac{\exp(z)-\exp(w)}{z-w} - 1\Big| \le \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $x = \min\left\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$, so gilt mit $z = ix, w = 0$

$$1 - \frac{\sin x}{x} \le \Big|\mathrm{Re}\left(\frac{\exp(ix)-1}{ix} - 1\right)\Big| \le \Big|\frac{\exp(ix)-1}{ix} - 1\Big| \le \frac{1}{2},$$

und somit $\sin x > \frac{1}{2}x > 0$. Es folgt $\sin > 0$ in $(0,\pi)$. Wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ gilt $\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2}} = 1$ und somit $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Es folgt $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.
Wegen $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ muss also $e^{i\frac{\pi}{4}} \in \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$ gelten. Da $\sin\frac{\pi}{4} > 0$, folgt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. □

**Bemerkung 5.4.12** Aus $e^{kz} = (e^z)^k$ erhalten wir folgende Tabelle

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{ix}$ | $1$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $i$ | $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $-\frac{i+1}{\sqrt{2}}$ | $-i$ | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $1$ |

Verwendet man die Eulersche Formel, so ergibt sich

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $1$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ |

**Satz 5.4.13** *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$e^{z+i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^z, \quad e^{z+i\frac{\pi}{2}} = ie^z,$$
$$e^{z+i\pi} = -e^z \qquad \textit{und} \qquad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

*Insbesondere gilt also, dass* $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z), \ z \in \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{Z}$.

**Beweis.** Dies folgt aus $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ und $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i2\pi} = 1$.
Der letzte Teil wurde schon in 5.4.5 gezeigt. □

**Korollar 5.4.14** *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*
$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \ \cos(z + \pi) = -\cos z$

$\cos(z + 2\pi) = \cos z$,

$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \ \sin(z + \pi) = -\sin z$,

$\sin\left(z + 2\pi\right) = \sin z$,

*insbesondere gilt* $\cos(z+2\pi k) = \cos z$ *und* $\sin(z+2\pi k) = \sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$.

**Beweis.** Die Identitäten folgen aus obigem Satz, z.B.

$$\begin{aligned} cos\Big(z + \frac{\pi}{2}\Big) &= \frac{1}{2}\big(e^{iz+i\frac{\pi}{2}} + e^{-iz-i\frac{\pi}{2}}\big) \\ &= \frac{i}{2}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big) = -\frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big) \\ &= -\sin z. \end{aligned}$$

□

**Definition 5.4.15** Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt $\omega$-periodisch, falls $f(x + \omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**Korollar 5.4.16** cos *und* sin *sind* $2\pi$*-periodisch, aber nicht* $\omega$*-periodisch für* $0 < |w| < 2\pi$*.*

**Beweis.** Die $2\pi$-Periodizität folgt aus obigem Korollar.
Es habe sin die Periode $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$. Es sei ohne Einschränkung $w > 0$ (Ist $f$ $\omega$-periodisch, so auch $-\omega$-periodisch: $f(x) = f\big((x-w)+w\big) = f(x-w)$.)
Für $x \in [0, 2\pi]$ gilt $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, also gilt $\omega \in \{\pi, 2\pi\}$. Wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq -1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$ muss $\omega = 2\pi$ gelten.
Die Behauptung für cos folgt z. B. aus $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$. $\square$

**Bemerkung 5.4.17** Die Identitäten aus 5.4.14 liefern sofort wegen $\cosh z = \cos(iz)$ und $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ ähnliche Identitäten für cosh und sinh.

# Kapitel 6

# Kompakte Räume, Funktionenfolgen und -reihen

## 6.1 Kompaktheit

**Definition 6.1.1** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Ein Mengensystem $\mathscr{F}$ auf $X$ heißt offene Überdeckung von $M$, falls alle $F \in \mathscr{F}$ offene Teilmengen von $X$ sind und $M \subset \bigcup\limits_{F \in \tilde{\mathscr{F}}} F = \cup\mathscr{F}$ gilt.

**Beispiel 6.1.2** i) Es sei $(X, d) = \big([0,1], d_{|\cdot|}\big)$. Dann ist $\big\{\big[0, \frac{1}{2}\big), \big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big), \big(\frac{1}{2}, 1\big]\big\}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$.

ii) Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum und für jedes $x \in X$ sei $\varepsilon_x > 0$. Dann ist

$$\mathscr{F} = \big\{U_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\big\}$$

eine offene Überdeckung von $X$.

**Definition 6.1.3** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $X$ heißt

i) kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathscr{F}$ von $X$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. ist $\mathscr{F}$ eine offene Überdeckung von $X$, so existiert ein $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ endlich mit $X \subset \cup\mathscr{E}$,

ii) präkompakt, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E \subset X$ existiert mit $X \subset \bigcup\limits_{x \in E} U_\varepsilon(x)$,

iii) folgenkompakt, falls jede Folge in $X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

iv) Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt kompakt (folgenkompakt, präkompakt), falls $(M, d_M)$ (mit $d_M(x, y) := d(x, y)$) kompakt (folgenkompakt, präkompakt) ist.

**Bemerkung 6.1.4** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.

i) $M \subset X$ ist kompakt genau dann, wenn für jedes Mengensystem $\mathscr{F}$, bestehend aus offenen Mengen mit $M \subset \cup\mathscr{F}$, schon ein $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ endlich existiert mit $M \subset \cup\mathscr{E}$.

ii) Teilmengen präkompakter Mengen sind präkompakt. Dazu sein $(X, d)$ präkompakt und $M \subset X$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$. Ohne Einschränkung sei $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \cap M \neq \emptyset, 1 \leq j \leq n$. Wähle $y_j \in M \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$. Dann gilt $M \subset \bigcup_{j=1}^{n} \big(U_\varepsilon(y_j) \cap M\big) = \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon^M(y_j)$, wobei $U_\varepsilon^M(z_0) = \big\{z \in M : d_M(z, z_0) < \varepsilon\big)$.

iii) Abgeschlossene Teilmengen kompakter bzw. folgenkompakter Mengen sind wieder kompakt bzw. folgenkompakt. Dies kann man direkt zeigen, aber es wird auch aus 6.1.11 folgen.

iv) Kompakte Mengen sind präkompakt, dies folgt sofort aus der Definition unter Beachtung von 6.1.2 ii).

v) Präkompakte Teilmengen normierter Räume sind beschränkt. In der Tat, ist $M$ eine präkompakte Teilmenge des normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$, so wähle zu $\varepsilon = 1$ eine endliche Teilmenge $F \subset E$ mit $M \subset \bigcup_{x \in F} U_\varepsilon(x)$. Es folgt $\sup_{x \in M} \|x\| \leq 1 + \sup_{x \in F} \|x\| < \infty$.

**Lemma 6.1.5** *Ein metrischer Raum $(X, d)$ ist genau dann präkompakt, wenn jede Folge in $X$ eine Cauchy-Teilfolge besitzt.*

**Beweis.** Es sei $(X, d)$ präkompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konstante Teilfolge, so sind wir fertig. Andernfalls ist $X_1 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich und nach 6.1.4 ii) wieder präkompakt. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann existiert ein $M_1 \subset X_1$ endlich mit $X_1 \subset \bigcup_{x \in M_1} U_{\frac{1}{2}}(x)$. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\big|X_1 \cap U_{\frac{1}{2}}(x_{n_1})\big| = \infty$ und $x_{n_1} \in M_1$. Sind $x_\nu$, $1 \leq \nu \leq k$, und

$n_\nu$, $1 \le \nu \le k$, mit $|X_\nu \cap U_{\frac{1}{2^\nu}}(x_{n_\nu})| = \infty$ und $n_{\nu+1} > n_\nu$ gewählt, so setze $X_{k+1} := \{x_n \in X_k : n \ge n_k\}$ $(= X_k \cap \{x_n : n \ge n_k\})$, so ist $|X_{k+1}| = \infty$ und $X_{k+1}$ ist präkompakt. Also existiert zu $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ ein $M_{k+1} \subset X_{k+1}$ endlich mit $X_{k+1} \subset \bigcup\limits_{x \in M_{k+1}} U_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x)$. Wähle $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_{k+1}} \in M_{k+1}$ und $\left|X_{k+1} \cap U_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x_{n_{k+1}})\right| = \infty$.
Wegen $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \le \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$, ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy.
Es habe jede Folge in $X$ eine Cauchy-Teilfolge. Wir nehmen an, $X$ sei nicht präkompakt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $X \not\subset \bigcup\limits_{x \in E} U_\varepsilon(x)$ für alle $E \subset X$ endlich. Es sei $x_1 \in X$ beliebig.
Wähle sukzessiv $x_n$ mit $x_n \notin \bigcup\limits_{\nu=1}^{n-1} U_\varepsilon(x_\nu), n \ge 2$. Dann gilt für $m < n$, dass $x_n \notin U_\varepsilon(x_m)$ und für $m > n$, dass $x_m \notin U_\varepsilon(x_n)$, in beiden Fällen also $d(x_n, x_m) \ge \varepsilon$. Also kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Teilfolge besitzen, Widerspruch. $\square$

**Korollar 6.1.6** *Ein metrischer Raum ist genau dann folgenkompakt, wenn er präkompakt und vollständig ist.*

**Beweis.**

1. Es sei $(X, d)$ folgenkompakt.

   $\alpha)$ Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$, so besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Diese ist nach 2.1.5 ii) eine Cauchyfolge. Damit ist nach 6.1.5 $(X, d)$ präkompakt.

   $\beta)$ Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(X, d)$. Da diese eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert sie nach 2.1.5 v). Also ist $(X, d)$ vollständig.

2. Es sei $(X, d)$ präkompakt und vollständig. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$, so besitzt sie wegen 6.1.5 eine Cauchyteilfolge, und diese konvergiert aufgrund der Vollständigkeit.

$\square$

**Lemma 6.1.7** *(Lebesgue)*
*Es sei $(X, d)$ folgenkompakt und $\mathscr{F}$ eine offene Überdeckung von $X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ (so genannte Lebesguesche Konstante von $\mathscr{F}$), so dass für alle $x \in X$ ein $F_x \in \mathscr{F}$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset F_x$.*

**Beweis.** Wir nehmen an, ein solches $\varepsilon > 0$ existiert nicht. Dann wählen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $U_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset F$ für alle $F \in \mathscr{F}$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach Voraussetzung eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Da $\mathscr{F}$ eine offene Überdeckung von $X$ ist, existiert ein $F_0 \in \mathscr{F}$ offen mit $x_0 \in F_0$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset F_0$. Dann wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x_0) > \frac{\varepsilon}{2},\ k \geq K$. Ist nun $k \geq K$ mit $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, so gilt für alle $y \in U_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$, dass $d(x_0, y) \leq d(x_0, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_k} < \varepsilon$, also $U_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset U_\varepsilon(x_0) \subset F_0$, Widerspruch. $\square$

**Satz 6.1.8** *Für einen metrischen Raum $(X, d)$ sind äquivalent:*

*i) $X$ ist kompakt.*

*ii) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen $A_k \subset X$ mit $\bigcap\limits_{k=1}^{K} A_k \neq \emptyset,\ K \in \mathbb{N}$, gilt $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.*

*iii) $X$ ist folgenkompakt.*

*iv) $X$ ist präkompakt und vollständig.*

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii). Wir nehman an, es gilt $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcap\limits_{k=1}^{K} A_k \neq \emptyset$, aber $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$. Setze $\mathscr{O}_k := X \backslash A_k$. Dann gilt $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{O}_k = X$, $\{\mathscr{O}_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist also eine offene Überdeckung von $X$. Daher existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup\limits_{k=1}^{K} \mathscr{O}_k = X$ und damit $\bigcap\limits_{k=1}^{K} A_k = \emptyset$, Widerspruch.
ii) $\Rightarrow$ iii). Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$. Setze $A_k := \overline{\{x_n : n \geq k\}},\ k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap\limits_{k=1}^{K} A_k = A_K \neq \emptyset$. Also folgt, dass ein $x_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ existiert. Dies bedeutet $\{x_n : n \geq k\} \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Wähle

nun sukzessiv $(n_k)_k$ mit $n_{k+1} > n_k$ und $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(x_0)$. Es folgt $x_{n_k} \to x_0$.

iii) $\Leftrightarrow$ iv) in 6.1.6 gezeigt.

iii) $\Rightarrow$ i). Es sei $\mathscr{F}$ eine offene Überdeckung von $X$. Nach dem Lebesgueschen Lemma existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$\underset{x \in X}{\forall} \quad \underset{F_x \in \mathscr{F}}{\exists} \quad U_\varepsilon(x) \subset F_x.$$

Da $X$ wegen 6.1.6 präkompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} U_\varepsilon(x_\nu) \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} F_{x_\nu}$. Also ist $\{F_{x_\nu} : 1 \leq \nu \leq n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathscr{F}$. □

**Korollar 6.1.9** *(Heine-Borel)*
*Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^m$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

**Beweis.**

1. Es sei $M$ kompakt.

   $\alpha$) Da $M$ auch präkompakt ist, muß $M$ nach 6.1.4 v) beschränkt sein.

   $\beta$) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$ und $x_0 \in \overline{M}$ mit $x_n \to x_0$. Da $M$ folgenkompakt ist, existiert ein $y_0 \in M$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \to y_0$. Es folgt $x_0 = y_0 \in M$, da Grenzwerte eindeutig sind. Also gilt $\overline{M} \subset M$.

2. Es sei $M$ beschränkt und abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $x_0 \in \mathbb{K}^m$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Da $M$ abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in M$ und daher konvergiert $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0$ in $(M, d_M)$. Also ist $M$ folgenkompakt und nach 6.1.8 kompakt.

□

**Beispiel 6.1.10** Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ sind kompakt.

i) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für $a \leq b$.

ii) $\prod_{\nu=1}^{n} [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ für $a_\nu \leq b_\nu,\ 1 \leq \nu \leq n$.

iii) $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{K}^n : |z - z_0| \leq r\}$ für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{K}^n$.

**Korollar 6.1.11** *Es sei $M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes $(X, d)$.*

*i) Ist $M$ kompakt, so ist $M$ abgeschlossen.*

*ii) Ist $(X, d)$ kompakt und $M$ abgeschlossen, so ist $M$ kompakt.*

**Beweis.**

i) Nach 6.1.8 ist $(M, d_M)$ vollständig, und daher ist $M$ nach 4.1.23 iii) abgeschlossen.

ii) $(X, d)$ ist präkompakt und vollständig. Nach 6.1.4 ist $M$ präkompakt, und nach 4.1.23 iii) ist $(M, d_M)$ vollständig. Also ist $M$ nach 6.1.8 kompakt.

□

**Satz 6.1.12** *Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $M \subset X$ kompakt, so ist $f(M) \subset Y$ kompakt. Wenn zusätzlich $f$ injektiv auf $M$ ist, so ist $f^{-1} : f(M) \to M$ stetig.*

**Beweis.**

1. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(M)$. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $M$ kompakt ist, existiert mit 6.1.8 eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x_0 \in M$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Es folgt aus der Stetigkeit von $f$, dass $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Mit 6.1.8 ist $f(M)$ kompakt.

2. Ohne Einschränkung sei $M = X$, ansonsten betrachte $f|_M : M \to Y$. Ist $A \subset f^{-1}\big(f(X)\big) = X$ abgeschlossen, so ist $A$ nach 6.1.11 ii) ebenfalls kompakt. Mit 1. ist auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ kompakt und daher nach 6.1.11 i) abgeschlossen.
   $f^{-1}$ erfüllt also die Bedingung iii) aus 4.2.19, und damit ist $f^{-1}$ stetig.

□

**Korollar 6.1.13** *Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, $M \subset X$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $x^*$ und $x_*$ in $X$ mit $f(x^*) = \sup f(M)$ und $f(x_*) = \inf f(M)$. Mit anderen Worten: $\max\limits_{x\in M} f(x)$ und $\min\limits_{x\in M} f(x)$ existieren. Ist zusätzlich $M$ zusammenhängend, so ist $f(M) = \big[\min\limits_{x\in M} f(x), \max\limits_{x\in M} f(x)\big]$.*

**Beweis.**

1. Nach 6.1.12 ist $f(M) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also mit dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Nach A 13.1 gilt $\sup f(M) \in f(M)$ und $\inf f(M) \in f(M)$.

2. Es sei jetzt zusätzlich $M$ zusammenhängend. Dann ist $f(M)$ nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Wegen 1. gilt dann $f(M) = \big[\min\limits_{x\in M} f(x), \max\limits_{x\in M} f(x)\big]$.

□

**Korollar 6.1.14** *Es sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $f\big([a,b]\big) = \big[\min\limits_{a\le x\le b} f(x), \max\limits_{a\le x\le b} f(x)\big]$.*

**Beweis.** $[a,b]$ ist zusammenhängend nach 4.3.5 und kompakt nach 6.1.10 i). Die Behauptung folgt aus 6.1.13. □

**Satz 6.1.15** *Es sei $(X,d_X)$ kompakt und $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ stetig. Dann ist $f$ schon gleichmäßig stetig.*

**Beweis.** Wir nehmen an, $f$ sei nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren nach 4.2.4 ii) Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $d_X(x_n, y_n) \to 0$, aber $d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da $(X, d)$ kompakt ist, können wir wegen 6.1.8 (nach eventuellem Übergang zu Teilfolgen) annehmen, dass $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$. Wegen $d_X(x_n, y_n) \to 0$ gilt $x_0 = y_0$. Es folgt aus der Stetigkeit von $f$ an $x_0$, dass

$$d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) \leq d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) + d_Y\big(f(y_n), f(x_0)\big) \to 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

**Satz 6.1.16** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ kompakte metrische Räume und $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum.*

*i) Ist $f : X \times Y \to E$ stetig, so ist*

$$F : X \times X \to \mathbb{R},\ F(x_1, x_2) := \sup_{y\in Y} \big\|f(x_1, y) - f(x_2, y)\big\|,$$

*stetig.*

*ii) Ist $E = \mathbb{R}$ und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig, so sind*

$$g : X \to \mathbb{R},\ \ g(x) := \sup_{y\in Y} f(x, y) \ \textit{und}$$
$$h : X \to \mathbb{R},\ \ h(x) := \inf_{y\in Y} f(x, y) \ \textit{stetig.}$$

**Beweis.** (in den Übungen) □

**Korollar 6.1.17** *Es sei $K$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ (z. B. $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$) und $f : \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{K}$ stetig. Dann ist $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2) := \sup_{y\in K} \big|f(x_1, y) - f(x_2, y)\big|$, stetig.*
*Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so sind*

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g(x) = \sup_{y\in K} f(x, y) \quad \textit{und}$$
$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h(x) = \inf_{y\in K} f(x, y),$$

*stetig.*

**Beweis.** Dies folgt aus 6.1.16, 4.2.2 v) und dem Satz von Heine-Borel. □

## 6.2 Konvergenz von Funktionenfolgen

**Definition 6.2.1** Es sei $X$ eine nichtleere Menge, $A \subset X$ sowie $(Y, d_Y)$ ein metrischer Raum.
Weiter seien $f_n : X \to Y,\ n \in \mathbb{N}$, Abbildungen, und es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

i) punktweise konvergent gegen $f$ (auf $X$), falls $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$,

ii) gleichmäßig konvergent gegen $f$ auf $A$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in A$ gilt, dass

$$d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Ist zusätzlich $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, so heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen $f$, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $\varrho > 0$ existiert, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$ auf $U_\varrho(x_0)$ konvergiert.

**Bemerkung 6.2.2** Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $A \subset X$, $f_n : X \to Y,\ n \in \mathbb{N}$, und $f : X \to Y$ Abbildungen.

i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f$ genau dann, wenn für alle $x \in X$
$$d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $A$ gegen $f$ genau dann, wenn
$$\sup_{x\in A} d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f$ genau dann, wenn für alle $x_0 \in X$ ein $\varrho > 0$ existiert mit
$$\sup_{x\in U_\varrho(x_0)} d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

iv) Die gleichmäßige Konvergenz auf $X$ impliziert die lokal gleichmäßige Konvergenz, und diese impliziert wiederum die punktweise Konvergenz.

v) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann lokal gleichmäßig gegen $f$, wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Menge $\mathscr{O}$ existiert mit $x \in \mathscr{O}$, so dass

$$\sup_{y\in\mathscr{O}} d_Y\big(f_n(y), f(y)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

**Beispiel 6.2.3** i) Es sei $(X, d_X) = \big([0,1], d_{|\cdot|}\big)$ und $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, und

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in [0,1) \\ 1 & : \ x = 1. \end{cases}$

$\alpha$) Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ punktweise gegen $f$.
Dazu sei $x \in [0,1]$ beliebig.
<u>1. Fall:</u> $x = 1$. Dann gilt $f_n(1) = 1^n = 1 \to 1 = f(1)$.
<u>2. Fall:</u> $x \in [0,1)$. Dann gilt $f_n(x) = x^n \to 0 = f(x)$.

$\beta$) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **nicht** lokal gleichmäßig gegen $f$. Annahme, doch. Dann existiert ein $\varrho > 0$ mit

$$\sup_{1-\varrho<x<1} \big|f_n(x)\big| \le \sup_{x\in U_\varrho(1)} \big|f_n(x) - f(x)\big| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Da $f_n$ stetig ist, gilt $f_n\big(1 - \frac{1}{k}\big) \to f_n(1) = 1$ $(k \to \infty)$. Wähle $k_n \ge \frac{1}{\varrho}$ mit $f_n\big(1 - \frac{1}{k_n}\big) \ge \frac{1}{2}$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \le \Big|f_n\Big(1 - \frac{1}{k_n}\Big)\Big| \le \sup_{1-\varrho<x<1} \big|f_n(x)\big|.$$

Widerspruch.

$\gamma$) Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht lokal gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f$ konvergiert. kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f$ konvergieren.

ii) Es sei nun $(X, d_X) = \big((0,1), d_{|\cdot|}\big)$ und $(Y, d_Y) = (\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$. Weiter sei

$$f_n : (0,1) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n \quad \text{und} \quad f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig auf $(0,1)$ gegen $f$.
Sei dazu $x_0 \in (0,1)$ beliebig. Wähle $\varrho > 0$ mit $x_0 + \varrho < 1$. Dann gilt

$$\sup_{x\in U_\varrho(x_0)} \big|f_n(x) - f(x)\big| =$$

$$\sup_{x\in U_\varrho(x_0)} |f_n(x)| \leq \sup_{0\leq x\leq x_0+\varrho} |x^n|$$

$$= (x_0+\varrho)^n \to 0 \ (n\to\infty).$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **nicht** gleichmäßig auf $(0,1)$ gegen $f$. Annahme, doch. Dann gilt

$$\sup_{0<x<1} \big|f_n(x)\big| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Mit demselben Argument wie in i) $\beta$) zeigt man, dass $\frac{1}{2} \leq \sup\limits_{0<x<1} \big|f_n(x)\big|$, Widerspruch.

**Satz 6.2.4** *Es sei $X$ eine nichtleere Menge, $A \subset X$ und $(Y, d_Y)$ ein vollständiger metrischer Raum. Sind $f_n : X \to Y,\ n \in \mathbb{N}$, Abbildungen, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann*

*i) punktweise gegen ein $f : X \to Y$, wenn für alle $x \in X$ die Folge $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $Y$ ist;*

*ii) gleichmäßig auf $A$ gegen ein $f : X \to Y$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt $\sup\limits_{x\in A} d_Y\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon$.*

*Ist zusätzlich $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann lokal gleichmäßig gegen ein $f : X \to Y$, wenn für alle $x_0 \in X$ ein $\varrho > 0$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt*

$$\sup_{x\in U_\varrho(x_0)} d_Y\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon.$$

**Beweis.** Wir zeigen zunächst ii). Aus $d_Y\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq \sup\limits_{y\in A}, d_Y\big(f_n(y), f_m(y)\big)$ folgt, dass $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in A$ eine Cauchyfolge ist. Aus der Vollständigkeit von $Y$ folgt die Existenz von $f(x),\ x \in X$, mit $f_n(x) \to f(x)\,(n \to \infty),\ x \in A$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{y \in A} d_Y\big(f_n(y), f_m(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$, $n, m \geq \mathbb{N}$.
Es sei $n \geq N$. Zu $x \in A$ wähle $m \geq N$ mit $d_Y\big(f_m(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_Y\big(f_n(x), f(x)\big) &< d_Y\big(f_n(x), f_m(x)\big) + d_Y\big(f_m(x), f(x)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

i) folgt durch Anwendung von ii) auf $A = \{x_0\},\ x_0 \in X$, und iii) folgt durch Anwendung von ii) auf $A = U_\varrho(x_0),\ x_0 \in X,\ \varrho > 0$. □

**Satz 6.2.5** *Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ stetige Abbildungen, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : X \to Y$, so ist $f$ stetig.*

**Beweis.** Es sei $x_0 \in X$. Wähle $\varrho > 0$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $U_\varrho(x_0)$ gegen $f$ konvergiert.
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{x \in U_\varrho(x_0)} d_Y\big(f_n(x) - f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3},\ n \geq N$. Da $f_N$ stetig ist, existiert ein $\varrho > \delta > 0$ mit $d_Y\big(f_N(x), f_N(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.
Es folgt

$$\begin{aligned} d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) &\leq d_Y\big(f(x), f_N(x)\big) + d_Y\big(f_N(x), f_N(x_0)\big) \\ &+ d_Y\big(f_N(x_0), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$. □

**Korollar 6.2.6** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum.
Dann ist $CB(X, E)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, definiert durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|$, ebenfalls ein vollständiger normierter Raum.
Ist $X$ kompakt, so gilt $C(X, E) = CB(X, E)$, und damit ist in diesem Fall auch $\big(C(X, E), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein vollständiger normierter Raum.*

**Beweis.** Wegen 6.2.5 ist $CB(X,E)$ abgeschlossen in dem vollständigen normierten Raum $B(X,E)$ siehe 2.1.17, also mit 4.1.23 iii) ist $CB(X,E)$ vollständig.
Ist $X$ kompakt auf $f : X \to E$ stetig, so ist $f(X)$ nach 6.1.12 kompakt und mit 6.1.4 iv) beschränkt. Somit gilt $C(X,E) = CB(X,E)$. □

**Satz 6.2.7** *Es sei $X$ eine Menge, $(Y, d_Y)$ und $(Z, d_Z)$ metrische Räume, $f_n : X \to Y$ Abbildungen, so daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : X \to Y$ konvergiert. Ist $g : Y \to Z$ gleichmäßig stetig, so konvergiert $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.*
*Ist zusätzlich $(X, d_X)$ ein metrischer Raum und sind alle $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, stetig, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

**Beweis.** Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mit $d_Z(g(y_1), g(y_2)) < \varepsilon$ für alle $y_1, y_2 \in Y$ mit $d_Y(y_1, y_2) < \delta$. Dann wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) < \delta$$

für alle $n \geq N$. Aus beidem zusammen folgt, dass

$$\sup_{x\in X} d_Z(g(f_n(x)), g(f(x))) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.
Der zweite Teil folgt mit 6.2.5. □

**Beispiel/Bemerkung 6.2.8** i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (0,1) \to (0,\infty)$,
$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & : x \in (0, \frac{1}{n}] \\ x & : x \in (\frac{1}{n}, 1). \end{cases}$ Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$ mit $f(x) = x$. Ist nun $g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$, so konvergiert $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen $g = g \circ f$, da $|g \circ f_n(\frac{1}{n}) - g \circ f(\frac{1}{n})| = n^2 - n \to \infty\ (n \to \infty)$. Auf die Voraussetzung der gleichmäßigen Stetigkeit kann also nicht verzichtet werden.
ii) Es sei $X$ eine Menge, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_n : X \to E,\ n \in \mathbb{N}$, welche gleichmäßig gegen ein

$f : X \to E$ konvergiert. Setzen wir $\|f_n\|_E : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f_n(x)\|_E$, so konvergiert $(\|f_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\|f\|_E : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x)\|_E$. Dies folgt aus der der gleichmäßigen Stetigkeit von $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ (siehe 4.2.11) und Satz 6.2.7. Ist also insbesondere $E = \mathbb{K}$, so konvergiert $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|f|$.

**Definition 6.2.9** Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $f$ heißt

i) unterhalb stetig, falls für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}\big((-\infty, r]\big)$ abgeschlossen ist;

ii) oberhalb stetig, falls für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}\big([r, \infty)\big)$ abgeschlossen ist.

**Bemerkung 6.2.10** i) $f$ ist unterhalb stetig genau dann, wenn $f^{-1}\big((r, \infty)\big)$ offen für alle $r \in \mathbb{R}$. (Verwende $f^{-1}(Y\backslash M) = X\backslash f^{-1}(M)$)

ii) $f$ ist oberhalb stetig genau dann, wenn $f^{-1}\big((-\infty, r)\big)$ offen für alle $r \in \mathbb{R}$.

iii) $f$ ist unterhalb stetig genau dann, wenn $-f$ oberhalb stetig ist.

iv) $f$ ist stetig genau dann, wenn $f$ sowohl unterhalb als auch oberhalb stetig ist.
“$\Rightarrow$” folgt sofort aus 4.2.19.
”$\Leftarrow$”. Es sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$ beliebig. Aus 1.1.29 ii) folgt mit $y_0 = f(x_0)$, dass

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(U_\varepsilon(y_0)\big) &= f^{-1}\big(\{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \varepsilon\}\big) = f^{-1}\big((-\infty, y_0 + \varepsilon) \cap (y_0 - \varepsilon, +\infty)\big) \\ &= f^{-1}\big((-\infty, y_0 + \varepsilon)\big) \cap f^{-1}\big((y_0 - \varepsilon, +\infty)\big) \end{aligned}$$

gilt, also ist $f^{-1}\big(U_\varepsilon(y_0)\big)$ offen. Damit existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big)$, also $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.

v) Sind $f, g$ unterhalb stetig (oberhalb stetig) und ist $\lambda \geq 0$, so sind auch $f + g$ und $\lambda f$ unterhalb stetig (oberhalb stetig). Es seien dazu $f, g$ unterhalb stetig und $r \in \mathbb{R}$ beliebig.
Ohne Einschränkung sei $(f + g)^{-1}\big((r, \infty)\big) \neq \emptyset$.
Ist $x_0 \in (f + g)^{-1}\big((r, \infty)\big)$ beliebig, so sei $\varepsilon := f(x_o) + g(x_0) - r$. Dann

sind $f^{-1}\big((f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},+\infty)\big)$ und $g^{-1}\big((g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},+\infty)\big)$ offen, also ist $x_0$ innerer Punkt beider Mengen und damit auch ihres Schnittes.
Wegen

$$\begin{aligned}(f+g)^{-1}\big((r,\infty)\big) &= \{x : f(x)+g(x)>r\}\\ &\supset \Big\{x : f(x) > f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad g(x)>g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big\}\\ &= f^{-1}\Big(\Big(f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},+\infty\Big)\Big)\cap g^{-1}\Big(\Big(g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},+\infty\Big)\Big)\end{aligned}$$

ist $x_0$ innerer Punkt von $(f+g)^{-1}\big((r,\infty)\big)$.

**Satz 6.2.11** *(Dini) Es sei $(X,d)$ ein kompakter metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge oberhalb stetiger Funktionen $f_n : X\to\mathbb{R}$ mit $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ sowie alle $x\in X$ (man sagt: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Funktionenfolge). Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine unterhalb stetige Funktion $f : X\to\mathbb{R}$, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen $f$.*

**Beweis.** Wegen $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend gilt zunächst

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x)\leq f_k(x)\leq f_n(x)$$

für alle $k\geq n$ und alle $x\in X$. Es sei $\varepsilon>0$. Aus obigem folgt, dass $x\notin A_n := \{x\in X : f_n(x)-f(x)\geq\varepsilon\}$ genau dann, wenn $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,\ k\geq n$. Da $f_n-f$ oberhalb stetig ist, sind die Mengen $A_n,\ n\in\mathbb{N}$, abgeschlossen. Aus der punktweisen Konvergenz folgt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n=\emptyset$. Mit 6.1.8 ii) existiert ein $N\in\mathbb{N}$ mit $A_N=\emptyset$, und daher gilt $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon, k\geq N, x\in X$. $\square$

**Bemerkung 6.2.12** i) Ein analoger Satz gilt für monoton wachsende Funktionenfolgen, man muss dann natürlich in der Formulierung "oberhalb stetig" und "unterhalb stetig" vertauschen.
ii) Man kann auf die Kompaktheit von $X$ nicht verzichten wie Beispiel 6.2.3 ii) zeigt.

## 6.3 Funktionenreihen

Die für uns wichtigsten Funktionenreihen sind die Potenzreihen, d.h. ist $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ eine mit ihr gebildete Potenzreihe (mit Konvergenzradius $R$), so setzt man $g_\nu : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $g_\nu(z) = a_\nu(z-z_0)^\nu$, und $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu$, d.h. $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$.
Ist allgemeiner $X$ eine Menge oder ein metrischer Raum, $E$ ein vollständiger normierter Raum, $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen $f_\nu : X \to E$, so setzt man wieder $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu,\ n \in \mathbb{N}$. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die mit $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ gebildete Funktionenreihe und wird (siehe auch 2.2.1) mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ bezeichnet.

**Definition 6.3.1** Es sei $X$ eine Menge, $A \subset X$ und $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum. Ist $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen $f_\nu : X \to E$, so heißt die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$

i) punktweise konvergent gegen $f : X \to E$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ punktweise gegen $f$ konvergiert. In diesem Fall schreiben wir $f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$;

ii) gleichmäßig auf $A$ konvergent gegen $f : X \to E$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf $A$ gegen $f$ konvergiert.

Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, so heißt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$

iii) lokal gleichmäßig konvergent gegen $f$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lokal gleichmääßig gegen $f$ konvergiert;

iv) normal konvergent, falls für alle $x_0 \in X$ ein $\varrho > 0$ existiert mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_{U_\varrho(x_0)} < \infty$. Hierbei ist $\|g\|_{U_\varrho(x_0)} := \sup\limits_{x\in U_\varrho(x_0)} \|g(x)\|_E$.

**Bemerkung 6.3.2** i) Offensichtlich ist jede lokal gleichmäßig konvergente Funktionenreihe auch punktweise konvergent.

ii) Jede normal konvergente Funktionenreihe ist lokal gleichmäßig konvergent. Dies folgt aus $\sup\limits_{x\in U_\varrho(x_0)} \|s_m(x)-s_n(x)\| \le \sup\limits_{x\in U_\varrho(x_0)} \sum\limits_{\nu=n-1}^{m} \|f_\nu\|_{U_\varrho(x_0)}$ und 6.2.4.

iii) Eine Funktionenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ ist genau dann normal konvergent, wenn für jedes $x_0 \in X$ eine offene Menge $\mathscr{O}$ mit $x_0 \in \mathscr{O}$ existiert, so dass $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_{\mathscr{O}} < \infty$. Hierbei ist $\|g\|_{\mathscr{O}} := \sup\limits_{x\in\mathscr{O}} \|g(x)\|_E$.

Es gilt

**Satz 6.3.3** *Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ eine normal konvergente Reihe von stetigen Funktionen $f_\nu : X \to E,\ \nu \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ stetig.*

**Beweis.** Zunächst ist $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu$ als Summe stetiger Funktionen nach 4.2.15 ii) wieder stetig. Die Behauptung folgt nun aus 6.3.2 und 6.2.5. □

**Korollar 6.3.4** *Es sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und die Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ habe einen Konvergenzradius $R \neq 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe normal auf $U_R(z_0)$ gegen*

$$f : U_R(z_0) \to \mathbb{C},\ f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu.$$

*Insbesondere ist $f$ stetig.*

**Beweis.** Es sei $X := U_R(z_0)$, $E := \mathbb{C}$, $f_\nu : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $f_\nu(z) := a_\nu(z-z_0)^\nu$. Ist $x_0 \in U_R(z_0)$ beliebig, so wähle $0 < r < R$ mit $x_0 \in \mathscr{O} := U_r(z_0)$. Dann ist $\mathscr{O}$ offen und es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_{\mathscr{O}} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{z\in U_r(z_0)} |a_\nu(z - z_0)^\nu| \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\, r^\nu < \infty.\end{aligned}$$

Mit 6.3.2 iii) ist die Potenzreihe normal konvergent und 6.3.3 liefert die Stetigkeit von $f$. □

# Kapitel 7

# Grenzwerte und Fortsetzung von Abbildungen

## 7.1 Funktionsgrenzwerte

**Definition 7.1.1** Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume und $x_0 \in X$ Häufungspunkt von $M \subset X$ (d.h. $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; M \cap \big(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \neq \emptyset$).
$y_0 \in Y$ heißt Funktionsgrenzwert von $f$ an $x_0$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y\big(f(x), y_0\big) < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } 0 < d_X(x, x_0) < \delta.$$

Mit anderen Worten: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f\big(M \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})\big) \subset U_\varepsilon(y_0)$.
Ist $y_0$ Funktionsgrenzwert von $f : M \to Y$ an $x_0$, so schreiben wir

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in M}} f(x) = y_0 \text{ oder}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ oder}$$

$$f(x) \to y_0 \; (x \to x_0) \text{ oder}$$

$$f(x) \overset{x \to x_0}{\to} y_0$$

Ist speziell $Y = \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{ falls für alle } R \geq 1 \text{ ein } \delta > 0$$

existiert mit $f(x) \geq R$ für alle $x \in M$ mit

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta,$$

sowie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \text{ falls für alle } R \leq -1 \text{ ein } \delta > 0$$

existiert mit $f(x) \leq R$ für alle $x \in M$ mit

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta.$$

Ist speziell $X = \mathbb{R}$, so schreiben wir

i) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) := \lim\limits_{x \to x_0} f\big|_{M \cap (x_0, \infty)}(x)$ und

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) := \lim\limits_{x \to x_0} f\big|_{(-\infty, x_0) \cap M}(x)$.

ii) Ist $M$ nicht nach oben beschränkt, so schreiben wir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $R \geq 1$ existiert mit $d_Y\big(f(x), y_0\big) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $x \geq R$.
Weiter schreiben wir für nach unten nicht beschränktes $M$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0, \text{ falls für alle } \varepsilon > 0$$

ein $R \leq -1$ existiert, so dass $d_Y\big(f(x), y_0\big) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $x \leq R$.

iii) Ist zusätzlich $Y = \mathbb{R}$, so definiert man analog

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Bemerkung 7.1.2** i) Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $M \subset X$ und $x_0$ ein Häufungspunkt von $M$.
Ist $f : M \to Y$ eine Abbildung, so gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ genau dann, wenn die Abbildung

$$\tilde{f} : M \cup \{x_0\} \to Y, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in M \setminus \{x_0\} \\ y_0 & : \ x = x_0, \end{cases}$$

stetig in $x_0$ ist. Dies folgt sofort aus den Definitionen der Stetigkeit in $x_0$ und des Funktionsgrenzwertes.

ii) Ist $M \subset \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $M$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Existieren $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und sind sie gleich, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

**Beispiel 7.1.3** i) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{\sin z}{z}$.
Dann gilt $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$. In der Tat, für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu}.$$

Wir setzen $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \tilde{f}(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu}$.
Dann ist $\tilde{f}$ eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion, welche Konvergenzradius $\infty$ hat, also ist mit 6.3.4 $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{C}$, insbesondere an $z_0 = 0$.
Weiter gilt $\tilde{f}(0) = 1$. Aus Bemerkung 7.1.2 folgt also $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \tilde{f}(0) = 1$.

ii) Es sei sign : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & : z \neq 0 \\ 0 & : z = 0 \end{cases}$. Dann ist $\operatorname{sign}|_{\mathbb{C}^*}$ stetig, also gilt für alle $z_0 \in \mathbb{C}^* : \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{sign}(z) = \operatorname{sign}(z_0)$.
Für $z_0 = 0$ existiert der Limes $\lim\limits_{z \to 0} \operatorname{sign}(z)$ nicht.
Betrachte dazu sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} 1 = 1 \quad \text{sowie}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

Dann existiert sogar der Limes $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \operatorname{sign}(x)$ nicht.

iii) Es sei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

iv) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$.
Ist $n$ gerade und $a_n > 0$, so gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
Ist $n$ gerade und $a_n < 0$, so gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Ist $n$ ungerade und $a_n > 0$, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Ist $n$ ungerade und $a_n < 0$, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f)x) = +\infty$.

**Beweis.** in den Übungen. □

**Satz 7.1.4** *Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $M \subset X$ und $x_0$ ein Häufungspunkt von $M$.*
*Ist $f : M \to Y$ eine Abbildung, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ schon folgt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

**Beweis.** analog zu 4.2.4. □

**Bemerkung 7.1.5** Analoge Charakterisierungen gelten natürlich auch für Limiten vom Typ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
Beispielsweise gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ schon $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ gilt.

**Satz 7.1.6** *Es seien $f(z) = \sum\limits_{\nu=p}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ und $g(z) = \sum\limits_{\nu=q}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^\nu$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius.*
*Weiter sei $p \geq q$ und $b_q \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_p} & , \text{ falls } p = q \\[2em] 0 & , \text{ falls } p > q. \end{cases}$$

**Beweis.** Es sei $z_n \to z_0$ mit $z_n \neq z_0, n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{a_p(z_n - z_0)^{p-q} + \sum\limits_{\nu=p-q+1}^{\infty} a_{p+q}(z_n - z_0)^\nu}{b_q + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_{q+\nu}(z_n - z_0)^\nu}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Setzen wir $h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_1(z) := \sum\limits_{\nu=p-q+1}^{\infty} a_{\nu+q}(z-z_\nu)^\nu$ und $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_2(z) := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_{q+\nu}(z-z_0)^\nu$, so sind $h_1, h_2$ stetig in $z_0$ nach 6.3.4.
Es folgt

$$\frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{a_p(z_n-z_0)^{p-q}+h_1(z_n)}{b_q+h_2(z_n)}$$

$$n \overset{\longrightarrow}{\to} \infty \quad \frac{a_p 0^{p-q}+0}{b_q+0} = \frac{a_p}{b_q} \cdot 0^{p-q}.$$

$\square$

**Beispiel 7.1.7** Es sei

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{\cos(z) - (1-\frac{1}{2}z^2)}{z^4}.$$

Dann gilt $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{24}$.
In der Tat, es gilt

$$\frac{\cos z - (1-\frac{1}{2}z^2)}{z^4} = \frac{\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}}{z^4} \longrightarrow \frac{\frac{(-1)^2}{(2\cdot 2)!}}{1} = \frac{1}{24}.$$

## 7.2 Fortsetzung stetiger Abbildungen

**Definition 7.2.1** Es seien $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ metrische Räume $M \subset A \subset X$ und $f : M \to Y$ stetig.
Eine stetige Abbildung $F : A \to Y$ heißt stetige Fortsetzung von $f$ nach $A$, falls $F|_M = f$.

**Beispiel 7.2.2** Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $M = (0,\infty), A = \mathbb{R}, f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x$.

Dann sind $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_1(x) = x$, und $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_2(x) := \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x \leq 0, \end{cases}$,

beides stetige Fortsetzungen von $f$ nach $\mathbb{R}$.

**Satz 7.2.3** *Es seien* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *metrische Räume und* $M \subset A \subset X$ *mit* $A \subset \overline{M}^X$. *Genau dann besitzt eine stetige Abbildung* $f : M \to Y$ *eine stetige Fortsetzung* $F : A \to Y$, *falls für jedes* $x \in A \setminus M$ *der Grenzwert* $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi)$ *existiert. In diesem Fall ist*

$$F : A \to Y,\ F(x) = \begin{cases} f(x) & : \ x \in M \\ \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) & : \ x \in A \setminus M. \end{cases}$$

$F$ *ist auch eindeutig bestimmt.*

**Beweis.**

1. Es existiere eine stetige Fortsetzung $F : A \to Y$.
   Dann gilt für alle $x \in A$:

   $$F(x) = \lim_{\xi \to x} F(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi).$$

   Also existiert $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi)$ für alle $x \in A$. Da Grenzwerte eindeutig sind, ist auch $F$ eindeutig bestimmt.

2. Es mögen alle Limiten $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi), x \in A \setminus M$ existieren. Wir setzen

   $$F(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in M \\ \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) & : \ x \in A \setminus M. \end{cases}$$

   Um die Stetigkeit von $F : A \to X$ nachzuweisen, sei $x_0 \in A$, und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $A$ mit $x_n \to x$.
   Nehmen wir an, dass $\big(F(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $F(x_0)$ konvergiert, so können wir ohne Einschränkung annehmen (nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge), dass ein $\varepsilon > 0$ mit $d_Y\big(F(x_n), F(y_0)\big) \geq \varepsilon, n \in \mathbb{N}$, existiert.
   Wähle $\xi_n \in M$ mit $d_X(\xi_n, x_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y\big(f(\xi_n), F(x_n)\big) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.
   Dann gilt $d_X(\xi_n, x_0) \leq d_X(\xi_n, x_n) + d_X(x_n, x_0) \to 0\,(n \to \infty)$ und damit $f(\xi_n) \to F(x_0)$ nach Voraussetzung.
   Es folgt

   $$d_Y\big(F(x_n), F(x_0)\big) \leq d_Y\big(F(x_n), f(\xi_n)\big) + d_Y\big(f(\xi_n), F(x_0)\big) \to 0,$$

   Widerspruch.

□

**Korollar 7.2.4** *Es sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum, $(Y, d_Y)$ ein vollständiger metrischer Raum, $M \subset X$ und $f : M \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte (gleichmäßig) stetige Fortsetzung $F : \overline{M} \to Y$ von $f$ nach $\overline{M}$.*

**Beweis.** Es sei $x_0 \in \overline{M} \backslash M$. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \to x_0$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $M$ und, da $f$ gleichmäßig stetig, folgt mit 4.2.4 iii), dass auch $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $Y$ ist, die aufgrund der Vollständigkeit von $Y$ gegen ein $y_0$ konvergiert. Wir zeigen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$: Es sei dazu $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$ mit $\tilde{x}_n \to x_0$. Setze $z_{2n} := x_n, z_{2n+1} := \tilde{x}_n$. Dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder konvergent gegen $x_0$, also Cauchy und nach Obigem (angewendet auf $(z_n)_n$ anstelle von $(x_n)_n$) ist auch $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, und da $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(z_n)_n$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = y_0$.
Insgesamt folgt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Also existiert mit Satz 7.2.3 eine eindeutige stetige Funktion $F : \overline{M} \to Y$ von $f$ nach $\overline{M}$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Da $f : M \to Y$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in M$ mit $d_X(x, y) < \delta$.
Es seien $x_0, y_0 \in \overline{M}$ mit $d_X(x_0, y_0) < \delta$ gegeben.
Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $M$ mit $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Dann konvergiert $d_X(x_n, y_n) \to d_X(x_0, y_0)$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, y_n) < \delta, n \geq N$.
Man Wähle $n$ so groß, dass auch $d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{4}$ und $d_Y\big(f(y_n), f(y_0)\big) < \frac{\varepsilon}{4}$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_Y\big(f(x_0), f(y_0)\big) &\leq d_Y\big(f(x_0), f(x_n)\big) + d_Y\big(f(x_n), f(y_n)\big) + \\ &+ d_Y\big(f(y_n), f(y_0)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Korollar 7.2.5** *Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum, $(F, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum, $M \subset E$ ein Untervektorraum und $A : M \to F$ eine beschränkte lineare Abbildung, d.h. $A$ ist linear und es existiert ein $C > 0$ mit*

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E, \; x \in M.$$

*Dann gilt:*

*i) $\overline{M}$ ist ein Untervektorraum von $E$.*

*ii) $A$ ist gleichmäßig stetig.*

*iii) $A$ hat eine eindeutige lineare und stetige Fortsetzung $\hat{A} : \overline{M} \to F$. Es gilt $\|\hat{A}x\|_F \leq C\|x\|_E, \; x \in \overline{M}$.*

**Beweis.**

i) folgt aus 4.1.10 und 2.1.10 i), ii).

ii) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$. Sind $x, y \in M$ mit $d_E(x, y) = \|x - y\|_E < \delta$, so folgt $d_F\big(A(x), A(y)\big) = \big\|A(x) - A(y)\big\|_F = \big\|A(x - y)\big\|_F \leq C\|x - y\|_E < \varepsilon$.

iii) Nach Korollar 7.2.4 besitzt $A$ eine eindeutige stetige Fortsetzung $\hat{A} : \overline{M} \to F$. Es seien $x_0, y_0 \in \overline{M}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Wähle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Dann folgt $\lambda_0 x_n + y_n \to \lambda_0 x_0 + y_0$ und

$$\begin{aligned}
&\hat{A}(\lambda_0 x_0 + y_0) = \hat{A}(\lim_{n\to\infty} \lambda_0 x_n + y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \hat{A}(\lambda_0 x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} A(\lambda_0 x_n + y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lambda_0 A(x_n) + A(y_n) \\
&= \lambda_0 \lim_{n\to\infty} A(x_n) + \lim_{n\to\infty} A(y_n) \\
&= \lambda_0 \lim_{n\to\infty} \hat{A}(x_n) + \lim_{n\to\infty} \hat{A}(y_n) = \lambda_0 \hat{A}(x_0) + \hat{A}(y_0).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\big\|\hat{A}(x_0)\big\|_F = \lim_{n\to\infty} \big\|A(x_n)\big\|_F \leq \lim_{n\to\infty} C\|x_n\|_E = C\|x_0\|_E,$$

da $\hat{A}$, $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ stetig sind.

□

**Bemerkung 7.2.6** Eine lineare Abbildung $A : E \to F$ zwischen normierten Räumen ist genau dann stetig (stetig in 0), wenn sie beschränkt ist, siehe Übungen. Weiter ist für eine summierbare Familie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in $E$ mit der Summe $x_0$ die Familie $(A(x_\iota))_{\iota \in I}$ summierbar mit der Summe $A(x_0)$, wie man leicht sieht.

# Kapitel 8

# Das Integral

## 8.1 Treppenfunktionen

Die Länge $\ell(I)$ eines Intervalles $I \subset \mathbb{R}$ mit den Intervallgrenzen $a \leq b$ sei $b - a$.

**Satz 8.1.1** *(Additivität der Intervalllänge)*
*Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $I_1, \ldots, I_n$ eine Zerlegung von $I$ durch Intervalle. Dann gilt*

$$\ell(I) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu).$$

**Beweis.** Nach eventueller Umordnung der $I_\nu$ können wir annehmen, dass die linken Grenzen $a_\nu$ der $I_\nu$ aufsteigend sind, d.h. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Sind die rechten Intervallgrenzen der $I_\nu$ mit $b_\nu$ bezeichnet, so gilt $b_\nu = a_{\nu+1}, 1 \leq \nu \leq n-1$.
Es folgt

$$\ell(I) = b_n - a_1 = (b_n - a_n) + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu+1} - a_\nu \underset{\substack{\uparrow \\ a_{\nu+1}=b_\nu}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu - a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu).$$

$\square$

**Definition 8.1.2** Es sei $E$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to E$ heißt Treppenfunktion (mit Werten in $E$), falls $c_1, \ldots, c_n \in E$ und beschränkte Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ existieren mit $f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu}(x) \cdot c_\nu, x \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Treppenfunktionen wird mit $\mathscr{T}(E)$ bezeichnet.

**Bemerkung 8.1.3** i) Offensichtlich ist $\mathscr{T}(E)$ ein Vektorraum, da die Summen bzw. skalaren Vielfache von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktionen sind.

ii) Ist $E$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}, f \in \mathscr{T}(E)$ und $g \in \mathscr{T}(\mathbb{K})$, so ist $g \cdot f \in \mathscr{T}(E)$, wenn man $(g \cdot f)(x) := g(x) \cdot f(x), x \in \mathbb{R}$, setzt. Insbesondere ist $g \cdot f \in \mathscr{T}(\mathbb{K})$ für $f, g \in \mathscr{T}(\mathbb{K})$.

iii) Die Darstellung $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$ ist nicht eindeutig, z. B. ist

$$\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} + \chi_{(\frac{1}{2},1]}.$$

Wir wollen nun das Integral $\int f(x)dx$ einer Treppenfunktion $f$ erklären und hätten gerne zwei Dinge erfüllt.

i) $\int \chi_I(x) c dx = \ell(I)c$ für jedes Intervall $I$ und alle $c \in E$.
Dies bedeutet im Falle $E = \mathbb{R}$ und $c \geq 0$ anschaulich, dass das Integral die Fläche zwischen dem Graphen von $\chi_I a$ und der $x$-Achse angibt.

ii) Das Integral soll linear sein, d.h. $\int \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int f(x)dx + \int g(x)dx$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathscr{T}(E)$.

Wir wollen nun für $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu \in \mathscr{T}(E)$ setzen: $\int f(x)dx := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu$.
(Soll das Integral i) und ii) erfüllen, so muss die Definition so gewählt werden:

$$\int \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu}(x) c_\nu dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ii)}}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \int c_\nu \chi_{I_\nu}(x) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i)}}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu.)$$

Dazu müssen wir aber unbedingt noch nachweisen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Darstellung von $f$ ist, wir zeigen also

**Lemma 8.1.4** *Es sei* $f = \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu = \sum_{k=1}^{m} \chi_{J_k} d_k$ *eine Treppenfunktion. Dann gilt* $\sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu = \sum_{k=1}^{m} \ell(J_k) d_k$.

*Weiter existiert eine Darstellung* $f = \sum_{\mu=1}^{t} \chi_{H_\mu} \alpha_\mu$, *wobei die* $H_\mu$ *paarweise disjunkte Intervalle sind.*

**Beweis.** Es sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$, wobei $\{x_0, \ldots, x_r\}$ die Menge aller Randpunkte der Intervalle $I_\nu$ und $J_k, 1 \leq \nu \leq n, 1 \leq k \leq m$ sind. Es sei $\mathscr{H} := \{(x_{k-1}, x_k) : 1 \leq k \leq p\} \cup \{x_k : 0 \leq k \leq p\}$. $\mathscr{H}$ ist eine Zerlegung von $[x_0, x_p]$ in Intervalle und $\{S : S \in \mathscr{H}, S \subset I_\nu\}$ ist eine Zerlegung von $I_\nu, 1 \leq \nu \leq n$, und $\{S : S \in \mathscr{H}, S \subset J_k\}$ ist eine Zerlegung von $J_k, 1 \leq k \leq m$, in Intervalle.
Setze für $S \in \mathscr{H}$:

$$\alpha_S := \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n \\ S \subset I_\nu}} c_\nu.$$

Dann gilt $f(x) := \alpha_S, x \in S$, und $f = \sum_{S \in \mathscr{H}} \chi_S \alpha_S$.
Aus Satz 8.1.1 erhalten wir (angewendet auf $I_\nu$)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu &= \sum_{\nu=1}^{n} \Big( \sum_{S \subset I_\nu} \ell(S) \Big) c_\nu \\ &= \sum_{S \in \mathscr{H}} \ell(S) \Big( \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n \\ S \subset I_\nu}} c_\nu \Big) \\ &= \sum_{S \in \mathscr{H}} \ell(S) \alpha_S. \end{aligned}$$

Analog zeigt man: $\sum_{k=1}^{m} \ell(J_k) d_k = \sum_{S \in \mathscr{H}} \ell(S) \alpha_S$.
Da $\mathscr{H}$ aus disjunkten Intervallen besteht, liefert $f = \sum_{S \in \mathscr{H}} \chi_S \alpha_S$ die gewünschte Darstellung. □

Wir dürfen nun setzen

**Definition 8.1.5** Es sei $E$ ein Vektorraum und $f = \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu \in \mathscr{T}(E)$ eine Treppenfunktion. Dann heißt

$$\int f(x) dx := \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu \in E$$

das Integral von $f$. Ist $a \leq b$, so sei

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &:= \int \chi_{[a,b]}(x)f(x)dx \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,b]\big)c_\nu\end{aligned}$$

das Integral von $a$ bis $b$ von $f$.
Ist $a \geq b$, so sei

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

**Bemerkung/Bezeichnung 8.1.6** Es sei $E$ ein Vektorraum und $a \leq b$.

i) Wir schreiben der Kürze halber (und um den Abbildungscharakter zu betonen) oft

$$S(f) := \int f(x)dx \quad \text{und} \quad S_{a,b}(f) := \int_a^b f(x)dx.$$

ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $c \in E$, so gilt

$$\begin{aligned}S(\chi_I c) &= \int \chi_I(x)cdx = \ell(I)c \text{ sowie} \\ S_{a,b}(\chi_I c) &= \int \chi_{I\cap[a,b]}(x)cdx = \ell\big(I \cap [a,b]\big)c.\end{aligned}$$

iii) $S$ und $S_{a,b}$ sind linear. Wir zeigen dies für $S$; der Beweis für $S_{a,b}$ geht analog, man muss nur immer "$\cap[a,b]$" mitschleppen.

α) Seien also $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$ und $g = \sum\limits_{\nu=n+1}^{m} \chi_{I_\nu} c_\nu$ Treppenfunktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned}S(f+g) &= S\big(\sum_{\nu=1}^{m} \chi_{I_\nu} c_\nu\big) = \sum_{\nu=1}^{m} \ell(I_\nu)c_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} l(I_\nu)c_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{m} \ell(I_\nu)c_\nu = S(f) + S(g).\end{aligned}$$

$\beta$) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\begin{aligned} S(\lambda f) &= S\Big(\lambda \sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu\Big) = S\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} \lambda c_\nu\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu)\lambda c_\nu \\ &= \lambda \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu = \lambda S(f). \end{aligned}$$

iv) Ist $A : E \to F$ $\mathbb{R}$-linear und $f \in \mathscr{T}(E)$, so ist $A \circ f \in \mathscr{T}(F)$, und es gilt

$$S(A \circ f) = A\big(S(f)\big) \text{ sowie } S_{a,b}(A \circ f) = A\big(S_{a,b}(f)\big).$$

In der Tat, für $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$ gilt

$$\begin{aligned} S(A \circ f) &= S\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} A(c_\nu)\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) A(c_\nu) \\ &= A\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu\Big) = A\big(S(f)\big). \end{aligned}$$

Analog für $S_{a,b}$.

v) Aus iv) folgt für $f \in \mathscr{T}(\mathbb{C})$:

$$S\big(\mathrm{Re}(f)\big) = \mathrm{Re}\big(S(f)\big) \text{ und } S_{a,b}\big(\mathrm{Re}(f)\big) = \mathrm{Re}\big(S_{a,b}(f)\big).$$

vi) Ist $f \in \mathscr{T}(\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ (d. h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), so gilt $S(f), S_{a,b}(f) \geq 0$.
In der Tat, ist $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$ mit disjunkten Intervallen $I_\nu$, so gilt $c_\nu \geq 0, 1 \leq \nu \leq n$.
Also folgt

$$S(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell(I_\nu) c_\nu \geq 0.$$

Sind $f, g \in \mathscr{T}(\mathbb{R})$ mit $f \geq g$ (d. h. $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), so gilt $S(f) \geq S(g)$ und $S_{a,b}(f) \geq S_{a,b}(g)$.
In der Tat, setze $h := f - g \geq 0$. Es folgt dann aus der Linearität und Obigem

$$S(f) - S(g) = S(f - g) = S(h) \geq 0.$$

Analog für $S_{a,b}$.

vii) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $f \in \mathscr{T}(E)$, so gilt mit $\|f\|_E : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|_E$:

$$\begin{aligned} \|S_{a,b}(f)\|_E &\le S_{a,b}\big(\|f\|_E\big) \\ &\le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E. \end{aligned}$$

Insbesondere für $E = K$:

$$\big|S_{a,b}(f)\big| \le S_{a,b}\big(|f|\big) \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|.$$

Es sei dazu $f = f\chi_{[a,b]} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$ mit paarweise disjunkten Intervallen $I_\nu$. Dann gilt

$$\big\|S_{a,b}(f)\big\|_E = \Big\|\sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,b]\big) c_\nu\Big\|_E$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,b]\big) \|c_\nu\|_E \big( = S_{a,b}\big(\|f\|_E\big)\big)$$

$$\le \sup_{1\le k\le n} \|c_k\|_E \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,b]\big)$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} \big\|f(x)\big\|_E \cdot \ell\big([a,b]\big).$$

viii) Ist $f \in \mathscr{T}(E)$ und $a \le b \le c$, so gilt

$$S_{a,c}(f) = S_{a,b}(f) + S_{b,c}(f).$$

Sei dazu $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \chi_{I_\nu} c_\nu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_{a,c}(f) &= \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,c]\big) c_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [a,b]\big) c_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \ell\big(I_\nu \cap [b,c]\big) c_\nu \\ &= S_{a,b}(f) + S_{b,c}(f). \end{aligned}$$

ix) Die Formel viii) gilt auch ohne die Einschränkung “$a \le b \le c$”, siehe Übungen.

## 8.2 Regelfunktionen

Wir wollen das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ für so genannte Regelfunktionen $f$ definieren.

**Definition 8.2.1** Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum, so heißt $f : [a,b] \to E$ Regelfunktion, regelintegrierbar oder einfach integrierbar, falls es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $f_n \in \mathscr{T}(E)$ gibt, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Die Menge der Regelfunktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{R}\big([a,b],E\big)$.

**Bemerkung 8.2.2** i) Eine Abbildung $f : [a,b] \to E$ ist also genau dann eine Regelfunktion, wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{T}(E)$ existiert, so dass

$$\sup_{x\in[a,b]} \|f(x)f_n(x)\|_E \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

ii) Ist $B\big([a,b],E\big) = \big\{f : [a,b] \to E : f \text{ beschränkt}\big\}$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, welche durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E$ definiert ist und

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}(\big([a,b],E\big) = \big\{f|_{[a,b]} : f\in\mathscr{T}(E)\big\}\\ &= \Big\{g : [a,b]\to E : x\mapsto \begin{cases} f(x) : x\in[a,b] \\ 0 \text{ sonst}\end{cases} \text{ ist Regelfunktion}\Big\},\end{aligned}$$

dann ist $\mathscr{R}\big([a,b],E\big) = \overline{\mathscr{T}\big([a,b],E\big)}^{B([a,b],E)}$.
Dies folgt sofort aus 4.1.10, angewendet auf $(X,d) = \big(B([a,b],E), d_{\|\cdot\|_\infty}\big)$ und $A = \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$.
Es gilt

**Satz 8.2.3** *Es seien $a \le b$ und $E$ ein vollständiger normierter Raum. Dann gilt*

*i) $\mathscr{R}\big([a,b],E\big)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $B\big([a,b],E\big)$ und somit selbst ein vollständiger normierter Raum.*

*ii) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to E$ ist eine Regelfunktion (d. h. $C\big([a,b],E\big) \subset R\big([a,b],E\big)$).*

*iii) Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

**Beweis.**

i) folgt aus 7.2.5 i).

ii) Ist $f : [a, b] \to E$ stetig, so ist $f$ aufgrund der Kompaktheit von $[a, b]$ nach 6.1.15 schon gleichmäßig stetig. Also gilt

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{s,t \in [a,b] \\ |s-t| < \delta}}{\forall} \big\|f(s) - f(t)\big\|_E < \varepsilon.$$

Um zu zeigen, dass $f \in \overline{\mathscr{T}([a, b], E)}$ gilt, gilt es für $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathscr{T}(E)$ mit $\sup\limits_{x \in [a,b]} \|f(x) - g(x)\|_E < \varepsilon$ zu konstruieren. Wähle zu $\varepsilon > 0$ gemäß der gleichmäßigen Stetigkeit ein $\delta > 0$ und wähle $n < \frac{b-a}{\delta}$. Setze $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, 0 \leq k \leq n$. Dann gilt $\big|f(x) - f(x_k)\big| < \varepsilon$ für $|x - x_k| < \frac{b-a}{n} < \delta, 0 \leq k \leq n$.
Ist $I_k := \big[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n}\big), 1 \leq k \leq n$, und $I_{n+1} := \{x_n\} = \{b\}$, so folgt also

$$\big|f(x) - f(x_{k-1})\big| < \varepsilon \text{ für } x \in I_k, 1 \leq k \leq n + 1.$$

Wir setzen $g := \sum\limits_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1})\chi_{I_k} \in \mathscr{T}(E)$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in [a,b]} \big\|f(x) - g(x)\big\|_E \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \Big\| \sum_{k=1}^{n+1} \big(f(x) - f(x_{k-1})\big)\chi_{I_k}(x)\Big\|_E \\
&\leq \sup_{1 \leq k \leq n+1} \sup_{x \in I_k} \big\|f(x) - f(x_{k-1})\big\|_E < \varepsilon.
\end{aligned}$$

iii) Ohne Einschränkung sei $f$ monoton wachsend (sonst betrachte $-f$). Wir zeigen wieder: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $g \in \mathscr{T}(E)$ mit $\sup\limits_{x \in [a,b]} \big|f(x) - g(x)\big| < \varepsilon$. Es sei $s_0 = f(a), t_0 = f(b)$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{t_0 - s_0}{\varepsilon}$ und setze

$$I_k = \Big\{x \in [a, b] : f(x) \in \Big[s_0 + \frac{(k-1)(t_0 - s_0)}{n},\ s_0 + \frac{k(t_0 - s_0)}{n}\Big)\Big\},\ 1 \leq k \leq n,$$

$$I_{n+1} := \big\{x \in [a, b] : f(x) = t_0\big\}.$$

Dann sind die $I_k$'s aufgrund der Monotonie von $f$ allesamt Intervalle (oder leer), und sie bilden eine Zerlegung von $[a,b]$.
Setze $g := \sum\limits_{k=1}^{n+1} \big(s_0 + \frac{(k-1)(t_0-s_0)}{n}\big)\, \chi_{I_k} \in \mathscr{T}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[a,b]} \big|f(x) - g(x)\big| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \Big|\sum_{k=1}^{n+1} \Big(\big(s_0 + \frac{(k-1)(t_0-s_0)}{n}\big) - f(x)\Big)\Big| \chi_{I_k}(x) \\
&\le \sup_{1\le k\le n}\, \sup_{x\in I_k} \Big|s_0 + \frac{(k-1)(t_0-s_0)}{n} - f(x)\Big| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 8.2.4** Die in den Beweisen von ii) und iii) konstruierten $g_n := g$ (zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$) liefern jeweils konkrete Approximationen von $f \in C\big([a,b], E\big)$ bzw. für monotones $f$. Für die Folge $(g_n)_n$ gilt jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \big\|f(x) - g_n(x)\big\|_E = 0.$$

## 8.3 Das Regelintegral

Es sei wieder $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und

$$S_{a,b} : \mathscr{T}\big([a,b], E\big) \to E,\ f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Wir betrachten hier $\mathscr{T}\big([a,b], E\big)$ als Untervektorraum des normierten Raumes $\big(B([a,b], E), \|\cdot\|_\infty\big)$, wobei $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E$.
Mit 8.1.6 iii) ist $S_{a,b}$ linear und mit 8.1.6 vii) gilt $\|S_{a,b}(f)\|_E \le (b-a)\|f\|_\infty$. Damit erfüllt $S_{a,b}$ die Voraussetzung von 7.2.5. Wegen

$$\mathscr{R}\big([a,b], E\big) = \overline{\mathscr{T}\big([a,b], E\big)}^{B([a,b],E)}$$

(siehe 8.2.2 ii)) existiert also genau eine stetige Fortsetzung

$$\hat{S}_{a,b} : \big(\mathscr{R}([a,b], E), \|\cdot\|_\infty\big) \to (E, \|\cdot\|_E)$$

von $S_{a,b}$. Diese erfüllt nach 7.2.5 iii) ebenfalls

$$\left\|\hat{S}_{a,b}(f)\right\|_E \leq (b-a)\|f\|_\infty = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E,$$

$f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$.

**Definition 8.3.1** Für $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$ sei

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \hat{S}_{a,b}(f)$$

das Integral von $a$ bis $b$ von $f$. Weiter sei

$$\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx = -\hat{S}_{a,b}(f).$$

Ein $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$ nennen wir integrierbar.

**Bemerkung 8.3.2** i) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{R}([a,b],E)$ und $f : [a,b] \to E$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} \left\|f_n(x) - f(x)\right\|_E \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

so gilt $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$ und

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Dies folgt sofort aus der Vollständigkeit von $\mathscr{R}([a,b],E)$ und der Stetigkeit von $\hat{S}_{a,b}$.

ii) Betrachten wir eine stetige Funktion $f : [a,b] \to [0,\infty)$. Nach Satz 8.2.3 ii) ist $f \in \mathscr{R}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, also existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit

$$(*) \qquad \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - f_n(x)\right| \to 0, \text{ d.h. } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f$. Die Fläche zwischen dem Graphen von $f_n$ und der $x$-Achse ist $\int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Aus i) folgt $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$, und dieser Grenzwert ist unabhängig von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, solange $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur $(*)$ erfüllt. Demzufolge kann man sich unter $\int\limits_a^b f(x)dx$ die "Fläche" zwischen graph$(f)$ und der $x$-Achse vorstellen.

iii) Die Stetigkeit von $\hat{S}_{a,b} : \mathscr{R}\big([a,b],E\big) \to E, f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx$ wird noch andere Konsequenzen haben. Viele Eigenschaften des Integrals $\int\limits_a^b f(x)dx$ für Treppenfunktionen werden "automatisch" auf Regelfunktionen übertragen.

Der Kürze halber treffen wir für den Rest dieses Abschnittes folgende Konvention:
Sind $f_n, f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big), n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ oder $f_n \to f$, falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **gleichmäßig** gegen $f$ konvergiert, d.h. falls $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \big\|f_n(x) - f(x)\big\|_E \to 0, n \to \infty$ gilt.

**Satz 8.3.3** *(Eigenschaften des Integrals)*
*Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $a \le b$. Dann gilt*

*i)*
$$\int\limits_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

*für alle $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$.*

*ii) Es sei $A : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, so dass ein $C > 0$ existiert mit*

$$\|Ax\|_F \le C\|x\|_E,\ x \in E.$$

*Ist $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$, so ist $A \circ f \in \mathscr{R}\big([a,b],F\big)$, und es gilt*

$$\int\limits_a^b A\big(f(x)\big)dx = A\Big(\int\limits_a^b f(x)dx\Big).$$

*Insbesondere gilt für $f \in \mathscr{R}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$, dass*

$$\int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\big)dx = \mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(x)dx\Big) \quad \textit{und}$$

$$\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(x)\big)dx = \mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(x)dx\Big).$$

*iii) Sind $f, g \in \mathscr{R}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ mit $f \geq g$ (d.h. $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$), so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

*iv) Ist $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$, so ist $\|f\|_E : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|_E$, in $\mathscr{R}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, und es gilt*

$$\Big\|\int_a^b f(x)dx\Big\|_E \leq \int_a^b \big\|f(x)\big\|_E dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \big\|f(x)\big\|_E.$$

*Insbesondere gilt also für $f \in \mathscr{R}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, dass*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|.$$

*v) Ist $a \leq b \leq c, f \in \mathscr{R}\big([a,c],E\big)$, so gilt*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

*vi) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und ist $f \in \mathscr{R}\big([\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}],E\big)$, so gilt*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

**Beweis.**

i) ist die Linearität von $\hat{S}_{a,b}$.

ii) Es sei $f \in \mathscr{R}\big([a,b],E\big)$. Wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{T}\big([a,b],E\big)$, welche gleichmäßig gegen $f$ konvergiert (nach unserer Konvention für diesen Abschnitt also $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ gilt). Da $A$ nach 7.2.5 gleichmäßig stetig ist, konvergiert mit 6.2.9 $(A \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $A \circ f$. Da alle $A \circ f_n \in \mathscr{T}\big([a,b],F\big), n \in \mathbb{N}$, folgt $A \circ f \in \mathscr{R}\big([a,b],F\big)$.
Es folgt weiter mit 8.1.6 iv)

$$\begin{aligned}
\int_a^b A\big(f(x)\big)dx &= \int_a^b (A\circ f)(x)dx = \int_a^b \big(\lim_{n\to\infty}(A\circ f_n)\big)(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (A\circ f_n)(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} A\big(\int_a^b f_n(x)dx\big) \\
&= A\big(\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\big) \\
&= A\big(\int_a^b f(x)dx\big).
\end{aligned}$$

iii) Aufgrund der Linearität des Integrals können wir ohne Einschränkung $g \equiv 0$ annehmen. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{T}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ (d. h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f$).
Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so das $f_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \geq \int_a^b \varepsilon dx \\
&= (b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\int_a^b f(x)dx \geq 0 = \int_a^b g(x)dx$.

iv) Es sei wieder $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{T}\big([a,b],E\big)$ mit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Aus 6.2.10 ii) folgt, dass $\big(\|f_n\|_E\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\|\cdot\|_E \circ f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\|\cdot\|_E \circ f = \|f\|_E$ konvergiert. Da $\|f_n\|_E \in \mathscr{T}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, folgt $\|f\|_E \in$

$R\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Es folgt aus 8.1.6 vii) und der Stetigkeit von $\|\cdot\|_E$, dass

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_a^b f(x)dx\Big\|_E &= \big\|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\big\|_E = \lim_{n\to\infty}\big\|\int_a^b f_n(x)dx\big\|_E \\
&\le \lim_{n\to\infty}\int_a^b \big\|f_n(x)\big\|_E dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \big\|f_n\big\|_E(x)dx \\
&= \int_a^b \big(\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_E\big)(x)dx = \int_a^b \|f\|_E(x)dx \\
&= \int_a^b \big\|f(x)\big\|_E dx.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_a^b \|f_n\|_E(x)dx &\le \lim_{n\to\infty}(b-a)\sup_{x\in[a,b]}\big\|f_n(x)\big\|_E \\
&= (b-a)\sup_{x\in[a,b]}\big\|f(x)\big\|_E.
\end{aligned}$$

v) Es sei wieder $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{T}\big([a,b],E\big)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Es folgt mit 8.1.6 viii), dass

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^c f_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_b^c f(x)dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.
\end{aligned}$$

vi) (in den Übungen).

□

**Beispiel 8.3.4** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. In der Tat, sei

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\Big)\chi_{[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}, a+\frac{k(b-a)}{n}}(x) + b\chi_{\{b\}}$$

(siehe den Beweis von 8.2.3 und 8.2.4).
Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ und somit

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b xdx &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \Big(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\Big)\Big(\frac{(b-a)}{n}\Big) \\ &= na\ \frac{(b-a)}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k \\ &= a(b-a) + (b-a)^2\ \frac{n(n-1)}{2n^2} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= ab - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Es folgt aus der Linearität

$$\int\limits_a^b \lambda + \mu x dx = \lambda(b-a) + \mu\Big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\Big).$$

Die Berechnung der Integrale

$$\int\limits_a^b x^k dx$$

mit obiger Methode ist zwar möglich, aber mit ziemlicher Rechnerei verbunden. Wir werden diese später mit Hilfe anderer Methoden auf einfache Weise berechnen können.

Ist $[a,b]$ ein Intervall, so sei (siehe 1.1.25) iii) $\Delta := \big\{(x,x) := x \in [a,b]\big\}$.

**Satz 8.3.5** *Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und $f \in \mathscr{R}\big([a,b], E\big)$. Setzt man für ein festes $y_0 \in [a,b]$*

$$F : [a,b] \to E,\ F(x) := \int\limits_{y_0}^{x} f(x)dx, \textit{ und}$$
$$G : [a,b]^2 \backslash \Delta \to E,\ G(x_1,x_2) := \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2},$$

*so gilt*

*i) $F$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.*

*ii) Ist $f$ stetig an $x_0$. so gilt*

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_0,x_0)} G(x_1,x_2) = f(x_0).$$

**Beweis.**

i) Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E + 1}$. Dann gilt mit 8.3.3 iv), vi)

$$\big\|F(x_1) - F(x_2)\big\|_E = \Big\| \int\limits_{y_0}^{x_1} f(x)dx - \int\limits_{y_0}^{x_2} f(x)dx \Big\|_E$$
$$\Big\| \int\limits_{x_2}^{x_1} f(x)dx \Big\|_E \le |x_1 - x_2| \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_E$$
$$< \varepsilon \text{ für alle } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta.$$

ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit $\big\|f(t) - f(x_0)\big\|_E < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$ mit $|t - x_0| < \delta$. Ist nun $(x_1,x_2) \in [a,b]^2 \backslash \Delta$ mit $\sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |x_2 - x_0|^2} = \big|(x_1,x_2) - (x_0,x_0)\big| < \delta$, so folgt (ohne Einschränkung sei $x_1 > x_2$) mit

8.3.3

$$\begin{aligned}
&\left\|G(x_1,x_2)-f(x_0)\right\|_E = \\
&= \left\|\frac{1}{x_1-x_2}\big(F(x_1)-F(x_2)\big)-f(x_0)\right\|_E \\
&= \left\|\frac{1}{x_1-x_2}\int\limits_{x_2}^{x_1} f(t)dt - f(x_0)\right\|_E \\
&= \left\|\frac{1}{x_2-x_2}\int\limits_{x_2}^{x_1} f(t)-f(x_0)dt\right\|_E \\
&\le \frac{1}{|x_1-x_2|}\int\limits_{x_2}^{x_1} \left\|f(t)-f(x_0)\right\|_E dt \\
&\le \frac{1}{|x_1-x_2|}\int\limits_{x_2}^{x_1} \varepsilon dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Satz 8.3.6** *(Mittelwertsatz der Integralrechnung) Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\varphi\in\mathscr{R}([a,b],\mathbb{R})$ mit $\varphi\ge 0$. Dann existiert ein $x_0\in[a,b]$ mit*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(x_0)\int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

*Ist speziell $\varphi\equiv 1$, so existiert ein $x_0\in[a,b]$ mit*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

**Beweis.** Es sei $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann gilt $m\varphi \le f\varphi \le M\varphi$ und somit folgt aus der Monotonie und der Linearität des

Integrals

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Wähle nun $y_0 \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = y_0\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $y_0 = f(x_0)$. $\square$

# Kapitel 9

# Die Ableitung

## 9.1 Definition der Ableitung

Betrachten wir einen fahrenden Wagen, und bezeichnen wir mit $f(x)$ die zum Zeitpunkt $x$ von diesem Wagen zurück gelegte Strecke in km. Dann ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die Länge der Strecke (in Kilometer), dividiert durch die Zeit (in Stunden), welche dafür benötigt wurde. Die Geschwindigkeit des Wagens zum Zeitpunkt $x_0$ ist dann durch $v := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) definiert, falls dieser Grenzwert existiert. Fährt der Wagen immer mit der Geschwindigkeit $v$, so legt er in einer Stunde $v$ km zurück.
Die Existenz von $v = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist äquivalent zu

$$\big|f(x) - \big(f(x_0) + v(x - x_0)\big)\big| \frac{1}{|x - x_0|} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

$f$ kann also in der Nähe von $x_0$ durch die affin lineare Funktion $x \mapsto f(x_0) + v(x - x_0)$ angenähert werden, so dass der Fehler sogar kleiner als $|x - x_0|$ ist.

Kommen wir nun zur präzisen Definition der Ableitung.

**Definition 9.1.1** Es sei $A \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge, so dass jeder Punkt von $A$ ein Häufungspunkt von $A$ ist.
Weiter sei $(E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (über $\mathbb{K}$) und $f : A \to E$ eine Abbildung.
$f$ heißt differenzierbar an $x_0 \in A$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt dann Ableitung von $f$ an $x_0$.
Existiert die Ableitung für alle $x_0 \in A$, so heißt $f$ differenzierbar (auf $A$) und $f' : A \to E, x \mapsto f'(x)$ heißt dann die Ableitung von $f$.
Ist $f'$ zusätzlich stetig auf $A$, so heißt $f$ stetig differenzierbar (auf $A$).

**Bemerkung 9.1.2** i) Anstelle $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)$ schreiben wir auch laxer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

ii) Ist $g : A \times A \backslash \Delta \to E, g(x_1, x_2) := \frac{1}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big)$, wobei $\Delta = \big\{(x,x) : x \in A\big\}$ und existiert sogar $\lim\limits_{(x_1,x_2) \to (x_0,x_0)} g(x_1, x_2)$, so ist $f$ differenzierbar an $x_0$ (wähle $x_2 = x_0$ fest).

iii) Ist $x_0 \in B \subset A$, so dass $x_0$ auch Häufungspunkt von $B$ ist und ist $f : A \to E$ differenzierbar an $x_0$, so ist auch $f|_B$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt $(f|_B)'(x_0) = f'(x_0)$.

**Beispiel 9.1.3** i) Es sei $E, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum und $y_0 \in E$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to E, f(x) := y_0$, differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$, und es gilt $f'(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Dies folgt aus $\frac{1}{z-z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big) = 0$.
Insbesondere ist für $y_0 \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = y_0$, differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

ii) $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathrm{id}(z) = z$, ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$, und es gilt $\mathrm{id}'(z_0) = 1, z_0 \in \mathbb{C}$. Dies folgt aus $\frac{\mathrm{id}(z)-\mathrm{id}(z_0)}{z-z_0} = 1, z \in \mathbb{C}$.
Insbesondere ist $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}(x) = x$, differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 1, x_0 \in \mathbb{R}$.

iii) Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C}^*$, und es gilt $f'(z_0) = -\frac{1}{z_0^2}, z_0 \in \mathbb{C}^*$.
Dies folgt aus $\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \frac{\frac{z_0 - z}{z z_0}}{z - z_0} = -\frac{1}{z z_0}$ und $\lim\limits_{z \to z_0} -\frac{1}{z z_0} = -\frac{1}{z_0} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z_0}\frac{1}{z_0}$.

iv) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$, und es gilt $\exp' = \exp$ (d.h. $\exp'(z) = \exp(z), z \in \mathbb{C}$).
Dann sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$. Dann

folgt aus der Stetigkeit der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!}(z-z_0)^\nu$, auf $\mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\exp(z_n)-\exp(z_0)}{z_n-z_0}-\exp(z_0)\Big| \\
&\quad = \big|\exp(z_0)\big|\Big|\frac{\exp(z_n-z_0)-1}{z_n-z_0}-1\Big| \\
&\quad = \big|\exp(z_0)\big|\Big|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(z_n-z_0)^{\nu-1}-1\Big| \\
&\quad = \big|\exp(z_0)\big|\Big|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)!}\,(z_n-z_0)^{\nu}\Big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

v) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$.
Dann ist $f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^*$, und es gilt

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & : \ x>0 \\ -1 & : \ x<0 \end{cases}.$$

$f$ ist an 0 **nicht** differenzierbar, denn

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\neq -1=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Dies zeigt, dass stetige Funktionen nicht differenzierbar sein müssen.
Umgekehrt gilt jedoch

**Satz 9.1.4** *Ist $f:A\to E$ differenzierbar an $x_0$, so ist $f$ stetig an $x_0$.*

**Beweis.** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A\backslash\{x_0\}$ mit $x_n\to x_0$. Dann gilt $\frac{1}{x_n-x_0}\big(f(x_n)-f(x_0)\big)\to f'(x_0)$, und hieraus folgt

$$\big\|f(x_n)-f(x_0)\big\|_E\frac{1}{|x_n-x_0|}\to\big\|f'(x_0)\big\|_E.$$

Da jede konvergente Folge beschränkt ist, existiert also $C\geq 1$ mit $\frac{\|f(x_n)-f(x_0)\|_E}{|x_n-x_0|}\leq C$, also $\big\|f(x_n)-f(x_0)\big\|_E\leq C|x_n-x_0|\to 0$ $(n\to\infty)$.
Damit ist $f$ stetig an $x_0$. □

Eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit durch "affin lineare Approximation" liefert

**Satz 9.1.5** *Es sei $A \subset \mathbb{C}$ und jeder Punkt von $A$ sei Häufungspunkt von $A$. Ist $x_0 \in A$ und $f : A \to (E, \|\cdot\|_E)$ eine Funktion mit Werten in einem vollständig normierten Raum, so ist $f$ an $x_0$ genau dann differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in A\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \big\| f(x) - \big(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)\big)\big\|_E < \varepsilon |x-x_0|.$$

**Beweis.** Es sind äquivalent

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0) - (x-x_0)f'(x_0)\big) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|x-x_0|}\big\| f(x) - \big(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)\big)\big\|_E = 0$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in A \\ 0<|x-x_0|<\delta}}{\forall} \frac{1}{|x-x_0|}\big\| f(x) - \big(f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)\big)\big\|_E < \varepsilon.$$

$\square$

## 9.2 Ableitungsregeln

**Satz 9.2.1** *(Ableitungsregeln). Es sei $A \subset \mathbb{K}$, und jeder Punkt von $A$ sei Häufungspunkt von $A$. Weiter sei $x_0 \in A$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann gilt*

*i) Sind $f, g : A \to E$ differenzierbar an $x_0$ und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist auch $\lambda f + g$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g(x_0).$$

*Die Ableitung ist also linear.*

*ii) Sind $f : A \to \mathbb{K}, g : A \to E$ differenzierbar an $x_0$, so ist auch $f \cdot g$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

*(Produktregel).*

iii) *Sind $f : A \to \mathbb{K}$, $g : A \to E$ differenzierbar an $x_0$ und gilt $f(x) \neq 0, x \in A$, so ist auch $\frac{1}{f}g$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$\Big(\frac{1}{f}g\Big)'(x_0) = \frac{1}{f(x_0)^2}\big(f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)\big)$$

*(Quotientenregel).*
*Ist $E = \mathbb{K}$, so schreibt man dies als*

$$\Big(\frac{g}{f}\Big)'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{f(x_0)^2}$$

*"Zähler Strich mal Nenner minus Nenner Strich mal Zähler dividiert durch Nenner zum Quadrat".*

iv) *Ist $f : A \to \mathbb{K}$ differenzierbar an $x_0$ und $g : f(A) \to E$ differenzierbar an $f(y_0)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big)$$

*(Kettenregel).*
*Ist $E = \mathbb{K}$, so schreibt man dies als*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0).$$

v) *Ist $f : A \to E$ differenzierbar an $x_0$ und $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ $\mathbb{C}$-linear, so dass ein $C \geq 1$ existiert mit $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, x \in E$, so ist $T \circ f$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$(T \circ f)'(x_0) = T\big(f'(x_0)\big).$$

*Ist $A \subset \mathbb{R}$, so benötigt man anstelle der $\mathbb{C}$-Linearität nur, dass $T$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.*

**Beweis.**

i) folgt aus

$$\frac{1}{x - x_0}\big((\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x_0)\big)$$

$$= \lambda\Big(\frac{1}{x - x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)\Big) + \frac{1}{x - x_0}\big(g(x) - g(x_0)\big)$$

$$\to \lambda f'(x_0) + g'(x_0) \ (x \to x_0).$$

ii) folgt aus

$$\frac{1}{x-x_0}\big((fg)(x)-(fg)(x_0)\big) = \Big(\frac{1}{x-x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)\Big)g(x)$$

$$+f(x_0)\Big(\frac{1}{x-x_0}\big(g(x)-g(x_0)\big)\Big) \to f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\ (x\to x_0).$$

iii) Es sei $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ h(z) = \frac{1}{z}$.
Dann gilt $h'(z) = \frac{-1}{z^2}$, und es folgt mit der Kettenregel, dass $\frac{1}{f}$ an $x_0$ differenzierbar ist und

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{f}\Big)'(x_0) &= (h\circ f)'(x_0) = h'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\\ &= -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}\end{aligned}$$

gilt. Also liefert die Produktregel

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{f}g\Big)'(x_0) &= \Big(\frac{1}{f}\Big)'(x_0)g(x_0) + \frac{1}{f}\,(x_0)g'(x_0)\\ &= -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}\,g(x_0) + \frac{f(x_0)}{f(x_0)^2}\,g'(x_0).\end{aligned}$$

iv) Es sei $h : f(A) \to E$,

$$h(y) := \begin{cases} \dfrac{1}{y-y_0}\big(g(y)-g(y_0)\big) & : \ y \neq y_0\\ g'(y_0) & : \ y = y_0,\end{cases}$$

mit $y_0 := f(x_0)$. Da $g$ in $y_0$ differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y\to y_0} h(y) = g'(y_0) = h(y_0),$$

und da $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Weiter gilt für alle $y \in f(A)$, dass

$$\begin{aligned} g(y)-g(y_0) &= (y-y_0)h(y),\ \text{also}\\ g(f(x))-g(f(x_0)) &= (f(x)-f(x_0))h(f(x)),\ x\in A.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} h\big(f(x)\big)$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} h\big(f(x)\big) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}.$$

v) folgt aus der Stetigkeit von $T$:

$$\frac{1}{x-x_0}\big(T\circ f(x) - T\circ f(x_0)\big) = \frac{1}{x-x_0}\Big(T\big(f(x)\big) - T\big(f(x_0)\big)\Big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ ist } \mathbb{C}-\text{linear}}}{=} T\Big(\frac{1}{x-x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)\Big) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} T\big(f'(x_0)\big).$$

Ist $A \subset \mathbb{R}$, so sind $\frac{1}{x-x_0} \in \mathbb{R}$, und man benötigt nur die $\mathbb{R}$-Linearität von $T$.

□

**Beispiel 9.2.2** i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = z^n$, dann ist $f_n$ differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$, und es gilt $f_n'(z) = nz^{n-1}$.
Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion.
Der Fall $n = 1$ folgt aus Beispiel 9.1.3 ii)
$n \mapsto n+1$ : Es sei $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_n(z) = z^n$ differenzierbar auf $\mathbb{C}$, und es sei $f_n'(z) = nz^{n-1}, k\ z \in \mathbb{C}$.
Dann folgt mit der Produktregel und dem Fall $n = 1$ wegen $f_{n+1}(z) = f_1(z) \cdot f_n(z)$, dass $f_{n+1}$ differenzierbar ist und

$$f_{n+1}'(z) = f_1'(z) \cdot f_n(z) + f_1(z) \cdot f_n'(z) = 1 \cdot z^n + z \cdot nz^{n-1} = (n+1)z^n.$$

Ist $f_{-n} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f_{-n}(z) = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, so ist $f_{-n}$ differenzierbar auf $\mathbb{C}^*$ und es gilt $f_{-n}'(z) = (-n)z^{(-n)-1} = -\frac{n}{z^{n+1}}$. Dies folgt aus der Quotientenregel und Obigem.
Wir beachten, dass insbesondere für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Formel

$$(z^n)' := f_n'(z) = nz^{n-1}$$

gilt.

ii) Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \exp(w_0 z) = e^{w_0 z}$, so ist wegen 9.1.3 ii), iv) und der Kettenregel $f$ differenzierbar auf $\mathbb{C}$ und es gilt $(e^{w_0 z})' := f'(z) = w_0 \exp(w_0 z) = w_0 e^{w_0 z}$. Insbesondere ist $(e^{iz})' = ie^{iz}$ und $(e^{-iz})' = -ie^{-iz}$.

iii) Wegen $\sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$ und $\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big)$ folgt aus ii) zusammen mit der Linearität der Ableitung: $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind differenzierbar auf $\mathbb{C}$,

$$\sin' z = \frac{1}{2i}\big(ie^{iz} - (-i)e^{iz}\big) = \cos z,$$

und analog

$$\cos' z = -\sin z.$$

iv) (Analog zu iii)) : Wegen $\sinh z = \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big)$ und $\cosh z = \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big)$ sind $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar auf $\mathbb{C}$, und es gilt

$$\sinh' z = \cosh z \text{ und } \cosh' z = \sinh z.$$

v) Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = a^z = \exp(z \log a)$. Dann folgt mit der Kettenregel und ii), dass $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar ist und

$$f'(z) = \log a \exp(z \log a) = (\log a) \cdot a^z.$$

vi) $\tan' z = 1 + \tan^2 z \quad (z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$,
$\cot' z = -(1 + \cot^2 z) \quad (z \notin \pi\mathbb{Z})$, siehe Übungen.

vii) $\tanh' z = 1 - \tanh^2 z \quad (z \notin \frac{i\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z})$,
$\mathrm{cotanh}' z = 1 - \mathrm{cotanh}^2 z \quad (z \notin i\pi\mathbb{Z})$, siehe Übungen.

**Satz 9.2.3** *(Ableitung der Umkehrfunktion)*
*Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ihre Umkehrfunktion (Beachte: $f(I)$ ist wieder ein Intervall nach 4.3.8). Ist $f$ im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Beweis.** Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(I)\setminus\big\{f(x_0)\big\}$ mit $y_n \to f(x_0)$. Da $f^{-1}$ nach Satz 4.3.11 stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$.
Da $f^{-1} : f(I) \to I$ bijektiv, gilt $x_n := f^{-1}(y_n) \neq x_0,\ n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{y_n - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (n \to \infty).$$

□

**Bemerkung 9.2.4** i) Später werden wir auch Versionen dieses Satzes für Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen zeigen.

ii) Unter den Voraussetzungen von 9.2.3 kann man auch schreiben: Ist $y_0 \in f(I)$, so dass $f$ an $f^{-1}(y_0)$ differenzierbar ist, so gilt

$$\Big(f^{-1}\Big)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

**Beispiel 9.2.5** i) $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Also ist mit exp auch log differenzierbar, und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{x},\ x \in (0,\infty)$.
Hier haben wir die Formel in der Form

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)},\ y \in f(I),$$

angewendet.

ii) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen $f(x) = \exp(\alpha \log x)$:

$$f'(x) = \exp(\alpha \log x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

iii) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^x$. Dann gilt wegen $x^x = \exp(x \log x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(x \log x) \cdot (\log x + 1) \\ &= (\log x + 1)x^x. \end{aligned}$$

iv) $\arcsin : [-1,1] \to \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : \big[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big] \to [-1,1]$. Für $x \in (-1,1)$ gilt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos \underbrace{(\arcsin x)}_{=:y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

da $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ und $y \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.

v) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$.
Analog zu iv) zeigt man, dass arccos auf $(-1,1)$ differenzierbar ist und

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

gilt.

**Satz 9.2.6** *(Logarithmisches Differenzieren)*
*Es sei $A \subset \mathbb{R}$, so dass jeder Punkt von $A$ Häufungspunkt ist. Ist $f : A \to \mathbb{R}^*$ differenzierbar in $x_0 \in A$, so ist auch* $\log|f|$ *in $x_0$ differenzierbar, und es gilt*

$$(\log|f|)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

**Beweis.**

1. Es sei $f(x_0) > 0$. Dann finden wir aufgrund der Stetigkeit von $f$ an $x_0$ ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $|x - x_0| < \delta, x \in A$. Auf $A \cap U_\delta(x_0)$ gilt also $f > 0$. Damit folgt aus der Kettenregel nach 9.2.5 i), dass $\log|f| = \log \circ f$ auch an $x_0 \in A \cap U_\delta(x_0)$ differenzierbar und $(\log|f|)'(x_0) = (\log \circ f)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$.
2. Ist $f(x_0) < 0$, so existiert $\delta > 0$ mit $f(x) < 0,\ |x - x_0| < \delta,\ x \in A$, dort gilt also $|f(x)| = -f(x)$. Es folgt analog $(\log|f|)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{-f(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$.

□

**Satz 9.2.7** *Es sei $A \subset \mathbb{K}$ eine Menge, so dass jeder Punkt von $A$ Häufungspunkt ist. Ist $x_0 \in A$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{K}^n,\ f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, so ist $f$ genau dann an $x_0$ differenzierbar, wenn alle $f_\nu$ an $x_0$ differenzierbar sind, $1 \le \nu \le n$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = \big(f_1'(x_0), \ldots, f_n'(x_0)\big)$.*

**Beweis.** Übungen.
Hinweis: Für "⇒" verwende man 9.2.1 v), angewendet auf $T = \pi_\nu : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \pi_\nu(x_1, \ldots, x_n) = x_\nu$, und beachte, dass $f_\nu = \pi_\nu \circ f, 1 \le \nu \le n$. □

**Beispiel 9.2.8** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ mit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = (x^2-1)^5, f_2(x) = \exp(x^2)$. Dann sind $f_1, f_2$ differenzierbar, und mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 5(x^2-1)^4 2x = 10x(x^2-1)^4 \quad \text{und} \\ f_2'(x) &= \exp(x^2)2x = 2x\exp(x). \end{aligned}$$

Also ist $f$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \big(10x(x^2-1)^4, 2x\exp(x^2)\big).$$

## 9.3 Extremstellen und der Mittelwertsatz

**Definition 9.3.1** Es sei $(X, d_X)$ ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Man sagt

i) $f$ hat an $x_0 \in X$ ein globales Maximum, falls $f(x_0) = \max\limits_{x\in X} f(x)$,

ii) $f$ hat an $x_0 \in X$ ein globales Minimum, falls $f(x_0) = \min\limits_{x\in X} f(x)$,

iii) $f$ hat an $x_0 \in X$ ein lokales Maximum, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x_0) = \max_{x\in U_\delta(x_0)} f(x),$$

iv) $f$ hat an $x_0 \in X$ ein lokales Minimum, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x_0) = \min_{x\in U_\delta(x_0)} f(x).$$

Stellen $x_0 \in X$, an denen lokale Maxima oder Minima existieren, heißen Extremstellen.

**Bemerkung 9.3.2** Ist $(X, d_X)$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so besagt Satz 6.1.13 gerade, dass $x^*, x_* \in X$ existieren mit $f(x^*) = \max\limits_{x\in X} f(x)$ und $f(x_*) = \min\limits_{x\in X} f(x)$.

**Satz 9.3.3** *Es seien $M \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$ sei eine in $x_0$ differenzierbare Funktion. Ist $x_0$ eine Extremstelle von $f$ (d.h. liegt an $x_0$ ein lokales Maximum oder Minimum vor), so gilt $f'(x_0) = 0$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung liege an $x_0$ ein lokales Maximum vor (ansonsten betrachte $-f$ anstelle von $f$).
Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für $|x - x_0| \leq \delta, x \in M$. Da $M$ offen ist, können wir annehmen, dass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset M$ gilt.
Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x_0 - \frac{\delta}{n}) - f(x_0)}{-\frac{\delta}{n}}}_{\geq 0} = f'(x_0) \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{n}\right) - f(x_0)}{\frac{\delta}{n}} \leq 0. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 9.3.4** i) Anstelle der Offenheit von $M$ reicht es, $x_0 \in \overline{M \cap (x_0, +\infty)} \cap \overline{M \cap (-\infty, x_0)}$ zu verlangen.

ii) Stellen $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ heißen auch **kritische Punkte**.

iii) Obiger Satz liefert keine hinreichende Bedingung für Extremstellen. So hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$, an 0 die Ableitung 0, aber 0 ist keine Extremstelle!
Aber der Satz liefert

**Korollar 9.3.5** *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f$ auf $(a, b)$ differenzierbar ist.*

*i) Dann existiert $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Gilt für $x_0 \in X$, dass $f(x_0) = \max\limits_{x\in X} f(x)$, so folgt $x_0 \in \{a, b\}$ oder $f'(x_0) = 0$.*

*ii) Dann existiert $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Gilt für $x_0 \in X$, dass $f(x_0) = \min\limits_{x\in X} f(x)$, so folgt $x_0 \in \{a, b\}$ oder $f'(x_0) = 0$.*

*(Um die Stellen zu finden, an denen globale Extrema angenommen werden, braucht man also nur die Randpunkte und die Punkte $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ betrachten.)*

**Beweis.** Die Existenz ist in 6.1.13 gezeigt worden (vgl. Bemerkung 9.3.2). Wir beweisen i), ii) folgt analog oder durch Betrachtung von $-f$ anstelle von $f$.
Ist $x_0 \in (a, b)$ globale Maximalstelle, so ist $x_0$ auch lokale Maximalstelle, also folgt $f'(x_0) = 0$ mit 9.3.3. □

**Satz 9.3.6** *(Mittelwertsätze)*
*Es seien $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche differenzierbar auf $(a, b)$ seien. Dann gilt*

*i) Ist $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ (Satz von Rolle).*

*ii) Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \textit{(Mittelwertsatz).}$$

*iii) Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big).$$

*iv) Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \textit{(allgemeiner Mittelwertsatz).}$$

**Beweis.**

i) Ist $f$ konstant auf $[a, b]$, so wähle z.B. $x_0 = \frac{b-a}{2}$.
Ist $f$ nicht konstant auf $[a, b]$, so gilt

$\alpha$) $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) < f(a) = f(b)$ oder

$\beta$) $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) > f(a) = f(b)$.

Ist $\alpha$) erfüllt, so liefert Korollar 9.3.5 ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ sowie $f'(x_0) = 0$.
Der Fall $\beta$) folgt analog.

iii) Es sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.
$h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$.
Dann ist $h$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $(a, b)$ und $h(a) = h(b)$.
Der Satz von Rolle (Teil i)) liefert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big) = h'(x_0) = 0.$$

iv) Die Anwendung des Satzes von Rolle auf $g$ zeigt $g(b) \neq g(a)$. Also dürfen wir in iii) durch $g'(x_0)$ und durch $g(b) - g(a)$ dividieren und erhalten iv).

ii) Ist iv) angewendet auf $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ g(x) = x$.

$\square$

**Korollar 9.3.7** *Es sei $I$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $f$ auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gilt*

*i) Ist $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, so ist $f$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).*

*ii) Genau dann ist $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, wenn $f$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend) ist.*

**Beweis.**

i) Es sei $f'(x) > 0, x \in \overset{\circ}{I}$.
Sind $x_1 < x_2$ Punkte aus $I$, so existiert mit dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x_1, x_2) \subset \overset{\circ}{I}$ mit $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) > 0$. Also ist $f(x_2) > f(x_1)$.
Ist $f'(x) < 0, x \in \overset{\circ}{I}$, so betrachte $-f$ anstelle von $f$.

ii) Es sei $f'(x) \geq 0, x \in \overset{\circ}{I}$. Wie in i) zeigt man für $x_1, x_2 \in I$, mit $x_1 < x_2$, dass $f(x_2) \geq f(x_1)$.
Ist nun $f$ monoton wachsend, so gilt für $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

Also folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ für alle $x_0 \in I$.
Für den Rest betrachte $-f$ anstelle von $f$.

□

**Beispiel 9.3.8** Die Umkehrung in i) gilt nicht, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$, zeigt.

**Satz 9.3.9** *(Vorzeichenwechselkriterium)*
*Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, und $f$ sei differenzierbar auf $\overset{\circ}{I}$.*
*Dann gilt*

i) *Existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & : \ x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \\ \leq 0 & : \ x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} ,$$

*so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Maximum.*
*(Wechselt $f'$ an $x_0$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$, so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Maximum.)*

ii) *Existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & : \ x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \\ \geq 0 & : \ x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} ,$$

*so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum.*
*(Wechselt $f'$ an $x_0$ das Vorzeichen von $-$ nach $+$, so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum.)*

**Beweis.**

i) Nach 9.3.7 ist $f$ an $I \cap (x_0 - \delta, x_0)$ monoton wachsend und auf $I \cap (x_0, x_0 + \delta)$ monoton fallend.

ii) Beweist man analog oder durch Betrachtung von $-f$ anstelle von $f$.

□

**Beispiel 9.3.10** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{3}{2}\,x^2$.
Dann gilt $f'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$. Damit ist

$$f'(x) \begin{cases} > 0 : & x \in (-\infty, -1) \\ < 0 : & x \in (-1, 0) \\ > 0 : & x \in (0, \infty) \end{cases} ,$$

und somit ist $f$ auf $(-\infty, -1)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend sowie streng monoton fallend auf $(-1, 0)$.
Das Vorzeichenwechselkriterium liefert, dass an $-1$ ein lokales Maximum und an 0 ein lokales Minimum vorliegt.

**Satz 9.3.11** *(Regeln von de l'Hôspital)*
*Es sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, und die Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf $(a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
*Ferner gelte*

*i)* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ *oder*

*ii)* $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$.

*Dann folgt aus $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, dass auch $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.*
*Eine analoge Aussage gilt für $\lim\limits_{x \to b^-}$ anstelle von $\lim\limits_{x \to a^+}$.*

**Beweis.** Wir beweisen nur den Fall i), $a > -\infty$.
Durch $g(a) := f(a) := 0$ setzen wir $f, g$ stetig auf $[a, b)$ fort. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(a, b)$ mit $x_n \to a$. Nach den allgemeinen MWS existiert $\xi_n \in (a, x_n)$ mit

$$\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Es folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

**Beispiel 9.3.12** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} = 0$. In der Tat, sei $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} - 1$, und $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x - 1}$, so sind die Voraussetzungen der Regel von de l'Hôspital erfüllt und es folgt $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 0$.

## 9.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Satz 9.4.1** *Es sei $a < b$ und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum. Ist $f : [a,b] \to (E, \|\cdot\|_E)$ differenzierbar, so gilt*

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|_E \ (b-a).$$

**Beweis.** Es sei $C > \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|_E$ beliebig und

$$M := \big\{x \in [a,b] : \|f(x) - f(a)\|_E \leq C(x-a)\big\}.$$

Da $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) = \|f(x) - f(a)\|_E - C(x-a)$ stetig ist, ist $M = g^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$ abgeschlossen, und somit ist $x_0 := \sup M \in M$.
Wir nehmen an, dass $x_0 < b$ ist. Aufgrund der Definition des Supremums gilt

$$\|f(x) - f(a)\|_E > C(x-a) \ \text{ für alle } x_0 < x \leq b.$$

Andererseits folgt aus

$$\lim_{x\to x_0} \left\|\frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)\right\|_E = \big\|f'(x_0)\big\|_E < C$$

die Existenz von $\delta > 0$ so, dass $\big\|\frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)\big\|_E < C$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$.
Es sei nun $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ $(\neq \emptyset)$. Es folgt

$$\begin{aligned} C(x-a) \quad &< \quad \big\|f(x) - f(a)\big\|_E \leq \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_E + \big\|f(x_0) - f(a)\big\|_E \\ &\leq \quad (x - x_0)\left\|\frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)\right\|_E + C(x_0 - a), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} C(x-x_0) \quad &\leq \quad (x-x_0)\left\|\frac{1}{x-x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big)\right\|_E \\ &< \quad C(x-x_0), \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

Also ist $x_0 = b$, und wegen $x_0 \in M$ ist

$$\big\|f(b) - f(a)\big\|_E \leq C(b-a).$$

□

**Korollar 9.4.2** *Es sei $I$ ein Intervall, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $f : I \to E$ differenzierbar auf $I$ mit $f'(x) = 0, x \in I$. Dann ist $f$ konstant, d.h. es existiert $c \in E$ mit $f(x) = c, x \in I$.*

**Beweis.** Aus obigem Satz folgt $f(b) = f(a)$ für alle $a < b, a, b \in I$. Ist also $x_0 \in I$ fest, gilt somit $f(x) = f(x_0), x \in I$. □

**Definition 9.4.3** Es sei $A \subset \mathbb{K}$, so dass jeder Punkt von $A$ Häufungspunkt von $A$ ist. Ist $f : A \to E$ eine Funktion mit Werten in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$, so heißt eine Funktion $F : A \to E$ Stammfunktion von $f$, falls $F$ auf ganz $A$ differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

**Beispiel 9.4.4** (vergleiche 9.1.3 und 9.2.2) Wegen $\exp' = \exp$ ist exp eine Stammfunktion von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Ist $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_n(z) = z^n, n \in \mathbb{N}_0$, so ist $F_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, F_n(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ eine Stammfunktion von $f_n$.
Ist $f_{-n} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, f_{-n}(z) = z^{-n} = \frac{1}{z^n},\ n \in \mathbb{N},\ \mathbf{n \geq 2}$, so ist $F_{-n} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, F_{-n}(z) = \frac{1}{-n+1} z^{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{z^{n-1}}$ eine Stammfunktion von $f_{-n}$.
Wir werden im vierten Semester zeigen, dass $f_{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f_{-1}(z) = \frac{1}{z}$, keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$ besitzt. Jedoch gilt:
Ist $\alpha \in \mathbb{R},\ f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f_\alpha(x) = x^\alpha$, so ist $F_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & : \ \alpha \neq -1 \\ \log x & : \ \alpha = -1, \end{cases}$$

eine Stammfunktion von $f_\alpha$. Insbesondere ist also log eine Stammfunktion von $f_{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$.
Für weitere Beispiele von Stammfunktionen verwende 9.1.3 und 9.2.2.

Wir wollen nun zeigen, dass Stammfunktionen in gewisser Weise eindeutig sind.

**Satz 9.4.5** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum, $f : I \to E$ eine Funktion und $F : I \to E$ eine Stammfunktion von $f$. Genau dann ist eine Funktion $G : I \to E$ eine Stammfunktion von*

*$f$, wenn ein $c \in E$ existiert mit $G = F + c$ (d.h. $G(x) = F(x) + c, x \in I$). Kennt man also eine Stammfunktion, so kennt man alle anderen, sie entstehen durch Addition beliebiger Konstanten an die eine.*

**Beweis.** Wegen $(F + c)' = F' + 0 = f$ ist $G = F + c$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f$.
Ist $G$ eine Stammfunktion, so gilt $G' = f$, also $(G - F)' = f - f = 0$, und somit existiert nach obigem Korollar ein $c \in E$ mit $G - F = c$, ergo ist $G = F + c$. $\square$

**Definition 9.4.6** Es sei $X$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ heißt Polygonzug, falls es $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ und $x_0, \ldots, x_n \in X$ gibt, so dass

$$\gamma(t) = x_\nu + \frac{t - t_\nu}{t_{\nu+1} - t_\nu}(x_{\nu+1} - x_\nu),\ t \in [t_\nu, t_{\nu+1}],\ 0 \le \nu \le n - 1$$

gilt.
Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt polygonzusammenhängend, falls es für alle $a, b \in U$ einen Polygonzug $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$ gibt. In diesem Fall sagen wir auch, $\gamma$ verbinde $a$ mit $b$.

**Lemma 9.4.7** *Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $U \subset X$ offen. Genau dann ist $U$ zusammenhängend, wenn $U$ polygonzusammenhängend ist.*

**Beweis.** Ist $U$ polygonzusammenhängend, so liefert der Beweis von 4.3.14, dass $U$ zusammenhängend ist (Dazu beachte man, dass jeder Polygonzug stetig ist).
Es sei also $U$ zusammenhängend und $a, b \in U$. Wir setzen $V$ als die Menge aller $x \in U$, für die ein Polygonzug existiert, der $a$ mit $x$ verbindet. Wegen $a \in V$ gilt $V \neq \emptyset$.
$V$ ist offen (in $U$): Es sei $x \in V$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\|_X < \varepsilon\} \subset U$. Es sei $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig. Da $x \in V$ existiert ein Polygonzug $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = x$. Setze $\rho : [\alpha, \beta + 1] \to U$,

$$\rho(t) := \begin{cases} \gamma(t) & : \ t \in [\alpha, \beta] \\ x + (t - \beta)(y - x) & : t \in (\beta, \beta + 1]. \end{cases}$$

Dann verbindet $\rho$ den Punkt $a$ mit dem Punkt $y$, also gilt auch $y \in V$. Es folgt, dass $V$ offen ist.
$V$ ist abgeschlossen in $U$: Es sei $y \in \overline{V}^U$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \subset U$. Dann ist $U_\varepsilon(y) \cap V \neq \emptyset$, also existiert $x \in U_\varepsilon(y) \cap V$. Nun konstruieren wir genau wie im Beweis der Offenheit einen Polygonzug $\rho$ der $a$ mit $y$ verbindet. Damit ist $y \in V$.
Insgesamt ist $V$ nicht leer, offen und abgeschlossen in $U$, also gilt, da $U$ zusammenhängend, dass $V = U$. Insbesondere ist $b \in V$. □

**Bemerkung 9.4.8** Aus der dem Beweis folgt, dass Polygonzusammenhang immer Zusammenhang impliziert, ohne die Voraussetzung der Offenheit ist die Umkehrung falsch. Weitere Informationen betreffend Zusammenhangsbegriffe finden Sie in den Übungen.

**Satz 9.4.9** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum (über $\mathbb{C}$), $f : U \to E$ eine Funktion und $F : U \to E$ eine Stammfunktion von $f$. Genau dann ist eine Funktion $G : U \to E$ eine Stammfunktion von $f$, wenn ein $c \in E$ existiert mit $G = F + c$ (d.h. $G(z) = F(z) + c, z \in U$).*
*Kennt man also eine Stammfunktion, so kennt man alle anderen, sie entstehen durch Addition beliebiger Konstanten an die eine.*

**Beweis.** Mit $F$ ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von $f$.
Ist $G$ eine Stammfunktion von $F$, so ist $(F-G)' = f-f = 0$, wir müssen also zeigen, dass $H := F-G$ konstant ist, wenn $H' = 0$. Sei dazu $z_0 \in U$ beliebig. Ist $z \in U$, so wähle nach 9.4.7 $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ und $z_0 = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = z \in U$ mit

$$\gamma(t) = x_\nu + \frac{t - t_\nu}{t_{\nu+1} - t_\nu}(x_{\nu+1} - x_\nu),\ t \in [t_\nu, t_{\nu+1}],\ 0 \leq \nu \leq n-1.$$

Die Kettenregel liefert $H \circ \gamma|_{[t_\nu, t_{\nu+1}]} = 0$ und also ergibt die Anwendung von 9.4.5 auf $H \circ \gamma|_{[t_\nu, t_{\nu+1}]}$, dass $H(x_\nu) = H(x_{\nu+1}),\ 0 \leq \nu \leq n-1$. Es folgt $H(z_0) = H(z)$. □

**Satz 9.4.10** *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, HDI)*
*Es sei $I$ ein Intervall, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $f : I \to E$ ein stetige Funktion.*

*i) Ist $y_0 \in I$ beliebig und $F : I \to E$, $F(x) = \int\limits_{y_0}^{x} f(t)dt$, so ist $F$ eine Stammfunktion von $f$.*

*ii) Ist $F : I \to E$ eine Stammfunktion von $f$, so gilt*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) =: F\Big|_a^b$$

*für alle $a, b \in I$.*

**Beweis.**

i) Aus Satz 8.3.5 folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(x_0,x_0)\\(x_1,x_2)\neq(x_0,x_0)}} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_0)$$

f"ur alle $x_0 \in I$. Also ist $F$ eine Stammfunktion von $f$.

ii) Aus i) und 9.4.5 folgt die Existenz von $c \in E$ mit

$$F(x) = c + \int\limits_{y_0}^{x} f(t)dt, \ x \in I.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= c + \int\limits_{x_0}^{b} f(t)dt - c - \int\limits_{x_0}^{a} f(t)dt \\ &= \int\limits_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

□

Mit dem Hauptsatz können wir nun eine Unmenge von Integralen ausrechnen, die uns bisher nicht zugänglich waren. Als Beispiel möge dienen:

**Beispiel 9.4.11** (vgl. 9.4.4) i) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} b^{n+1} - \frac{1}{n+1} a^{n+1}.$$

ii) Für $a, b > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.$$

Im Fall $\alpha = -1$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log b - \log a.$$

**Korollar 9.4.12** *Es sei $I$ ein Intervall, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $f : I \to E$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

*i) $f$ ist stetig differenzierbar auf $I$,*

*ii)* $\displaystyle\lim_{(x_1,x_2)\to(x_0,x_0)} \frac{1}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big)$ *existiert für alle $x_0 \in I$,*

*iii) $f$ ist differenzierbar auf $I$ und*

$$G : I \times I \to E,\ G(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big) & : x_1 \neq x_2 \\ \\ f'(x_1) & : x_1 = x_2 \end{cases}$$

*ist stetig auf $I \times I$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $I = [a, b]$.
i) $\Rightarrow$ ii): Es gilt $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ nach dem HDI. Eine Anwendung von 8.3.5 ii) auf $f'$ (anstelle von $f$) liefert ii).
ii) $\Rightarrow$ iii): Zunächst folgt aus ii), dass

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) \\ &= \lim_{(x_1,x_2)\to(x_0,x_0)} \frac{1}{x_1 - x_2}\big(f(x_1) - f(x_2)\big),\ x_0 \in [a, b]. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus 7.2.3.
iii) $\Rightarrow$ i): Ist $j : [a,b] \to [a,b]^2, x \mapsto (x,x)$, so ist $f' = G \circ j$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. $\square$

## 9.5 Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

**Lemma 9.5.1** *Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $a \leq x_0 \leq b$. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Abbildungen $f_n : [a,b] \to E, n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und konvergiert $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to E$, so konvergiert auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen das stetig differenzierbare $f : [a,b] \to E, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt$. Weiter gilt $f' = g$, also*

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

**Beweis.** Wegen 6.2.5 ist $g$ stetig, nach dem HDI ist also $f$ differenzierbar, und es gilt $f' = g$.
Es bleibt die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f$ zu zeigen. Nach dem HDI gilt $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt$. Es folgt

$$\sup_{x\in[a,b]} \big\|f_n(x) - f(x)\big\|_E = \sup_{x\in[a,b]} \big\|f_n(x_0) - \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t) - g(t)dt\big\|_E$$

$$\leq \big\|f_n(x_0) - \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x_0)\big\|_E + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \big\|f'_n(t) - g(t)\big\|_E \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

**Satz 9.5.2** *Es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $G \subset \mathbb{K}$ offen. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Abbildungen mit stetigen Ableitungen $f'_n : G \to E$, so dass sowohl $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig auf $G$ konvergieren. Dann ist $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ stetig differenzierbar auf $G$, und es gilt $f' = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$.*

**Beweis.**

1. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt sofort aus obigem Lemma, angewendet auf die kompakten Teilintervalle $[a, b] \subset G$.

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ und $g(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z)$. Dann ist $g$ nach 6.2.5 stetig.
   Es sei $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ mit $B_\delta(z_0) \subset G$ und $\sup\limits_{|z-z_0|<\delta} \big\| g(z) - g(z_0) \big\|_E < \varepsilon$.
   Ist $z \in U_\delta(z_0)$ und

$$h_n : [0,1] \to E, \qquad h_n(t) := f_n\big(z_0 + t(z - z_0)\big),$$

   so gilt $h_n' : [0,1] \to E, h_n'(t) = f_n'\big(z_0 + t(z - z_0)\big)(z - z_0)$. Damit erfüllt $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Lemmas.
   Es folgt mit $h : [0,1] \to E, h(t) = f\big(z_0 + t(z - z_0)\big)$, dass

$$\begin{aligned} f(z) = h(1) &= h(0) + \int\limits_0^1 (\lim_{n\to\infty} h_n')(t)dt \\ &= f(z_0) + \int\limits_0^1 g\big(z_0 + t(z - z_0)\big)(z - z_0)dt. \end{aligned}$$

   Also gilt

$$\Big\| \frac{1}{z - z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big) - g(z_0) \Big\|_E$$

$$= \Big\| \int\limits_0^1 g\big(z_0 + t(z - z_0)\big) - g(z_0)dt \Big\|_E \le \int\limits_0^1 \sup_{|z-z_0|<\delta} \big\| g(z) - g(z_0) \big\|_E dt < \varepsilon.$$

   Damit ist $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ differenzierbar an $z_0$, und es gilt

$$f'(z_0) = g(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0).$$

$\square$

**Korollar 9.5.3** *Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $R > 0$. *Mit* $U_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ *ist dann*

*$f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ stetig differenzierbar und die Ableitung von $f$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} f' : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f'(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \nu (z-z_0)^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1}(\nu+1)(z-z_0)^\nu. \end{aligned}$$

**Beweis.** Setze $f_n : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f_n(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (z-z_0)^\nu$. Dann gilt

$$f_n'(z) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu (z-z_0)^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu+1}(\nu+1)(z-z_0)^\nu.$$

Weiter ist $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1}(\nu+1)(z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius $R$. Mit Korollar 6.3.4 sind die Voraussetzungen von 9.5.2 erfüllt und es folgt die Behauptung. $\square$

**Korollar 9.5.4** *Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, so ist $F : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1}(z-z_0)^{\nu+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu-1}}{\nu}(z-z_0)^\nu$ eine Stammfunktion von $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$.*

**Beispiel 9.5.5** i) Wir könnten mit obigem Resultat leicht zeigen, dass $\exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin$, z.B:

$$\exp'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \nu z^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^\nu = \exp(z).$$

ii) Es sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \log(1-x)$. Dann gilt $f'(x) = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$.

Eine Stammfunktion zu $f'$ ist aber auch nach Obigem $g(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} x^\nu$.

Damit folgt

$$\log(1-x) = C - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} x^\nu.$$

Wegen $\log(1-0) = 0 = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} 0^\nu$ gilt $C = 0$ und es folgt

$$\log(1-x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} x^\nu$$

für $|x| < 1$.

Wir wollen nun die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ ausrechnen. Dazu benötigen wir

**Satz 9.5.6** *(Abelscher Grenzwertsatz) Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $1$, und es konvergiere $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Ist $f : (-1,1) \to \mathbb{C},\ f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.*

**Beweis.** Es sei $s_{-1} := 0$ und $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu, n \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} (s_\nu - s_{\nu-1}) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu x^{\nu+1} \\ &= (1-x) \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu x^\nu + s_n x^n, \end{aligned}$$

also folgt $f(x) = (1-x) \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu, x \in (-1,1)$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\left| s_n - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq \mathbb{N}$, und dann wähle $1 > \delta > 0$ mit

$$\delta \sum_{\nu=0}^{N} \left| s_\nu - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $x \in (1-\delta, 1)$, dass

$$\begin{aligned}
\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| &= \Big|(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \\
&= (1-x)\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu - \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \\
&= (1-x)\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)x^\nu\Big| \\
&= (1-x)\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(s_\nu - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)x^\nu\Big| \\
&\leq (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big|s_\nu - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big|x^\nu \\
&\leq \delta\sum_{\nu=0}^{N}\Big|s_\nu - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| + (1-x)\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}x^\nu \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 9.5.7** Es sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} x^\nu = -\log(1+x)$. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} = -\log 2.$$

## 9.6 Integrationsregeln

**Satz 9.6.1** *Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $E$ ein vollständiger normierter Raum.*

*i) Sind $f : [a,b] \to \mathbb{K}, g : [a,b] \to E$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

*mit anderen Worten*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

*wenn man* $h\Big|_a^b := h(b) - h(a)$ *setzt. (Partielle Integration)*

*ii) Es sei* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und* $f : \varphi\big([a,b]\big) \to E$ *stetig. Dann gilt* $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b \varphi'(t)f\big(\varphi(t)\big)dt$ *(Substitutionsregel).*

**Beweis.**

i) Wegen $(f\cdot g)' = f'g + fg'$ gilt nach dem HDI

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = \int_a^b (f\cdot g)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

ii) Ist $F : [a,b] \to E$ eine Stammfunktion von $f$, so gilt nach dem HDI und der Kettenregel

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx &= F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(b)\big) = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a)\\ &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)dt = \int_a^b \varphi'(t)f\big(\varphi(t)\big)dt.\end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 9.6.2** i) Die Substitutionsregel kann man auch symbolisch durch $x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ und somit $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$, $x$ läuft von $\varphi(a)$ bis $\varphi(b)$, $t$ läuft von $a$ bis $b$, ausdrücken.

ii) Ist $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ stetig differenzierbar mit $\varphi'(x) \neq 0,\ x \in [a,b]$, so ergibt die Anwendung der Substitutionsregel auf $\varphi^{-1}$, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)dx &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} (\varphi^{-1})'(z) f\big(\varphi(\varphi^{-1}(z))\big)dz \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))}\,dz.\end{aligned}$$

Symbolisch ist also $z = \varphi(x)$, somit

$$x = \varphi^{-1}(z) \Rightarrow \frac{dx}{dz} = (\varphi^{-1})'(z) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))} \Rightarrow dx = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))}\,dz.$$

iii) Die Substitutionsregel gilt auch für Regelfunktionen $f$, das zeigen wir hier aber nicht.

**Korollar 9.6.3** *Es sei $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton mit $f([\alpha,\beta]) = [a,b]$.*
*Dann gilt*

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx = yf^{-1}(y)\Big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$$

**Beweis.** Nach der Substitutionsregel (mit $\varphi = f$) gilt

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f'(x)xdx &= \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f'(x)f^{-1}(f(x))dx = \int_{f(f^{-1}(a))}^{f(f^{-1}(b))} f^{-1}(y)dy \\ &= \int_a^b f^{-1}(y)dy.\end{aligned}$$

Weiter gilt mit partieller Integration

$$\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f'(x)xdx = f(x)x\Big|_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$$

$\square$

**Beispiel 9.6.4** i) Für $-1 \le a \le b \le 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_1^b 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b - \frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_a^b \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b + \arcsin x\Big|_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx,
\end{aligned}$$

also $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big)\Big|_a^b$.
Ist $a = -1, b = 1$, so folgt also

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\big) = \frac{\pi}{2}.$$

Somit ist also die Fläche des Kreises $\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\big\}$ gleich $\pi$.

ii) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\cosh t}$.
Ersetzen wir $t = \log z$, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\cosh(t)}\,dz &= \int_{\log(1)}^{\log(e^x)} \frac{1}{\cosh(t)}\,dz = \int_1^{e^x} \frac{1}{\cosh(\log z)}\,\frac{1}{z}\,dz \\
&= \int_1^{e^x} \frac{1}{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\,\frac{1}{z}\,dz = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{1+z^2}\,dz \\
&= 2\arctan\Big|_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \underbrace{2\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

also ist $F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = 2\arctan(e^x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cosh}$.

# Kapitel 10

# Höhere Ableitungen

Es sei $A \subset \mathbb{K}$, so dass jeder Punkt von $A$ Häufungspunkt ist, und es sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $f : A \to E$ heißt zweimal differenzierbar (auf $A$), falls $f$ differenzierbar und $f'$ ebenfalls differenzierbar ist. Man setzt

$$f^{(2)} := f'' := (f')'.$$

Induktiv definiert man: $f$ heißt $n$-mal differenzierbar, falls $f$ $(n-1)$-mal differenzierbar und $f^{(n-1)}$ ebenfalls differenzierbar ist. Man setzt

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Weiter heißt $f$ $n$-mal stetig differenzierbar, falls $f$ $n$-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist. Wir schreiben

$$C^n(A, E) := \{f : A \to E : f \text{ ist n-mal stetig differenzierbar}\}$$

und

$$C^\infty(A, E) := \{f : A \to E : f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}.$$

## 10.1 Lokale Extrema und Konvexität

**Satz 10.1.1** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so existiert ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) > f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) < f(x_0)\text{)}$$

*für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Insbesondere besitzt $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum (Maximum).*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $f''(x_0) > 0$ (ansonsten betrachte $-f$ anstelle von $f$). Wegen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0$$

existiert also ein $\delta > 0$ mit $\frac{f'(x)}{x-x_0} = \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} > 0$ für alle $x \in I, |x-x_0| < \delta$. Es folgt $f' < 0$ auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0)$ und $f' > 0$ auf $I \cap (x_0, x_0 + \delta)$. Nach 9.3.7 i) ist $f$ streng monoton fallend auf $I \cap (x_0 - \delta, x_0)$ und streng monoton wachsend auf $I \cap (x_0, x_0 + \delta)$. □

**Satz 10.1.2** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist $f$ genau dann konvex (d.h.*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

*für alle $x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0,1]$, wenn $f'' \geq 0$ auf $I$.*

**Beweis.**

1. Es sei $f'' \geq 0$ auf $I$. Dann ist $f'$ monoton wachsend, und nach dem MWS existieren für $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ zwei Punkte $\xi_1 \in \big(x_1, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big), \xi_2 \in \big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, x_2\big)$ mit

$$\frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1} = f'(\xi_1)$$

$$\leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}{x_2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}.$$

   Wegen $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - \big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) = \lambda(x_2 - x_1)$ impliziert dies

$$\lambda\big(f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) - f(x_1)\big) \leq (1-\lambda)\big(f(x_2) - f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_2)\big)$$

   also

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

2. Es sei $f$ konvex. Wir nehmen an, es gibt ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Setze $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$. Dann ist auch $\varphi$ zweimal differenzierbar, $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) < 0$, also besitzt $\varphi$ an $x_0$ ein lokales Minimum, und es gibt sogar ein $\delta > 0$ mit $\varphi(x_0 - \delta) < \varphi(x_0)$ und $\varphi(x_0 + \delta) < \varphi(x_0)$. (Wegen $\varphi''(x_0) < 0$ existiert $\delta > 0$ mit $\varphi' > 0$ auf $[x_0 - \delta, x_0)$ und $\varphi' < 0$ auf $(x_0, x_0 + \delta]$, also ist $\varphi$ streng monoton wachsend auf $[x_0 - \delta, x_0]$ und streng monoton fallend auf $[x_0, x_0 + \delta]$.) Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \varphi(x_0) > \frac{1}{2}\big(\varphi(x_0 - \delta) + \varphi(x_0 + \delta)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x_0 - \delta) + f(x_0 - \delta)\big), \end{aligned}$$

Widerspruch.

□

**Korollar 10.1.3** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.*
*Dann ist $f$ genau dann konkav (d. h. $f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0,1]$), wenn $f'' \leq 0$ auf $I$.*

**Beweis.** Wende 10.1.2 auf $-f$ an. □

## 10.2 Der Satz von Taylor

**Lemma 10.2.1** *Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$. Ist $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1 - z_0| < R$,*

$$b_k := \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z_1 - z_0)^{\nu - k}, \ k \in \mathbb{N}_0,$$

*so konvergiert die Potenzreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_1)^k$ *auf* $U_{\tilde{R}}(z_1)$ *mit* $\tilde{R} := R - |z_1 - z_0|$, *und dort gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_1)^k.$$

**Beweis.** Es sei $z \in U_{\tilde{R}}(z_1)$, und es sei

$$\alpha_{\nu,k} := \binom{\nu}{k} a_\nu (z_1 - z_0)^{\nu-k}(z-z_1)^k,\ \ \nu, k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $\alpha_{\nu,k} = 0$ für $k > \nu$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |\alpha_{\nu,k}| = \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}|a_\nu||z_1-z_0|^{\nu-k}|z-z_1|^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N}|a_\nu|\big(|z_1-z_0| + |z-z_1|\big)^{\nu} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\big(\underbrace{|z_1-z_0| + |z-z_1|}_{<R}\big)^{\nu} < \infty$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist $(\alpha_{\nu,k})_{(\nu,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ (absolut) summierbar, und der Umordnungssatz liefert

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(z-z_1)^k(z_1-z_0)^{\nu-k}$$

$$= \sum_{(\nu,k)\in\mathbb{N}_0^2} \alpha_{\nu,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k} a_\nu (z_1-z_0)^{\nu-k}(z-z_1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_1)^k.$$

$\square$

**Satz 10.2.2** *Es sei* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$ *eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius* $R > 0$ *und* $z_1 \in \mathbb{C}$ *mit* $|z_1 - z_0| < R$. *Ist* $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}, f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$, *so ist* $f$ *beliebig oft differenzierbar, und es gilt*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_1)}{\nu!}(z-z_1)^\nu,\ \ |z-z_1| < R - |z_1 - z_0|.$$

*Insbesondere ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu$.

**Beweis.** Nach 10.2.1 genügt es, die letzte Gleichung zu zeigen. Nach 9.5.3 ist $f$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \nu (z-z_0)^{\nu-1}$. Induktiv erhalten wir aus 9.5.3, dass $f$ beliebig oft differenzierbar ist und

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)(z-z_0)^{\nu-k}, \text{ also}$$
$$f^{(k)}(z_0) = a_k k! \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

□

**Bemerkung 10.2.3** Im vierten Semester werden wir folgenden Satz zeigen: Ist $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist $f$ schon beliebig oft differenzierbar, und es gilt für $z_0 \in G$, dass $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu, z \in G, |z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$.
Dieses Resultat gilt natürlich nicht für Funktionen, die bloß auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind, z. B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(z) = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ x^2 & : x > 0 \end{cases}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber nicht zweimal differenzierbar.

**Satz 10.2.4** *(Taylor) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum und $f : I \to E$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x, x_0 \in I$, dass*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R_{n+1}(x, x_0),$$

*wobei*

$$R_{n+1}(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

**Beweis.** ( durch vollständige Induktion)
$n = 0$. Nach dem HDI gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f^{(1)}(t)dt,$$

also $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{0} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R_1(x,x_0)$.
$n-1 \mapsto n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt mit partieller Integration

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$

$$= -\frac{(x-t)^n}{n(n-1)!}\cdot f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung für $n$. $\square$

**Korollar 10.2.5** *Es sei $f: I \to E$ eine $(n+1)$- und stetige Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu,$$

*$f$ ist also ein Polynom vom Grade $\leq n$.*

**Satz 10.2.6** *(Lagrangesche Form des Restgliedes)*
*Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetige Funktion und $x_0, x \in I$. Dann existiert ein $\xi$ zwischen $x_0$ und $x$ mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

**Beweis.** Sei ohne Einschränkung $x > x_0$.
Nach dem MWS der Integralrechnung existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x, x_0) &= \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Definition 10.2.7** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, welche beliebig oft differenzierbar ist. Dann heißt

$$T_{x_0}(f)(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu$$

die Taylorreihe von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0$.

**Bemerkung 10.2.8** i) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe.
Vorsicht: Es kann passieren, dass diese Reihe nur für $x = x_0$ konvergiert.

ii) Auch wenn $f : I \to \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar ist und die Taylorreihe auf $I$ konvergiert, muss $T_{x_0}(f)(x)$ nicht unbedingt gleich $f(x)$ sein, wie das Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$$

zeigt. In diesem Fall ist nämlich $T_0(f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

iii) Für alle Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$, die durch eine Potenzreihe auf $I$ dargestellt werden, gilt nach 10.2.2, dass $f(x) = T_{x_0}(f)(x), x_0 \in \mathring{I},\ |x - x_0| < \operatorname{dist}(x_0, \partial I)$.

Eine der wenigen elementaren Funktionen, die wir noch nicht durch Potenzreihen dargestellt haben, ist $f(x) = x^\alpha$.

**Beispiel 10.2.9** Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|x| < 1$, dass

$$(1+x)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu.$$

Hierbei ist $\binom{\alpha}{\nu} = \prod\limits_{n=1}^{\nu} \frac{\alpha-n+1}{n}$.

**Beweis.** Es sei $f(x) = (1+x)^\alpha$. Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{\alpha}{\nu} = 0$ für $\nu > \alpha$, und die Behauptung folgt aus dem binomischen Satz.
Es sei also $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Induktiv zeigt man leicht, dass

$$f^{(\nu)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)(1+x)^{\alpha-\nu} = \nu!\binom{\alpha}{\nu}(1+x)^{\alpha-\nu}.$$

Also ist $\frac{f^{(0)}(0)}{\nu!} = \binom{\alpha}{\nu}$, und damit ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu$ die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$.
Wegen

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{\nu+1}}{\binom{\alpha}{\nu}}\right| = \left|\frac{\alpha-\nu}{\nu+1}\right| \longrightarrow 1 \qquad (\nu \to \infty)$$

liefert das Quotientenkriterium, dass unsere Taylorreihe $T_0(x)$ für $|x| < 1$ konvergiert.
Es bleibt zu zeigen, dass $(1+x)^\alpha = T_0(x)$. Dazu ist zu zeigen, dass das Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

für $|x| < 1$ gegen 0 konvergiert.
Zunächst gilt $R_{n+1}(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int\limits_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt$.

1. Es sei $-1 < x < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|R_{n+1}(x)\right| &= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\int\limits_0^{|x|}(x+t)^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt\right| \\
&= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\int\limits_0^{|x|}(|x|-t)^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt \\
&= \left|\alpha\cdot\binom{\alpha-1}{n}\right|\int\limits_0^{|x|}\underbrace{\left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n}_{\substack{\le|x|^n,\text{da } t\mapsto\frac{|x|-t}{1-t} \\ \text{monoton fallend in } [0,|x|]}}(1-t)^{\alpha-1}dt \\
&\le \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n}\right||x|^n\int\limits_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{\nu}|x|^\nu$ konvergiert, folgt

$$\left|\binom{\alpha-1}{n}|x|^n\right| \longrightarrow 0 \ (n\to\infty)$$

und somit

$$R_{n+1}(x) \longrightarrow 0 \ (n\to\infty).$$

2. Es sei $0 < x < 1$.
Dann gilt nach der Lagrangeschen Form des Restgliedes

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right|$$

$$= \left|\binom{\alpha}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}(1+\xi)^\alpha\right| \le \binom{\alpha}{n+1}|x|^{n+1}(1+\xi)^\alpha$$

mit einem $\xi \in [0,|x|]$.
Da $\sum\limits_{\nu=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu$ konvergiert, folgt $\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1} \to 0$ und damit $R_{n+1}(x) \to 0 \ (n\to\infty)$.

$\square$

# Kapitel 11

# Uneigentliche Integrale und Anwendungen

## 11.1 Definition und elementare Eigenschaften

**Definition 11.1.1** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit linker Grenze $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und rechter Grenze $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ist $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum, so heißt $f : I \to E$ uneigentlich integrierbar und $s =: \int\limits_a^b f(x)dx$ das Integral von $f$, falls

i) $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathscr{R}\big([\alpha,\beta], E\big)$ für alle $[\alpha,\beta] \subset I$.

ii) $\lim\limits_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\ \alpha,\beta\in I}} \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = s$ existiert.

Wir setzen $\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Bemerkung 11.1.2** Es sei $x_0 \in I$. Dann ist $f : I \to E$ genau dann uneigentlich integrierbar, wenn

i)) $f|_{[\alpha,x_0]} \in \mathscr{R}\big([\alpha,x_0], E\big)$ und $f|_{[x_0,\beta]} \in \mathscr{R}\big([x_0,\beta], E\big)$ für $\alpha \le x_0, \alpha \in I$, und $\beta \ge x_0, \beta \in I$, sowie

ii) $\lim\limits_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha\in I}} \int\limits_\alpha^{x_0} f(x)dx$ und $\lim\limits_{\substack{\beta\to b\\ \beta\in I}} \int\limits_{x_0}^b f(x)dx$ existiert.

In diesem Fall ist $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to a} \int\limits_\alpha^{x_0} f(x)dx + \lim\limits_{\beta\to b} \int\limits_{x_0}^\beta f(x)dx$.

**Satz 11.1.3** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit linker Grenze $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und rechter Grenze $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Weiter seien $f, g : I \to E$ uneigentlich integrierbare Abbildungen mit Werten in einem vollständigen normierten Raum. Dann gilt*

*i) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda f + g$ uneigentlich integrierbar, und es gilt*

$$\int\limits_a^b \lambda f(x) + g(x) dx = \lambda \int\limits_a^b f(x) dx + \int\limits_a^b g(x) dx.$$

*ii) Ist $A : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, so dass ein $C > 0$ existiert mit $\|Ax\|_F \le C\|x\|_E, x \in E$, so ist $A \circ f$ uneigentlich integrierbar, und es gilt*

$$\int\limits_a^b (A \circ f)(x) dx = A\Big(\int\limits_a^b f(x) dx\Big).$$

*Insbesondere gilt im Falle $E = \mathbb{C}$:*

$$\int\limits_a^b \mathrm{Re} f(x) dx = \mathrm{Re} \int\limits_a^b f(x) dx \quad \textit{und}$$

$$\int\limits_a^b \mathrm{Im} f(x) dx = \mathrm{Im} \int\limits_a^b f(x) dx.$$

*iii) Ist speziell $E = \mathbb{R}$ und $f \ge g$, so gilt*

$$\int\limits_a^b f(x) dx \ge \int\limits_a^b g(x) dx.$$

*iv) Ist zusätzlich $\|f\|_E : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x)\|_E$ uneigentlich integrierbar, so gilt*

$$\Big\| \int\limits_a^b f(x) dx \Big\|_E \le \int\limits_a^b \big\|f(x)\big\|_E dx.$$

*v) Ist $x_0 \in I$, so ist $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^{x_0} f(x) dx + \int\limits_{x_0}^b f(x) dx$.*

vi) *Ist $h : I \to E$ stetig und $F$ eine Stammfunktion von $h$, so ist $h$ genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} F(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} F(x)$ existieren. In diesem Fall ist*

$$\int\limits_a^b h(x)dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x).$$

**Beweis.** i),…,v) ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften für das Regelintegral, vi) folgt aus dem HDI. □

**Beispiel 11.1.4** i) Es sei $x_0 > 0$ und $I = (0, x_0]$. Dann ist $f_\alpha : I \to \mathbb{R}, f_\alpha(x) = x^\alpha$ genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $\alpha > -1$. In diesem Fall ist $\int\limits_0^{x_0} x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x_0^{\alpha+1}$.

In der Tat, $F_\alpha : I \to \mathbb{R}, F_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \log x & \alpha = -1 \end{cases}$ ist eine Stammfunktion von $f_\alpha$, und $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} F_\alpha(x)$ existiert genau dann, wenn $\alpha > -1$.

Insbesondere ist $f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$ **nicht** uneigentlich integrierbar auf $(0, x_0]$.

$f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist uneigentlich integrierbar auf $(0, x_0]$, und es gilt $\int\limits_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{x_0} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x_0^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x_0}$.

ii) Es sei $x_0 > 0$ und $I = [x_0, +\infty)$. Dann ist $f_\alpha : I \to \mathbb{R}, f_\alpha(x) = x^\alpha$, genau dann uneigentlich integrierbar, wenn $\alpha < -1$. Dies zeigt man analog zu i).

iii) Es sei $f : (0, x_0] \to \mathbb{R}, f(x) = \log x$. Dann ist $f$ auf $(0, x_0]$ uneigentlich integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_0^{x_0} \log x dx = x_0 \log x_0 - x_0.$$

In der Tat, $F : (0, x_0] \to \mathbb{R}, F(x) = x \log x - x$ ist eine Stammfunktion von $f$, und es gilt

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0.$$

Analog sieht man, dass $f : [x_0, +\infty), f(x) = \log x$, nicht uneigentlich integrierbar ist.

## 11.2 Vergleichskriterium und Integralkriterium

**Satz 11.2.1** *(Vergleichskriterium) Es sei $I$ ein Intervall mit linker Grenze $a$ und rechter Grenze $b$ sowie $f : I \to E$ eine Abbildung in einen vollständigen normierten Raum, so dass $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathscr{R}([\alpha, \beta], E)$ für alle $[\alpha, \beta] \subset I$. Ist $g : I \to [0, \infty)$ uneigentlich integrierbar und gilt $\|f(x)\|_E \leq g(x),\ x \in I$, so ist auch $f$ uneigentlich integrierbar und es gilt*

$$\Big\| \int_a^b f(x)dx \Big\|_E \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**Beweis.** Es sei $x_0 \in I,\ F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Wir zeigen, dass $\lim_{x\to b} F(x)$ existiert. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $I$ mit $x_n \to b$. Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\big\|F(x_n) - F(x_m)\big\|_E = \Big\| \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_m} f(t)dt \Big\|_E$$

$$= \Big\| \int_{x_m}^{x_n} f(t)dt \Big\|_E \leq \Big| \int_{x_m}^{x_m} \|f(t)\|_E \, dt \Big|$$

$$\leq \Big| \int_{x_m}^{x_n} g(t)dt \Big| = \big|G(x_n) - G(x_m)\big|.$$

Da $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also Cauchy ist, impliziert dies, dass auch $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy und damit konvergent ist. Wie im Beweis von 7.2.4 zeigt man nun, dass $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(\tilde{x}_n)$ für jede Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I$ mit $\tilde{x}_n \to b$ (Zickzackfolgenargument). Es folgt die Existenz von $\lim_{x\to b} F(x)$. Die Existenz von $\lim_{x\to a} F(x)$ wird analog behandelt. Mit 11.1.3 vi) ist $f$ uneigentlich integrierbar. $\square$

**Beispiel 11.2.2** Es sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \ x > 0 \\ 1 & : \ x = 0 \end{cases}$.

Es gilt $\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{-1}{t} \cos t\Big|_1^x - \int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$. Nach dem Vergleichskriterium existiert $\int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt$, und damit folgt

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \cos 1 - \int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\, dt,$$

also ist $f$ auf $[1, +\infty)$ und damit auch $[0, \infty)$ uneigentlich integrierbar (beachte: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig).
In den Übungen werden Sie zeigen, dass

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

**nicht** existiert, im Falle uneigentlicher Integrale impliziert also die Integrierbarkeit von $f$ insbesondere **nicht**, dass $|f|$ integrierbar ist.

**Satz 11.2.3** *(Integralkriterium für Reihen) Es sei* $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *monoton fallend. Dann existiert*

$$y := \lim_{n\to\infty} \Big( \sum_{\nu=1}^n f(\nu) - \int\limits_1^{n+1} f(t)dt \Big),$$

*und es gilt* $0 \le y \le f(1)$.

**Beweis.** Wegen $f(\nu + 1) \le f(x) \le f(\nu), x \in [\nu, \nu + 1]$, folgt $f(\nu + 1) \le \int\limits_\nu^{\nu+1} f(x)dx \le f(\nu)$ und damit $0 \le f(\nu) - \int\limits_\nu^{\nu+1} f(x)dx \le f(\nu) - f(\nu + 1)$. Damit ist $s_n := \sum\limits_{\nu=1}^n \big(f(\nu) - \int\limits_\nu^{\nu+1} f(x)dx\big)$ monoton wachsend, und wegen $s_n \le \sum\limits_{\nu=1}^n f(\nu) - f(\nu + 1) \le f(1) - f(n + 1) \le f(1)$ ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nach oben beschränkt. Also konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Hauptsatz über monotone Folgen. Wegen $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^n f(\nu) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ folgt die Behauptung. □

**Beispiel 11.2.4** Aus der Existenz von $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \alpha > 1$, erhält man mit dem Integralkriterium sofort die Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$ für $\alpha > 1$.
Ist $\alpha = 1$, so zeigt das Integralkriterium, dass $\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n}$ wächst also „ungefähr so schnell oder besser so langsam“ wie $\log n$.

**Definition/Bemerkung 11.2.5** ($\Gamma$-Funktion) Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ existiert für jedes $x > 0$. Dies folgt aus dem Vergleichskriterium wegen $e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}, t \in (0,1]$, und $e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{C}{t^2}, t \in [1,\infty)$, wobei $C = \sup\limits_{t\in[1,\infty)} |e^{-t}t^{x+1}| < \infty$. Die Abbildung

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

heißt $\Gamma$-Funktion.

**Satz 11.2.6** *Es gilt* $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ *für alle* $x \in (0,\infty)$ *und* $\Gamma(1) = 1$. *Insbesondere ist also* $\Gamma(n+1) = n!$ *f"ur alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

**Beweis.** Partielle Integration liefert für $\alpha < \beta$

$$\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^x dt = -t^x e^{-t}\Big|_\alpha^\beta + x\int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,+\infty)} \int\limits_\alpha^\beta e^{-t}t^x dt \\ &= -\lim_{\beta\to\infty} \beta^x e^{-\beta} + \lim_{\alpha\to 0} \alpha^x e^{-\alpha} + x\Gamma(x) \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\Gamma(1) \quad = \quad \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int\limits_0^\beta e^{-t}dt = \lim_{\beta\to\infty} -e^{-\beta} + 1 = 1.$$

□

## 11.3 Die Stirlingsche Formel

Wir wollen hier die sogenannte Stirlingsche Formel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

zeigen. Diese besagt, dass sich $n!$ so wie $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ „verhält".

**Lemma 11.3.1** *(Eulersche Summenformel)*
*Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und es sei $f : [1,n] \to E$ eine stetig differenzierbare Abbildung in einen vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$. Dann gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}\big(f(1) + f(n)\big) + \int_1^n b(x)f'(x)dx$$

*mit $b(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.*

**Beweis.** Es gilt mit partieller Integration

$$\int_1^n b(x)f'(x)dx = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_\nu^{\nu+1} \Big(x - \nu - \frac{1}{2}\Big)f'(x)dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\Big(x - \nu - \frac{1}{2}\Big)f(x)\Big|_\nu^{\nu+1} - \int_\nu^{\nu+1} f(x)dx\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big(\nu + 1 - \nu - \frac{1}{2}\Big)f(\nu+1) - \Big(\nu - \nu - \frac{1}{2}\Big)f(\nu) - \int_1^n f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1} f(\nu+1) + f(\nu) - \int_1^n f(x)dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) - \frac{1}{2}\big(f(1) + f(n)\big) - \int_1^n f(x)dx.$$

□

**Lemma 11.3.2** *(Wallissches Produkt)*
*Es sei* $c_n := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.
*Dann gilt* $c_0 = \frac{\pi}{2}, c_1 = 1$ *und* $c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
*Ist* $w_m := \frac{\pi}{2} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}}, m \in \mathbb{N}$, *so gilt*

$$w_m = \prod_{n=1}^{m} \frac{4n^2}{4n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \quad (m \to \infty).$$

**Beweis.** $c_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$, $c_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$.
Mit partieller Integration folgt

$$c_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x dx = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)(c_{n-2} - c_n),$$

also

$$c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}.$$

Wegen $\sin^{2m} x \geq \sin^{2m+1} x \geq \sin^{2m+2} x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, folgt $c_{2m} \geq c_{2m+1} \geq c_{2m+2}$, also

$$1 \geq \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \frac{c_{2m+2}}{c_{2m}} = \frac{2m+1}{2m+2} \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty),$$

$$\text{da } c_{2m+2} = \Big(\frac{2m+2-1}{2m+2}\Big) c_{2m}.$$

Es folgt, dass $w_m \to \frac{\pi}{2}$.
Aus $c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}$ folgt rekursiv

$$c_{2m} = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{m} \frac{2n-1}{2n} \quad \text{und} \quad c_{2m+1} = \prod_{n=1}^{m} \frac{2n}{2n+1},$$

also

$$w_m = \prod_{n=1}^{m} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$\square$

**Satz 11.3.3** *(Stirlingsche Formel)*
*Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

**Beweis.**

1. Wegen $\int\limits_1^n \log x dx = x\log x - x\Big|_1^n = n\log n - n + 1$, folgt aus der Eulerschen Summenformel:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} \log\nu &= n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n + \int\limits_1^n \frac{b(x)}{x}\,dx \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 + \int\limits_1^n \frac{b(x)}{x}\,dx,\end{aligned}$$

   mit $b(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.
   Nach A 36 existiert $\int\limits_1^\infty \frac{b(x)}{x}\,dx$, da $b$ 1-periodisch und $\int\limits_0^1 b(x)dx = 0$.

2. Es sei $a_n := \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$. Wir zeigen $a_n \to \sqrt{2\pi}$, und daraus folgt die Behauptung.

Nach 1. gilt

$$\begin{aligned}\log a_n &= \log n! - \log n^n - \log e^{-n} - \log n^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \log\nu - n\log n + n - \frac{1}{2}\log n \\ &= 1 + \int\limits_1^n \frac{b(x)}{x}\,dx,\end{aligned}$$

also konvergiert $(\log a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, somit auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\exp(\log a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und es ist $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.
Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

Es bleibt also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{2\pi}$ zu zeigen. Dann benutzen wir jetzt das Wallissche Produkt. Man zeigt zunächst

$$2\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{4j^2}{4j^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

mit vollständiger Induktion. Dann folgt mit 11.3.2, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n\to\infty} 2\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{4j^2}{4j^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

gilt. $\square$

**Bemerkung 11.3.4** Man kann sogar zeigen (und den Beweis findet man in jedem guten Lehrbuch über Analysis), dass

$$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n} < n! \leq (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\; e^{\frac{1}{12n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

# Kapitel 12

# Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2$. Wir wollen untersuchen, ob $f$ lokale Extrema hat. Falls $x \in \mathbb{R}^2$ eine Extremstelle für $f$ ist, so hat für beliebiges $r \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$g_{x,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_{x,r}(t) := f(x + tr)$$

an $t_0 = 0$ eine Extremstelle. In der Tat, ist $x$ eine Minimalstelle für $f$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) = \inf\limits_{|z-x|<\delta} f(z)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} g_{x,r}(0) &= \inf_{|z-x|<\delta} f(z) \leq \inf_{|t|<\frac{\delta}{|r|+1}} f(x + tr) \\ &= \inf_{|t|<\frac{\delta}{|r|+1}} g_{x,r}(t). \end{aligned}$$

Also ist 0 eine Minimalstelle für $g_{x,r}$. Analog betrachtet man Maximalstellen von $f$. Da $g_{x,r}$ differenzierbar ist, muss also $g'_{x,r}(0) = 0$ gelten, also

$$\begin{aligned} 0 = g'_{x,r}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + tr) - f(x)\big) \\ &= 2x_1 r_1 + (2x_2 - 4)r_2. \end{aligned}$$

Da dies für alle $r \in \mathbb{R}^2$ gilt, folgt $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Damit ist $(0, 2)$ der einzige Kandidat für eine Extremstelle von $f$. Wegen $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \geq -4$ und $f(0, 2) = -4$ liegt an $(0, 2)$ tatsächlich ein (absolutes) Minimum von $f$ vor.

Wir beschränken uns im Weiteren auf reelle Differenzierbarkeit und treffen folgende Konventionen.
Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq U \subset X$ sei eine offene Teilmenge. $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ seien vollständige normierte Räume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

## 12.1 Definition der Ableitung

**Definition 12.1.1** Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt richtungsdifferenzierbar an $x \in U$, falls für alle Richtungen $r \in X$ der Grenzwert

$$df(x)(r) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + tr) - f(x)\big)$$

existiert.
$df(x)(r)$ heißt dann Ableitung von $f$ an $x$ in Richtung $r$ und

$$df(x) : X \to E,\ r \mapsto df(x)(r)$$

heißt die Ableitung von $f$ an $x$.

Weiter heißt $f$ richtungsdifferenzierbar (auf $U$), falls $f$ an allen $x \in U$ richtungsdifferenzierbar ist.

**Beispiel 12.1.2** i) Es sei $U = X = \mathbb{R}^2$ und $E = \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2$.
Dann gilt (siehe oben), dass $f$ richtungsdifferenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist und für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$df(x)(r) = 2x_1r_1 + (2x_1 - 4)r_2,$$

$r \in \mathbb{R}^2$. Wir beobachten, dass $df(x)$ linear ist, $df(x)$ wird durch

$$df(x)(r) = (2x_1, 2x_2 - 4)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}^2$$

dargestellt.

ii) Es sei wieder $U = X = \mathbb{R}^2, E = \mathbb{R}$, und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^6} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Ist $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $g_{x,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_{x,r}(t) := f(x+tr)$, so ist $g_{x,r}$ beliebig oft differenzierbar, also existiert $df(x)(r) = g'_{x,r}(0)$ für alle Richtungen $r \in \mathbb{R}^2$ und alle $x \in \mathbb{R}^2$ (siehe Übungen). $f$ ist aber unstetig an $x_0 = 0$, da

$$f\left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}{2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{3}} \longrightarrow +\infty \ (n \to \infty).$$

iii) Es sei

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{e} \exp\left(\frac{1}{1-t^2}\right) & : \ |t| < 1 \\ 0 & : \ |t| \geq 1 \end{cases}$$

und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \varphi\left(\frac{1}{x_1^2} x_2\right) & : \ x_1 \neq 0 \\ 0 & : \ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Dann ist $f$ richtungsdifferenzierbar, aber $df(0)$ ist nicht linear, denn es gilt $df(0)(1,0) = 1, df(0)(0,1) = 0$, aber $df(0)(1,1) = 0$.

**Bemerkung 12.1.3** i) Ist $x \in U$ und $f$ richtungsdifferenzierbar an $x$, so gilt $df(x)(\lambda r) = \lambda df(x)(r)$ für alle $r \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Hierzu sei $r \neq 0, \lambda \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df(x)(\lambda r) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + t\lambda r) - f(x)\big) \\ &= \lim_{\tilde{t} \to 0} \frac{\lambda}{\tilde{t}}\big(f(x + \tilde{t}r) - f(x)\big) \\ &= \lambda \lim_{\tilde{t} \to 0} \frac{1}{\tilde{t}}\big(f(x + \tilde{t}r) - f(x)\big) \\ &= \lambda df(x)(r). \end{aligned}$$

ii) Ist $f : U \to E$ richtungsdifferenzierbar, $x \in U, r \in X$ und

$$A := \{t \in \mathbb{R} : x + tr \in U\},$$

$g_{x,r} : A \to E$, $g_{x,r}(t) := f(x+tr)$, so ist $A$ offen (als Urbild der offenen Menge $U$ unter der stetigen Abbildung $t \mapsto x+tr$) und nicht leer. Weiter ist $g_{x,r}$ ist differenzierbar mit

$$g'_{x,r}(t) = df(x+tr)(r).$$

In der Tat, für $t_0 \in A$ gilt

$$df(x+t_0r)(r) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+t_0r+tr) - f(x+t_0r)\big)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(g_{x,r}(t_0+t) - g_{x,r}(t_0)\big) = g'_{x,r}(t_0).$$

iii) Es sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : U \to E$ eine Funktion. Dann ist $f$ genau dann differenzierbar an $x$, wenn $f$ an $x$ richtungsdifferenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} df(x)(r) &= rf'(x), \text{ also} \\ f'(x) &= df(x)(1). \end{aligned}$$

Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned} df(x)(r) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tr) - f(x)\big) = \lim_{\tilde{t}\to 0} \frac{r}{\tilde{t}}\big(f(x+\tilde{t}) - f(x)\big) \\ &= r\lim_{\tilde{t}\to 0} \frac{1}{\tilde{t}}\big(f(x+\tilde{t}) - f(x)\big) = rf'(x). \end{aligned}$$

**Satz 12.1.4** *Ist $f : U \to \mathbb{R}$ richtungsdifferenzierbar und besitzt $f$ an $x \in U$ ein lokales Extremum, so gilt $df(x)(r) = 0$ für alle $r \in X$, mit anderen Worten $df(x) = 0$.*

**Beweis.** Es sei wieder $g_{x,r}(t) := f(x+tr)$.
Ist $x$ eine Minimalstelle für $f$, so ist $0$ eine Minimalstelle für $g_{x,r}$, dies folgt wie in der Einleitung zu 12. Also ist $g'_{x,r}(0) = 0$ für alle $r \in X$, was aber gerade $df(x) = 0$ bedeutet.
Der Fall einer Maximalstelle wird analog behandelt. □

**Bemerkung 12.1.5** Wir haben oben gesehen, dass eine richtungsdifferenzierbare Funktion $f : U \to E$ nicht notwendig stetig ist, ebenso kann der

Fall eintreten, dass $df(x) : X \to E$ nicht linear ist.
Ist jedoch die Abbildung

$$U \times X \to E, \ (x, r) \mapsto df(x)(r)$$

stetig (d.h. für $x_n \to x_0$ und $r_n \to r_0$ gilt $df(x_n)(r_n) \to df(x_0)(r_0)$), so ist $df(x_0)$ linear.
In der Tat, wegen Bemerkung 12.1.3 bleibt $df(x_0)(r+s) = df(x_0)(r) + df(x_0)(s)$, $r, s \in X$ zu zeigen. Aufgrund der Stetigkeit von $df$ in $(x_0, r)$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \sup_{|u| \le t} \left\| df(x_0 + ts + ur)(r) - df(x_0)(r) \right\|_E = 0$$

und somit auch

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t df(x_0 + ts + ur)(r) du = df(x_0)(r).$$

Ist $g(u) = f(x + ur)$, so gilt nach dem HDI und Bemerkung 12.1.3 ii), dass

$$f(x + tr) - f(x) = \int_0^t g'(u) du = \int_0^t df(x + ur)(r) du.$$

Wenden wir dies auf $x = x_0 + ts$ an, so folgt

$$\frac{1}{t} \big( f(x_0 + ts + tr) - f(x_0 + ts) \big) =$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t df(x_0 + ts + ur)(r) dt \longrightarrow df(x_0)(r) \quad (t \to 0).$$

Also folgt

$$df(x_0)(s + r) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big( f(x_0 + ts + tr) - f(x_0) \big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big( f(x_0 + ts + tr) - f(x_0 + ts) \big)$$

$$+ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big( f(x_0 + ts) - f(x_0) \big) = df(x_0)(r) + df(x_0)(s).$$

Wir bemerken, dass in Teilen der Literatur eine Funktion $f : U \to E$ als stetig differenzierbar bezeichnet wird, wenn $f$ richtungsdifferenzierbar ist und die Abbildung $(x, r) \mapsto df(x)(r)$ stetig ist.
Dieser Begriff ist durchaus sehr vernünftig, aber die Beweise für viele Sätze sind schwer. Wir wählen die gebräuchliche Definition.

**Definition 12.1.6** Es sei $f : U \to E$ eine Funktion.

i) $f$ heißt differenzierbar an $x_0 \in U$, falls $f$ richtungsdifferenzierbar an $x_0$ ist, $df(x_0) : X \to E$ linear und stetig ist, sowie

$$\lim_{t \to 0} \sup_{\|r\|_X \le 1} \Big\| \frac{1}{t}\big(f(x_0 + tr) - f(x_0)\big) - df(x_0)(r) \Big\|_E = 0$$

gilt.

ii) $f$ heißt stetig differenzierbar, falls $f$ an allen $x \in U$ differenzierbar ist und überdies

$$\underset{\substack{\varepsilon>0 \\ x_0 \in U}}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{\|x-x_0\|_X<\delta \\ x \in U}}{\forall} \quad \sup_{\|r\|_X \le 1} \big\| df(x)(r) - df(x_0)(r) \big\|_E < \varepsilon$$

gilt.

**Bemerkung 12.1.7** i) Ist $\mathscr{L}(X,E) := \{T : X \to E : T \text{ linear und stetig}\}$ mit der Norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,E)}$ versehen, welche durch $\|T\| := \sup\limits_{\|r\|_X \le 1} \|T(x)\|_E$ definiert ist, so bedeutet die Bedingung

$$\underset{\substack{\varepsilon>0 \\ x_0 \in U}}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{\|x-x_0\|<\delta \\ x \in U}}{\forall} \quad \sup_{\|r\|_X \le 1} \big\| df(x)(r) - df(x_0)(r) \big\|_E < \varepsilon$$

gerade, dass

$$df : U \to \mathscr{L}(X,E),\ x \mapsto df(x),$$

stetig ist. Denn es ist ja

$$\begin{aligned}\big\| df(x) - df(x_0) \big\| &= \sup_{\|r\|_X \le 1} \big\| \big(df(x) - df(x_0)\big)(r) \big\|_E \\ &= \sup_{\|r\|_X \le 1} \big\| df(x)(r) - df(x_0)(r) \big\|_E.\end{aligned}$$

Wir beweisen nun zwei Charakterisierungen der Differenzierbarkeit. Für den ersten Satz vergleiche 9.1.5

**Satz 12.1.8** *Es sei $f : U \to E$ eine Abbildung und $x_0 \in U$. Dann ist $f$ an $x_0$ genau dann differenzierbar, wenn ein $df(x_0) : X \to E$ stetig und linear existiert mit*

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \underset{\substack{\|x-x_0\|<\delta \\ x \in U}}{\forall} \quad \big\| f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) \big\|_E < \varepsilon \|x - x_0\|_E.$$

**Beweis.** Dies folgt sofort mit den Substitutionen

$$t = \|x - x_0\|, \ r = \frac{1}{\|x - x_0\|}\,(x - x_0) \quad \text{bzw.}$$
$$x = x_0 + tr.$$

□

**Korollar 12.1.9** *Ist $f : U \to E$ differenzierbar an $x_0$, so ist $f$ stetig an $x_0$.*

**Beweis.** Es gilt (mit $\varepsilon = 1$), dass

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\|_E &\leq \lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\|_E + \|df(x_0)(x - x_0)\|_E \\ &\leq \lim_{x \to x_0} \|x - x_0\|_E + \lim_{x \to x_0} \|df(x_0)\|\|x - x_0\|_E = 0.\end{aligned}$$

□

**Satz 12.1.10** *Es sei $f : U \to E$ eine Abbildung. Dann ist $f$ genau dann stetig differenzierbar, wenn $f$ richtungsdifferenzierbar ist und*

*α) $U \times X \to E$, $(x, r) \mapsto df(x)(r)$, stetig ist, sowie*

*β) $df : U \to \mathscr{L}(X, E), x \mapsto df(x)$, stetig ist.*

**Beweis.**

1. Es sei $f : U \to E$ stetig differenzierbar.
   Wegen Bemerkung 12.1.7 bleibt nur α) nachzuweisen. Es sei $x_n \to x_0, r_n \to r_0$. Es folgt

$$\begin{aligned}&\big\|df(x_n)(r_n) - df(x_0)(r_0)\big\|_E \\ &\leq \big\|df(x_n)(r_n) - df(x_0)(r_n)\big\|_E \\ &\quad + \big\|df(x_0)(r_n) - df(x_0)(r_0)\big\|_E \\ &\leq \big\|df(x_n) - df(x_0)\big\|_{\mathscr{L}(X,E)} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}} \|r_k\|_X \\ &\quad + \big\|df(x_0)(r_n - r_0)\big\|_E \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).\end{aligned}$$

2. Es erfülle $f : U \to E$ die Bedingung.
   Wegen Bemerkung 12.1.7 bleibt nur zu zeigen, dass $f$ differenzierbar ist.
   Nach Bemerkung 12.1.5 i) ist $df(x_0) \in \mathscr{L}(X, E)$. Sind $x_0 \in U$ und $\|r\|_X \leq 1$, so folgt mit dem HDI

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{t}\big(f(x_0+tr) - f(x_0)\big) - df(x_0)(r) \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t df(x_0+ur)(r) - df(x_0)(r) du \right\|_E \\ &\leq \left| \frac{1}{t} \int_0^t \left\| \big(df(x_0+ur) - df(x_0)\big)(r) \right\|_E du \right| \\ &\leq \sup_{|u| \leq t} \left\| df(x_0+ur) - df(x_0) \right\|_{\mathscr{L}(X,E)} \stackrel{t \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

□

**Satz 12.1.11** *Es sei $A : X \to E$ linear und stetig. Dann ist $A$ stetig differenzierbar, und es gilt $dA(x) = A$.*

**Beweis.** Es gilt für $\varepsilon > 0$ mit $\delta := 1$ für alle $x, x_0 \in X$, dass

$$\big\| A(x) - A(x_0) - A(x - x_0) \big\|_E = 0 < \varepsilon \|x - x_0\|_X$$

für alle $\|x - x_0\| < \delta$. □

**Beispiel 12.1.12** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2$. Dann gilt $df(x)(r) = 2x_1r_1 + (2x_2 - 4)r_2$.
Man sieht sofort, dass die Abbildung $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, r) \mapsto df(x)(r)$, stetig ist.
(Es sei $x^{(n)} \to x^{(0)}, r^{(n)} \to r^{(0)}$, dann gilt $2x_1^{(n)} r_1^{(n)} + (2x_2^{(n)} - 4) r_2^{(n)} \to$

$2x_1^{(0)}r_1^{(0)} + (2x_2^{(0)} - 4)r_2^{(0)}$.)
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|df(x) - df(x^{(0)})\right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)} \\
&= \sup_{|(r_1,r_2)|\leq 1} \left|df(x)(r) - df(x^{(0)})(r)\right| \\
&\leq \sup_{|(r_1,r_2)|\leq 1} 2|x_1 - x_1^{(0)}||r_1| + 2|x_2 - x_2^{(0)}||r_2| \\
&\leq 2|x_1 - x_1^{(0)}| + 2|x_2 - x_2^{(0)}| \longrightarrow 0 \qquad (x \to x^{(0)}).
\end{aligned}$$

Also ist $df : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ stetig, und somit ist $f$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

## 12.2 Partielle Ableitungen

**Definition 12.2.1** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to E$ eine Abbildung mit Werten in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$. $f$ heißt partiell differenzierbar an $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) := \lim_{t \to x_\nu} \frac{1}{t - x_\nu} \big(f(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, t, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

für alle $1 \leq \nu \leq n$ existiert. $f$ heißt stetig partiell differenzierbar, falls $f$ an allen $x \in U$ partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : U \to E, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$ für alle $1 \leq \nu \leq n$ stetig sind.
Ist $E = \mathbb{R}$, so heißt $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) := \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\big)$ der Gradient von $f$ an $x$.

Ist $E = \mathbb{R}^m$, also $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, so heißt

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die Jabobimatrix von $f$ an $x$.

**Bemerkung 12.2.2** i) Ist wie üblich

$$e_\nu = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0) = (\delta_{\nu k})_{1 \le k \le n}$$

der $\nu$-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ und ist $f : U \to E$ richtungsdifferenzierbar an $x$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) = df(x)(e_\nu),\ 1 \le \nu \le n.$$

Dies folgt aus

$$df(x)(e_\nu) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+te_\nu) - f(x)\big)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu + t, x_{\nu+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\big)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x).$$

Ist also $df(x) : \mathbb{R}^n \to E$ linear, so gilt

$$\begin{aligned} df(x)(r) &= df(x)\Big(\sum_{\nu=1}^n r_\nu e_\nu\Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^n r_\nu df(x)(e_\nu) = \sum_{\nu=1}^n r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x). \end{aligned}$$

Ist zusätzlich $E = \mathbb{R}$, so gilt also

$$df(x)(r) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big)\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(x) \cdot r.$$

Damit ist also $\operatorname{grad} f(x)$ die darstellende $1\times n$-Matrix, die $df(x)$ bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^n$ darstellt.

Ist $f : U \to R^m$ mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, so ist $f$ genau dann richtungsdifferenzierbar (differenzierbar, stetig differenzierbar, partiell differenzierbar, stetig partiell differenzierbar), wenn dies für alle $f_\nu, 1 \le \nu \le n$,

gilt.
In diesem Fall ist

$$df(x)(r) = \begin{pmatrix} df_1(x)(r) \\ \vdots \\ df_m(x)(r) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \ r \in X.$$

Falls zusätzlich also $U \subset \mathbb{R}^n$, somit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, mit $f_\nu : U \to \mathbb{R}, 1 \leq \nu \leq n$, so gilt also

$$df(x)(r) = \begin{pmatrix} df_1(x)(r) \\ \vdots \\ df_m(x)(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\nu}(x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \dfrac{\partial f_m}{\partial x_\nu}(x) \end{pmatrix} = J_f(x) \cdot r.$$

$J_f(x)$ ist also die $m \times n$-Matrix, die $df(x)$ bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ darstellt.

ii) (Geometrische Bedeutung des Gradienten) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in U$. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so gilt für alle $r \in \mathbb{R}^n, |r| = 1$, dass

$$|\operatorname{grad} f(x_0) \cdot r| \leq \left|\operatorname{grad} f(x_0)\right||r|$$

und

$$\left|\operatorname{grad} f(x_0) \cdot \frac{1}{|\operatorname{grad} f(x_0)|} \operatorname{grad} f(x_0)\right| = \left|\operatorname{grad} f(x_0)\right|.$$

Ist wieder $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x_0+tr)$, so ist also mit $\hat{r} = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(x_0)|} \operatorname{grad} f(x_0)$

$$\sup_{|r|=1} \left|g_r'(0)\right| = \left|g_{\hat{r}}'(0)\right|,$$

also ist $\operatorname{grad} f(x_0)$ die Richtung des stärksten Anstieges von $f$ in $x_0$, und $|\operatorname{grad} f(x_0)|$ ist dieser Anstieg.

iii) Eigentlich hängt die Definition des Gradienten vom gewählten Skalarprodukt ab, da wir hier aber immer das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ verwenden, wollen wir das nicht weiter verfolgen.

**Satz 12.2.3** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to E$ eine Funktion. Dann sind äquivalent*

*i) $f$ ist stetig partiell differenzierbar,*

*ii) $f$ ist stetig differenzierbar.*

*In diesem Falle gilt $df(x)(r) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x), x \in U, r \in \mathbb{R}^n$.*

**Beweis.** ii) $\Rightarrow$ i) wird durch obige Bemerkung, Teil i), impliziert, denn $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) = df(x)(e_\nu), 1 \leq \nu \leq n$.
i) $\Rightarrow$ ii): 1. Wir zeigen zunächst, dass $f$ richtungsdifferenzierbar ist und $df(x)(r) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$ gilt. Dazu sei $x \in U$ und $r \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\big(f(x+tr) - f(x)\big) \\
&= \frac{1}{t}\Big(f\Big(x + t\sum_{k=1}^{n} r_k e_k\Big) - f(x)\Big) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{t}\Big(f\Big(x + t\sum_{k=1}^{n-\nu-1} r_k e_k + t r_{n-\nu} e_{n-\nu}\Big) - f\big(x + t\sum_{k=1}^{n-\nu-1} r_k e_k\big)\Big),
\end{aligned}$$

wobei $\sum\limits_{\nu=1}^{0} := 0$.
Für $1 \leq \nu \leq n$ gilt nach dem HDI

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\Big(f\big(\big(x + t\sum_{k=1}^{n-\nu-1} r_k e_k\big) + t r_{n-\nu} e_{n-\nu}\big) - f\big(x + t\sum_{k=1}^{n-\nu-1} r_k e_k\big)\Big) \\
&= \frac{1}{t} r_{n-\nu} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}}\big(x + t\sum_{k=1}^{n-\nu-1} r_k e_k + u r_{n-\nu} e_{n-\nu}\big) du \\
&\longrightarrow r_{n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}}(x) \quad (t \to 0),
\end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tr) - f(x)\big) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} r_{n-\nu} \frac{\partial f}{\partial x_{n-\nu}}(x) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x).
\end{aligned}$$

Also ist $f$ richtungsdifferenzierbar mit

$$df(x)(r) = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x).$$

Da alle Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : U \to E$ stetig sind, ist auch $(x,r) \mapsto \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) = df(x)(r)$ stetig.
Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\|df(x) - df(x_0)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,E)} \\
&= \sup_{|r|\le 1} \Big\| \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0) \Big\|_E \\
&\le \sum_{\nu=1}^{n} \Big\| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0) \Big\|_E \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 12.2.4** *Ist $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so ist $f$ genau dann stetig differenzierbar auf $U$, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} : U \to \mathbb{R}, 1 \le \nu \le n, 1 \le \mu \le m$ existieren und stetig sind. In diesem Fall gilt*

$$\begin{aligned}
df(x)(r) &= \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu}(x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{\partial f_m}{\partial x_\nu}(x) \end{pmatrix} = J_f(x) \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Beispiel 12.2.5** Es sei $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ und $E = \mathbb{R}^2, f = \binom{f_1}{f_2} : U \to \mathbb{R}^2, f_1(x) = x_1^2 + x_2^2, f_2(x) = \frac{x_3}{x_1 - 1}$. Dann gilt

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ \frac{-x_3}{(x_1-1)^2} & 0 & \frac{1}{x_1 - 1} \end{pmatrix},$$

also

$$df(x)(r) = J_f(x) \cdot r = \begin{pmatrix} 2x_1 r_1 + 2x_2 r_2 \\ \\ \dfrac{-x_3 r_1}{(x_1-1)^2} + \dfrac{r_3}{x_1 - 1} \end{pmatrix}$$

## 12.3 Die Kettenregel

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_2 \\ x_2 + x_1^3 \end{pmatrix}$
und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(y) = y_1 + y_2 + y_3^3$.
Dann ist

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $J_g(y) = (1, 1, 3y_3^2)$. Weiter ist $g \circ f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2 + (x_2 + x_1^3)^3$ und damit

$$J_{g\circ f}(x) = \big(2x_1 + 3(x_2 + x_1^3)^2 3x_1^2,\ 2x_2 + 1 + 3(x_2 + x_1^3)^2\big).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} & J_g\big(f(x)\big) \cdot J_f(x) \\ &= \Big(1, 1, 3(x_2 + x_1^3)^2\Big) \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \big(2x_1 + 3(x_2 + x_1^3)^2 3x_1^2,\ 2x_2 + 1 + 3(x_2 + x_1^3)^2\big), \end{aligned}$$

also gilt $J_{g\circ f}(x) = J_g\big(f(x)\big) \cdot J_f(x)$ und somit $d(g \circ f)(x) = dg\big(f(x)\big) \circ df(x)$. Dass dies kein Zufall ist, zeigt

**Satz 12.3.1** *(Kettenregel)* *Es sei $f : U \to E$ an $x_0 \in U$ differenzierbar, $V \supset f(U)$ offen, und $g : V \to F$ differenzierbar an $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar an $x_0$, und es gilt*

$$d(g \circ f)(x_0) = dg\big(f(x)\big) \circ df(x_0).$$

*Sind $g$ und $f$ sogar stetig differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ stetig differenzierbar.*
*Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ und $E = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}^k$, so gilt*

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g\big(f(x_0)\big) \cdot J_f(x_0).$$

**Beweis.** Wir verwenden die Charakterisierung aus Satz 12.1.8
Zunächst ist $dg\big(f(x_0)\big) \circ df(x_0) : X \to F$ stetig und linear als Verknüpfung stetiger und linearer Abbildungen.
Der Kürze halber setzen wir $y_0 := f(x_0)$ und $y := f(x)$.
Es sei $1 > \varepsilon > 0$ und

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\|dg(y_0)\|_{\mathscr{L}(E,F)} + \|df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,E)} + 1}.$$

Dann existiert $\tilde{\delta} > 0$ mit

$\alpha)$ $\|g(y) - g(y_0) - dg(y_0)(y - y_0)\|_F < \tilde{\varepsilon}\|y - y_0\|_E$ für alle $\|y - y_0\|_E < \tilde{\delta}$.

Dann wähle $\delta > 0$ mit

$\beta)$ $\|f(x) - f(x_0)\|_E < \tilde{\delta}$ für $\|x - x_0\|_X < \delta$, und

$\gamma)$ $\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\|_E < \tilde{\varepsilon}\|x - x_0\|_X$ für $\|x - x_0\|_X < \delta$.

Ist nun $x \in U$ und $\|x - x_0\|_X < \delta$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\big\|g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) - dg\big(f(x_0)\big)\big(df(x_0)(x-x_0)\big)\big\|_F \\
&\le \big\|g(y) - g(y_0) - dg(y_0)(y-y_0)\big\|_F \\
&\quad + \big\|dg(y_0)\big(f(x) - f(x_0)\big) - dg(y_0)\big(df(x_0)(x-x_0)\big)\big\|_F \\
&\le \tilde{\varepsilon}\|y - y_0\|_E + \big\|dg(y_0)\big\|_{\mathscr{L}(E,F)}\big\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)\big\|_E \\
&\le \tilde{\varepsilon}\Big(\big\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)\big\|_E + \big\|df(x_0)(x-x_0)\big\|_E\Big) + \frac{\varepsilon}{3}\|x - x_0\|_X \\
&\le \tilde{\varepsilon}\Big(\tilde{\varepsilon}\|x - x_0\|_X + \|df(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,E)}\|x - x_0\|_X\Big) + \frac{\varepsilon}{3}\|x - x_0\|_X \\
&\le \varepsilon\,\|x - x_0\|_X.
\end{aligned}$$

Sind $f$ und $g$ stetig differenzierbar, so folgt

$$\begin{aligned}
&\big\|dg\big(f(x)\big) \circ df(x) - dg\big(f(x_0)\big) \circ df(x_0)\big\|_{\mathscr{L}(X,F)} \\
&\le \big\|dg\big(f(x)\big) \circ df(x) - dg\big(f(x_0)\big) \circ df(x)\big\|_{\mathscr{L}(X,F)} \\
&\quad + \big\|dg\big(f(x_0)\big) \circ df(x) - dg\big(f(x_0)\big) \circ df(x_0)\big\|_{\mathscr{L}(X,F)} \\
&\le \big\|dg\big(f(x)\big) - dg\big(f(x_0)\big)\big\|_{\mathscr{L}(E,F)}\big\|df(x)\big\|_{\mathscr{L}(X,E)} \\
&\quad + \big\|dg\big(f(x_0)\big)\big\|_{\mathscr{L}(E,F)}\big\|df(x) - df(x_0)\big\|_{\mathscr{L}(X,E)} \\
&\quad \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 12.3.2** *Es seien $f, g : U \to E$ differenzierbar an $x_0 \in U$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt $d(\lambda f + g)(x_0) = \lambda df(x_0) + dg(x_0)$.*

**Beweis.** Es sei $F : U \to E^2, F(x) = \big(f(x), g(x)\big), G : E^2 \to E, G(y_1, y_2) = \lambda y_1 + y_1$.
Dann gilt $dG(y_1, y_2)(s_1, s_2) = \lambda s_1 + s_2$ (nach 12.1.11) und $dF(x_0)(r) = \big(df(x_0)(r), dg(x_0)(r)\big)$, also nach der Kettenregel

$$d(\lambda f + g)(x_0)(r) = dG\big(F(x_0)\big)\big(dF(x_0)(r)\big) = \lambda df(x_0)(r) + dg(x_0)(r).$$

□

**Bemerkung 12.3.3** i) Mit der Kettenregel können wir auch direkt die Produktregel ableiten. Ist $I$ ein Intervall. Es seien $f : I \to \mathbb{K}$ und $g : I \to E$ in $x_0 \in I$ differenzierbare Abbildungen, so setze $F : I \to \mathbb{K} \times E, F(x) = \big(f(x), g(x)\big)$, und $G : \mathbb{K} \times E \to E,\ G(\lambda, y) = \lambda y$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} dF(x_0)(r) &= \big(df(x_0)(r), dg(x_0)(r)\big) \\ &= \big(rf'(x_0), rg'(x_0)\big) \end{aligned}$$

und

$$dG(\lambda, y)(t, s) = \lambda s + ty.$$

Es folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= d(f \cdot g)(x_0)(1) = dG\big(F(x_0)\big)\big(dF(x_0)(1)\big) \\ &= dG\big(f(x_0), g(x_0)\big)\big(f'(x_0), g'(x_0)\big) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0). \end{aligned}$$

**Korollar 12.3.4** *Es sei $f : U \to E$ stetig differenzierbar und $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ stetig differenzierbar.*
*Dann ist $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to E$ stetig differenzierbar, und es gilt*

$$(f \circ \gamma)'(t) = df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big).$$

*Ist insbesondere $\gamma : [0, 1] \to U, \gamma(t) = a + t(b - a)$, so gilt*

$$(f \circ \gamma)'(t) = df\big(a + t(b - a)\big)(b - a),$$

*siehe 12.1.3 ii).*

**Beweis.** Es gilt nach der Kettenregel, dass $f \circ \gamma$ stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= d(f \circ \gamma)(t)(1) \\ &= df\big(\gamma(t)\big)\big(d\gamma(t)(1)\big) \\ &= df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big).\end{aligned}$$

Im Falle $\gamma(t) = a + t(b-a)$ ist $\gamma'(t) = b - a$. □

**Satz 12.3.5** *(MWS) Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a, b \in U$ mit $[a, b] := \{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\} \subset U$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a).$$

*Ist $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt $f(b) - f(a) = \nabla f(\xi) \cdot (b-a)$.*

**Beweis.** Wir wenden den MWS einer Veränderlichen auf $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(t) = f\big(a + t(b-a)\big)$ an. Dann gilt $g'(t) = df\big(a + t(b-a)\big)(b-a)$, also existiert $\eta \in [0,1]$ mit $f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(\eta)$. Sei $\xi = a + \eta(b-a) \in [a, b]$. □

Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stetige Abbildung. $\gamma$ heißt stückweise stetig differenzierbare Kurve, falls $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ existieren, so dass

$$\gamma\big|_{[t_\nu, t_{\nu+1}]} : [t_\nu, t_{\nu+1}] \to U,\ 0 \le \nu \le n-1,\ \text{stetig}$$

differenzierbar ist. Wir sagen $\gamma$ verbinde $a \in U$ mit $b \in U$, wenn $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$.

**Bemerkung 12.3.6** i) Jeder Polygonzug ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve.

ii) Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma$ definieren wir

$$\widehat{\gamma'}(t) = \begin{cases} (\gamma\big|_{[t_\nu, t_{\nu+1}]})'(t) : & t \in [t_\nu, t_{\nu+1}),\ 0 \le \nu \le n-1, \\ (\gamma\big|_{[t_{n-1}, t_n]})'(t) : & t = t_n = \beta \end{cases}.$$

Der Kürze halber schreiben wir $\gamma'(t)$ anstelle von $\widehat{\gamma'}(t)$.

Der HDI liefert

$$\begin{aligned}
\gamma(\beta)-\gamma(\alpha) &= \sum_{\nu=0}^{n-1}\gamma(t_{\nu+1})-\gamma(t_\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\big(\gamma\big|_{[t_\nu,t_{\nu+1}]}\big)'(t)dt\\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\gamma'(t)dt\\
&= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\gamma'(t)dt.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen

**Satz 12.3.7** *(HDI-Version)* *Es sei $f: U \to E$ stetig differenzierbar und $\gamma : [\alpha,\beta] \to U$ sei eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, welche $a \in U$ und $b \in U$ verbindet.*
*Dann gilt*

$$f(b)-f(a)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt.$$

**Beweis.** $\varrho : [\alpha,\beta] \to E, \varrho(t) = f \circ \gamma(t)$ ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\varrho(\alpha) = f(a), \varrho(\beta) = f(b)$. Wegen $\varrho'(t) = df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)$ folgt die Behauptung aus obiger Bemerkung angewendet auf $\varrho$ anstelle von $\gamma$. □

**Korollar 12.3.8** *Es sei $f : U \to E$ stetig differenzierbar, $a, b \in U$, so dass $[a, b] = \big\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\big\} \subset U$. Dann gilt*

$$f(b)-f(a)=\int\limits_0^1 df\big(a+t(b-a)\big)(b-a)dt$$

*und*

$$\big\|f(b)-f(a)\big\|_E \le \|b-a\|_X \sup_{\xi\in[a,b]}\big\|df(\xi)\big\|_{\mathscr{L}(X,E)}.$$

**Korollar 12.3.9** *Ist die offene Teilmenge $U$ von $X$ zusammenhängend, $f : U \to E$ stetig differenzierbar mit $df(x) = 0,\ x \in U$, so ist $f$ konstant.*

**Beweis.** Da $U$ wegen 9.4.7 auch polygonzusammanhängend ist, ergibt sich die Behauptung aus dem HDI 12.3.7. □

**Bemerkung 12.3.10** Der Beweis von 9.4.1 zeigt, dass es reicht, $f$ als richtungsdifferenzierbar vorauszusetzen,

Für Funktionen definiert auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ liest sich 12.3.8 als

**Korollar 12.3.11** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und es seien $a, b \in U$ mit $[a, b] \subset U$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_0^1 \sum_{\nu=1}^n (b_\nu - a_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\big(a + t(b-a)\big) dt \\ &= \sum_{\nu=1}^n (b_\nu - a_\nu) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\big(a + t(b-a)\big) dt \end{aligned}$$

*und*

$$\begin{aligned} \big|f(b) - f(a)\big| &\leq |b-a| \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(a + t(b-a)\big), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(a + t(b-a)\big) \right| \\ &= |b-a| \sup_{\xi \in [a,b]} \big| \bigtriangledown f\big(\xi\big) \big| \end{aligned}$$

**Bemerkung 12.3.12** Eine stetige Abbildung $\omega : U \to \mathscr{L}(X, E)$ heißt Pfaffsche Form auf $U$ (mit Werten in $E$). Mit dieser Bezeichnung ist für stetig differenzierbares $f : U \to E$ das Differential $df : U \to \mathscr{L}(X, E)$ eine solche Pfaffsche Form. Man definiert für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ das Kurvenintegral einer Pfaffschen Form $\omega$ als

$$\int_\gamma \omega := \int_\alpha^\beta \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) dt.$$

Also liest sich unser Hauptsatz, wenn die stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma$ den Punkt $a$ mit dem Punkt $b$ verbindet, elegant als

$$f(b) - f(a) = \int\limits_{\gamma} df.$$

Das Kurvenintegral hat folgende schöne Eigenschaften:

$$\int\limits_{\gamma} \lambda\omega_1 + \omega_2 = \lambda \int\limits_{\gamma} \omega_1 + \int\limits_{\gamma} \omega_2 \qquad \text{sowie} \int\limits_{-\gamma} \omega = -\int\limits_{\gamma} \omega,$$
$$\text{wenn} - \gamma : [\alpha, \beta] \to U, \ \ -\gamma(t) = \gamma(\alpha + \beta - t).$$

Beachte hierbei, dass $-\gamma$ den Punkt $b$ mit dem Punkt $a$ verbindet, wenn $\gamma$ den Punkt $a$ mit dem Punkt $b$ verbindet.

In diesem Themenkreis gibt es wichtige Fragen:

1. Wann ist eine Pfaffsche Form $\omega$ das Differential einer Funktion $f$ (d.h. wenn gilt $\omega = df$ für ein $f : U \to E$?

2. Wann ist $\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\tilde{\gamma}} \omega$ für alle Kurven $\gamma, \tilde{\gamma}$, welche in $U$ verlaufen und $a$ mit $b$ verbinden ?

**Beispiel 12.3.13** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1 e^{x_2}$.
Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = e^{x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 e^{x_2}$$

und somit für $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} ae^b &= f(a,b) - f(0,0) \\ &= \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(t(a,b)\big)dt \cdot a + \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(t(a,b)\big)dt \cdot b \\ &= a\int\limits_0^1 e^{tb}dt + b\int\limits_0^1 tae^{tb}dt = \int\limits_0^1 (a + abt)e^{tb}dt. \end{aligned}$$

## 12.4 Umkehrsatz und implizite Funktionen

1. Betrachten wir eine affin lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = y_0 + T(x)$, wobei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear ist. Dann ist $f$ stetig differenzierbar und $df(x) = T$. Die Funktion $f$ ist genau dann bijektiv, wenn $T$ eine invertierbare Abbildung ist ($f^{-1}$ ist dann durch $f^{-1}(y) = T^{-1}(y - y_0)$ gegeben).

2. Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)$ (diese entspricht der Abbildung: $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \tilde{f}(z) = e^z$).
Wir haben in 5.4.7 gezeigt, dass für $x_0 \in \mathbb{R}$ die eingeschränkte Abbildung $f|_{\mathbb{R}\times(x_0,x_0+2\pi)}$ injektiv ist.
Die Jacobimatrix von $f$ ist

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \det J_f(x) &= e^{x_1} \cos^2 x_2 - \big(e^{x_1} \sin x_2 \cdot (-e^{x_1} \sin x_2)\big) \\ &= e^{x_1} \neq 0. \end{aligned}$$

Also ist $J_f(x)$ regulär und somit ist $df(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^2$.
Trotzdem ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv!

Wir können also maximal zeigen, dass, wenn $df(x_0)$ invertierbar, folgt, dass $f$ in einer Umgebung von $x_0$ invertierbar ist. Und das wollen wir tun.
Kümmern wir uns zunächst um (affin) lineare Abbildungen.

Es seien $(X, \|\cdot\|_X), (E, \|\cdot\|_E)$ vollständige normierte Räume (über $\mathbb{R}$). Wie üblich sei $\mathscr{L}(X, E) := \{T : X \to E \text{ linear und stetig}\}$. Versehen mit der Norm $\|T\| := \|T\|_{\mathscr{L}(X,E)} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_E$, ist $\big(\mathscr{L}(X, E), \|\cdot\|\big)$ ein vollständiger normierter Raum.
$T \in \mathscr{L}(X, E)$ heißt *Isomorphismus*, falls $T$ bijektiv ist und $T^{-1}$ ebenfalls stetig ist. Da Umkehrabbildungen linearer Abbildungen wieder linear sind, ist $T$ also genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $S \in \mathscr{L}(E, X)$ existiert

mit $S \circ T = \mathrm{id}_X$ und $T \circ S = \mathrm{id}_E$. Dann ist natürlich $S = T^{-1}$, siehe 1.1.39. Es sei nun $E = X$. Ist $T \in \mathscr{L}(X, X)$ ein Isomorphismus, so heißt $T^{-1}$ die *Inverse* von $T$ und $T$ heißt *invertierbar*. Wir setzen

$$G_{\mathscr{L}(X,X)} := \big\{T \in \mathscr{L}(X, X) : T \text{ ist invertierbar}\big\}.$$

Somit besteht $G_{\mathscr{L}(X,X)}$ aus allen linearen und stetigen Abbildungen $T : X \to X$ welche linear und bijektiv sind, so dass $T^{-1}$ ebenfalls stetig ist. $(G_{\mathscr{L}(X,X)}, \circ)$ ist offensichtlich eine Gruppe, ihr Einselement ist $\mathrm{id}_X$ und die Inverse zu $S \circ T$ ist $T^{-1} \circ S^{-1}$.

Ist $T \in \mathscr{L}(X, X)$, so sei

$$\begin{aligned} &T^0 := \mathrm{id}_X \\ &T^1 := T \text{ und sukzessive} \\ &T^n := T \circ T^{n-1} = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n-\mathrm{mal}} \end{aligned}$$

gesetzt. Aus $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ folgt

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Satz 12.4.1** *(Neumannsche Reihe) Ist $T : X \to X$ eine lineare Kontraktion, d.h. $\|T\| < 1$, dann ist $\mathrm{id} - T$ invertierbar und $(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu$. Weiter gilt*

$$\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \quad \textit{und}$$

$$\|\mathrm{id} - (\mathrm{id} - T)^{-1}\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

**Beweis.** (vgl. 2.1.13 und 4.2.8) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{\nu=n}^{\infty} \|T^\nu\| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \|T\|^\nu = \frac{\|T\|^n}{1-\|T\|}$, somit ist insbesondere $\sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu$ absolut konvergent, also konvergent. Wegen

$$(\mathrm{id} - T) \circ \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu = \mathrm{id} \circ \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu - T \circ \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} T^\nu = \mathrm{id} \qquad \text{und}$$

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu\Big) \circ (\mathrm{id} - T) = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu\Big) \circ \mathrm{id} + \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu\Big) \circ (-T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} T^\nu = \mathrm{id},$$

ist $\mathrm{id} - T$ invertierbar, und es gilt $(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} T^\nu$. Es folgt weiter

$$\left\|(\mathrm{id} - T)^{-1}\right\| = \Big\| \sum_{\nu=0}^{\infty} T^\nu \Big\| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|T^\nu\| \leq \tfrac{1}{1-\|T\|} \text{ sowie}$$

$$\|\mathrm{id} - (\mathrm{id} - T)^{-1}\| = \Big\| - \sum_{\nu=1}^{\infty} T^\nu \Big\| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|T^\nu\| \leq \tfrac{\|T\|}{1-\|T\|}.$$

□

**Bemerkung 12.4.2** i) Dieses Ergebnis kann man auch anders aufschreiben: Ist $S \in \mathscr{L}(X,X)$, $\|\mathrm{id} - S\| < 1$, d.h. $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|x - S(x)\|_X < 1$, so ist $S$ invertierbar, und es gilt $S^{-1} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\mathrm{id} - S)^\nu$ sowie $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|\mathrm{id}-S\|}$.

ii) Ist $A$ eine reelle $n \times n$-Matrix mit $\|A\| := \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \leq 1}} |Ax| < 1$, so ist $E_n - A$ eine reguläre Matrix, und die inverse Matrix ist durch

$$(E_n - A)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^\nu$$

gegeben. Setze hierzu einfach $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(x) = A \cdot x$

**Satz 12.4.3** *$G_{\mathscr{L}(X,X,)}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,X)$ und die Inversion*

$$\mathrm{Inv} : G_{\mathscr{L}(X,X)} \to G_{\mathscr{L}(X,X)},\ T \mapsto T^{-1},$$

*ist stetig.*

**Beweis.**

1. Es sei $G := G_{\mathscr{L}(X,X)}$ und $T_0 \in G$. Es sei $\varepsilon := \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$, und es sei $T \in U_\varepsilon(T_0)$, das heißt $T \in \mathscr{L}(X,X)$ und $\|T - T_0\| < \varepsilon$.
Wegen $T_0^{-1} \circ T = \mathrm{id} - \big( - T_0^{-1} \circ (T - T_0)\big)$ und $\big\| - T_0^{-1} \circ (T - T_0)\big\| \leq \|T_0^{-1}\| \|T - T_0\| < 1$ folgt mit der Neumannschen Reihe, dass $T_0^{-1} \circ T \in G$. Es folgt, dass auch $T = T_0 \circ (T_0^{-1} \circ T)$ invertierbar ist, also $T \in G$ gilt. Insgesamt erhalten wir $U_\varepsilon(T_0) \subset G$, also ist $G$ offen.

2. Es sei $T_0 \in G$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $G$ mit $T_n \to T_0$.
   Dann gilt

$$\begin{aligned}\big\|\mathrm{Inv}(T_0) - \mathrm{Inv}(T_n)\big\| &= \big\|T_0^{-1} - T_n^{-1}\big\| \le \big\|T_0^{-1}\big\|\big\|\mathrm{id} - T_0 \circ T_n^{-1}\big\| \\ &= \big\|T_0^{-1}\big\|\big\|\mathrm{id} - (T_n \circ T_0^{-1})^{-1}\big\| \\ &= \big\|T_0^{-1}\big\|\Big\|\mathrm{id} - \Big(\mathrm{id} - \big(\mathrm{id} - T_n \circ T_0^{-1}\big)\Big)^{-1}\Big\|\end{aligned}$$

   Setzen wir nun $S_n := \mathrm{id} - T_n \circ T_0^{-1}$, so gilt $\|S_n\| \to 0$. Ohne Einschränkung sei also $\|S_n\| < 1,\ n \in \mathbb{N}$. Wir wenden die zweite Ungleichung aus dem Satz über die Neumannsche Reihe auf $S_n$ an und erhalten, dass

$$\begin{aligned}\Big\|\mathrm{id} - \Big(\mathrm{id} - \big(\mathrm{id} - T_n \circ T_0^{-1}\big)\Big)^{-1}\Big\| &= \Big\|\mathrm{id} - \Big(\mathrm{id} - S_n\Big)^{-1}\Big\| \\ &\le \frac{\|S_n\|}{1 - \|S_n\|} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

   Wir erhalten $\big\|\mathrm{Inv}(T_0) - \mathrm{Inv}(T_n)\big\| \longrightarrow 0$.

□

**Bemerkung 12.4.4** Aus obigem Satz folgt:
Es sei $A$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle Matrizen $B$ mit $\sup_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon$ gilt, dass auch $B$ invertierbar ist. Hierzu beachte man, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent sind, also gilt mit einem $C > 0$, dass

$$\frac{1}{C} \sup_{i,j} |a_{ij}| \le \sup_{|x|\le 1} |Ax| \le C \sup_{i,j} |a_{ij}|.$$

Ist also $(B^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Matrizen, deren Einträge gegen die Einträge von $A$ konvergieren, so sind ab einem $N$ die $B^{(n)}$ invertierbar. Aufgrund der Stetigkeit von Inv konvergieren die Einträge der Inversen der $B^{(n)}$ gegen die Einträge von $A^{-1}$.

In Korollar 9.3.7 haben wir gezeigt, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ($I$ ein Intervall) streng monoton und damit $f : I \to f(I)$ bijektiv ist, falls $f'(x) \neq 0, x \in I$. Das einführende Beispiel zeigt, dass dieses Ergebnis selbst für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nur lokal gelten kann. Es gilt aber der

**Satz 12.4.5** *(über die Umkehrfunktion) Es sei $f : U \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $x_0 \in U$ und $df(x_0) : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass mit $V := U_\varepsilon(X_0)$ und $W := f\big(U_\varepsilon(x_0)\big)$ gilt:*

*i) $W$ ist offen, $f : V \to W$ ist bijektiv und $f^{-1} : W \to V$ ist stetig differenzierbar.*

*ii) $df(x)$ ist ein Isomorphismus für alle $x \in V$, die Umkehrabbildung ist $df(x)^{-1} = df^{-1}(f(x))$, also gilt*

$$df^{-1}(y) = df\big(f^{-1}(y)\big)^{-1},\ y \in W.$$

**Beweis.** Wir nehmen ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$ an (ansonsten betrachte $\tilde{f}(x) = f(x_0 - x) - f(x_0)$).

Weiter nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $X = Y$ und $df(0) = \mathrm{id}_X$ (ansonsten betrachte $\tilde{f} = \underbrace{df(0)^{-1}}_{=:A} \circ f$, denn dann liefert die Kettenregel

$$\begin{aligned} d\tilde{f}(0)(r) &= dA\big(f(0)\big)\big(df(0)(r)\big) \\ &= A\big(df(0)(r)\big) = r \end{aligned}$$

aufgrund der Linearität von $A = df(0)^{-1}$, also $d\tilde{f}(0) = \mathrm{id}_X$). Da $G_{\mathscr{L}(X,X)}$ offen ist, existiert ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, so dass mit $df(0) = \mathrm{id}$ auch $df(x), x \in U_{\tilde{\varepsilon}}(0)$, invertierbar ist.

Wir wollen nun Satz 4.2.27 anwenden. Dazu sei

$$\phi : U \to X,\ \phi(x) = f(x) - x.$$

Da $f$ stetig differenzierbar ist, muss auch $\phi$ stetig differenzierbar sein, und wegen $df(0) = \mathrm{id}$ ist $d\phi(0) = 0$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\big\|d\phi(\xi)\big\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $\xi \in U$ mit $\|\xi\|_X < \varepsilon$. Ohne Einschränkung sei $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ und $U_\varepsilon(0) \subset U$.

Für $x, y \in U_\varepsilon(0)$ folgt mit 12.3.8, dass

$$\big\|\phi(x) - \phi(y)\big\|_X \leq \|x - y\|_X \sup_{\xi \in [x,y]} \big\|d\phi(\xi)\big\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_X.$$

Also ist $\phi : U_\varepsilon(0) \to X$ eine Kontraktion, wir können also Satz 4.2.27 anwenden und es folgt mit $V := U_\varepsilon(0)$ und $W := f(V)$:

i) $W$ ist offen in $X$,

ii) $f : V \to W$ ist bijektiv,
iii) $f^{-1} : W \to V$ ist stetig.
Wir müssen noch zeigen, dass $f^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist und die Formel gilt. Es sei dazu $y_0 \in W$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann folgt für alle $x \in V$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x - x_0\|_X &\geq \big\|\phi(x) - \phi(x_0)\big\|_X = \big\|x - f(x) - x_0 + f(x_0)\big\|_X \\ &\geq \|x - x_0\|_X - \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_X\end{aligned}$$

also

$$\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_X \geq \frac{1}{2}\|x - x_0\|_X.$$

Hieraus ergibt sich für $y \in W, y \neq y_0$, mit $f(x) = y, f(x_0) = y_0$ mit 12.1.8

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|y - y_0\|_X}\big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - df(x_0)^{-1}(y - y_0)\big\|_X \\[2ex] &\leq \frac{1}{\|y - y_0\|_X}\big\|df(x_0)^{-1}\big\|\big\|df(x_0)\big(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\big) - (y - y_0)\big\|_X \\[4ex] &\leq \frac{2\big\|df(x_0)^{-1}\big\|}{\|x - x_0\|_X}\big\|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\big\|_X \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Da auch $f^{-1}$ stetig ist, gilt $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) \to f(x_0) \Leftrightarrow y \to y_0$, also folgt

$$\frac{1}{\|y - y_0\|_X}\big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - df(x_0)^{-1}(y - y_0)\big\|_X \longrightarrow 0 \quad (y \to y_0).$$

Mit 12.1.8 folgt, dass $f^{-1}$ an $f(x_0) = y_0 \in W$ differenzierbar ist und

$$df^{-1}(y_0) = df^{-1}(f(x_0)) = df(x_0)^{-1} = df\big(f^{-1}(y_0)\big)^{-1}$$

gilt. Die Stetigkeit von $df^{-1} : W \to \mathscr{L}(X, X)$ folgt aus $df^{-1} = \mathrm{Inv} \circ df \circ f^{-1}$ mit 12.4.3 $\square$

**Korollar 12.4.6** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und es gelte für ein $x_0 \in U$, dass die Matrix*

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

*regulär sei.*
*Dann existiert ein* $\varepsilon > 0$, *so dass mit* $V := U_\varepsilon(x_0)$ *und* $W := f\big(U_\varepsilon(x_0)\big)$ *gilt:*

*i)* $W$ *ist offen,* $f : V \to W$ *ist bijektiv,* $f^{-1} : W \to V$ *ist stetig differenzierbar.*

*ii)* $J_f(x)$ *ist regulär für alle* $x \in V$ *und* $J_{f^{-1}}(y) = J_f\big(f^{-1}(y)\big)^{-1}, y \in W$.

**Beispiel 12.4.7** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \big(|x|^2, x_2, x_3\big)$. Dann ist $f$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit liefert dieser Satz: Zu jedem $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1^{(0)} \neq 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f : U_\varepsilon(x^{(0)}) \to f(U_\varepsilon(x^{(0)}))$ bijektiv ist.

**Beispiel 12.4.8** Es sei $U = X = Y = C\big([0,1], \mathbb{R}\big) = \big\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\big\}$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, welche durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{[0,1]} |f|$ definiert ist.
Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wie betrachten die Abbildung

$$H : C\big([0,1]\big) \to C\big([0,1]\big), H(f) = h \circ f,$$

und behaupten, dass $H$ stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$dH : C\big([0,1]\big) \to \mathscr{L}\Big(C\big([0,1]\big), C\big([0,1]\big)\Big),\ dH(f)(g) = (h' \circ f) \cdot g.$$

Um zu zeigen, dass $H$ differenzierbar an $f_0$ ist, müssen wir

$$0 = \lim_{t \to 0} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left\| \frac{1}{t}\big(h \circ (f_0 + tg) - h \circ f_0\big) - h' \circ f_0 \cdot g \right\|_\infty$$

$$= \lim_{t \to 0} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1 \\ x \in [0,1]}} \left| \frac{1}{t}\Big(h\big(f_0(x) + tg(x)\big) - h\big(f_0(x)\big)\Big) - h'\big(f_0(x)\big)g(x) \right|$$

$$\leq \lim_{t \to 0} \sup_{\substack{|z| \leq R \\ |s| \leq 1}} \left| \frac{1}{t}\big(h(z + ts) - h(z)\big) - h'(z)s \right| \quad \text{mit } R = \sup_{[0,1]} |f|$$

nachweisen. Dazu schreiben wir unter Benutzung des Mittelwertsatzes

$$h(z+ts) - h(z) = h'(\xi)ts$$

mit einem $\xi$ zwischen $z$ und $z + ts$.
Da $h'$ auf $[-(R+1), R+1]$ gleichmäßig stetig ist, gilt für $t \leq 1$

$$\sup_{\substack{|z|\leq R \\ |s|\leq 1}} \left| \frac{1}{t}\big(h(z+ts) - h(z)\big) - h'(z)s \right| \leq \sup_{\substack{z\in[-R,R] \\ \xi\in[z-t,z+t]}} \big|h'(\xi) - h'(z)\big| \to 0$$

mit $t \to 0$. Also ist $H$ differenzierbar. Um die stetige Differenzierbarkeit nachzuweisen sei $f_0 \in C\big([0,1]\big)$. Dann gilt wieder mit der gleichmäßigen Stetigkeit von $h'$ auf beschränkten Intervallen, dass

$$\begin{aligned} &\sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \big\|dH(f)(g) - dH(f_0)(g)\big\|_\infty \\ &\quad = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|h' \circ f \cdot g - h' \circ f_0 \cdot g\|_\infty \\ &\quad \leq \sup_{x\in[0,1]} \big|h'\big(f(x)\big) - h'\big(f_0(x)\big)\big| \to 0, \\ &\quad \text{wenn } \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - f_0(x)\big| \to 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten z.B. für

$$\begin{array}{l|l} H(f), \quad \text{dass} & dH(f)(g) \\ = f^2 & = 2fg \\ = f^3 & = 3f^2g \\ = e^f & = e^f g. \end{array}$$

$dH(f)$ ist genau dann invertierbar, wenn $h' \circ f$ keine Nullstelle hat, also wenn $h'(y) \neq 0$ für alle $y \in f\big([0,1]\big)$.

**Beispiel 12.4.9** i) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.
Wir wollen die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = f(x,y) = 0$ in der Nähe von $(x_0, y_0)$ mit $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$ durch eine Funktion

$$y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

auflösen.
Ist $(x_0, y_0) \notin \{(-1,0),(1,0)\}$, so gelingt uns dies; im Falle $y_0 > 0$ erhalten wir

$$y(x) = \sqrt{1-x^2},$$

und im Falle $y_0 < 0$ erhalten wir

$$y(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Ist $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ oder $(x_0, y_0) = (1, 0)$, so kann dies nicht gelingen, da in diesem Fall

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1,\ |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \varepsilon\}$$

nicht der Graph einer Funktion sein kann.
Wir beobachten, dass unsere Gleichung nach $y$ lokal auflösbar ist, falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
ii) Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, f(x,y) = Ax + By + C$, wobei $A$ eine $m \times n$-Matrix und $B$ eine $m \times m$-Matrix sei. Hier können wir die Gleichung $f(x,y) = 0$ nach $y$ auflösen, wenn $B$ regulär ist; in diesem Fall ist

$$y = -(B^{-1}Ax + B^{-1}C).$$

Wir beobachten, dass obige Gleichung nach $y$ auflösbar ist, falls

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix} =: \frac{\partial f}{\partial y}.$$

regulär ist.

Wir benötigen noch einige Definitionen.

**Definition/Bemerkung 12.4.10** Es sei $U \subset X \times Y$ offen, wobei $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständige normierte Räume seien, und es sei $f : U \to E$ stetig differenzierbar.
Dann sei

$$d_x f(x,y)(r) := df(x,y)(r,0),\ r \in X,$$

das partielle Differential nach $x$ und

$$d_y f(x,y)(s) := df(x,y)(0,s),\ s \in Y,$$

das partielle Differential nach $y$.
Es gilt dann aufgrund der Linearität von $df(x,y)$, dass

$$df(x,y)(r,s) = d_x f(x,y)(r) + d_y f(x,y)(s), \ (r,s) \in X \times Y,$$

gilt. Im Falle $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $E = \mathbb{R}^m$ gilt also

$$d_x f(x,y)(r) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x,y) \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$d_y f(x,y)(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}}_{=: \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix},$$

also

$$J_f(x,y) \cdot \binom{r}{s} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{matrix}}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, r + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, s, \text{ wobei } r \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^m.$$

**Satz 12.4.11** *(über implizite Funktionen). Es seien $X, Y, E$ vollständige normierte Räume, $U \subset X \times Y$ offen und $(x_0, y_0) \in U$. Ist $f : U \to E$ stetig differenzierbar mit $f(x_0, y_0) = 0$, so dass $d_y f(x_0, y_0) : Y \to E$ ein Isomorphismus ist, so existieren $\varepsilon, \delta > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $y : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$, so dass gilt:*

*i) Für $x \in U_\delta(x_0)$ ist $y(x)$ die eindeutige Lösung $y \in U_\varepsilon(y_0)$ der Gleichung $f(x,y)=0$, mit anderen Worten*

$$\begin{aligned}\operatorname{graph}(y) &:= \big\{\big(x,y(x)\big) : x \in U_\delta(x_0)\big\}\\ &= \big\{(x,y) \in U_\delta(x_0)\times U_\varepsilon(y_0) : f(x,y)=0\big\}.\end{aligned}$$

*ii)* $dy(x_0) = -d_y f(x_0,y_0)^{-1} \circ d_x f(x_0,y_0)$.

**Beweis.** Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung $F : U \to X \times E,\ F(x,y) = \big(x, f(x,y)\big)$.
Dann ist $dF(x,y)(r,s) = \big(r, df(x,y)(r,s)\big) = \big(r, d_x f(x,y)(r) + d_y f(x,y)(s)\big)$.
Die lineare Abbildung $dF(x_0,y_0) : X \times Y \to X \times E$ ist ein Isomorphismus, denn mit

$$G : X \times E \to X \times Y,\ G(\varrho,\sigma) = \big(\varrho\ ,\ d_y f(x_0,y_0)^{-1}\big(\sigma - d_x f(x_0,y_0)(\varrho)\big)\big),$$

gilt $dF(x_0,y_0)\circ G = \mathrm{id}_{X\times E}$ und $G \circ dF(x_0,y_0) = \mathrm{id}_{X\times Y}$, wie man durch Einsetzen leicht feststellt.
Somit können wir auf $F$ den Satz über die Umkehrfunktion anwenden. Nach eventueller Verkleinerung von $U$ dürfen wir also annehmen, dass $F(U)$ offen, $F : U \to F(U)$ bijektiv und $F^{-1} : F(U) \to U$ stetig differenzierbar ist.
Es sei $F^{-1}(\xi,\eta) = \big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big)$.
Aus $(\xi,\eta) = F\big(F^{-1}(\xi,\eta)\big) = \big(g(\xi,\eta), f\big(g(\xi,\eta),h(\xi,\eta)\big)\big)$ folgt $g(\xi,\eta)=\xi$, also $F^{-1}(\xi,\eta) = \big(\xi, h(\xi,\eta)\big)$. wobei $h : F(U) \to Y$ stetig differenzierbar ist.
Wir wählen nun $\varepsilon > 0, \delta > 0$, so dass $U_\delta(x_0)\times U_\varepsilon(y_0) \subset U$ und $h(x,0) \in U_\varepsilon(y_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Beachte dazu, dass $h(x_0,0) = y_0$ und $h$ stetig ist.
Für alle $(x,y) \in U_\delta(x_0)\times U_\varepsilon(y_0)$ gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}&f(x,y) = 0\\ &F(x,y) = (x,0)\\ &(x,y) = F^{-1}(x,0) = \big(x, h(x,0)\big).\end{aligned}$$

Setzen wir also $y : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0), y(x) = h(x,0)$, so folgt i).
Zu ii) Es sei $g : U_\delta(x_0) \to E, g(x) = f\big(x,y(x)\big)$.
Dann ist $g = 0$, also auch $dg(x) = 0, x \in U_\delta(x_0)$, und es folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}0 = dg(x) &= df\big(x,y(x)\big)\circ\big(\mathrm{id}_X, dy(x)\big)\\ &= d_x f\big(x,y(x)\big) + d_y f\big(x,y(x)\big)\circ dy(x),\end{aligned}$$

somit $dy(x) = -d_y f\big(x, y(x)\big)^{-1} \circ d_x f\big(x, y(x)\big)$.
Wegen $y(x_0) = y_0$ folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 12.4.12** Ist $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (x_0, y_0) \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$, so bedeutet die Invertierbarkeit von $d_y f(x_0, y_0)$ gerade, dass

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

regulär ist. Ist $y : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$ die Lösung von $f\big(x, y\big) = 0$, so gilt

$$J_y(x_0, y_0) = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, y_0) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

**Beispiel 12.4.13** i) (Lemniskate)
Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2(x^2 + y^2)2y + 4y \\ &= 4y(x^2 + y^2 + 1) \end{aligned}$$

genau dann, wenn $y = 0$.
Weiter ist $f(x, 0) = 0$ genau dann, wenn

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \big\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\big\}.$$

Ist also $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = 0$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0 \text{ und } x_0 \in \big\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\big\}.$$

An allen anderen Punkten können wir die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal nach $y$ auflösen.

ii) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y_1, y_2) = (x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7, xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 2).$$

Dann ist $f(2, -1, 0) = 0$.
Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & x + y_1 \end{pmatrix},$$

also $\frac{\partial f}{\partial y}(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist regulär, also ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar, also existiert ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ sowie die stetig differenzierbare Abbildung $y : (2 - \delta, 2 + \delta) \to U_\varepsilon\big((-1, 0)\big) \subset \mathbb{R}^2$ mit $f\big(x, y_1(x), y_2(x)\big) = 0, y_1(2) = -1, y_2(2) = 0$.
Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

gilt weiter

$$\begin{pmatrix} y_1'(2) \\ y_2'(2) \end{pmatrix} = \frac{\partial y}{\partial x}(2) = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

also $y_1'(2) = -4, y_2'(2) = 9$.

Es sei $L = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}\big\}$.
Wir wollen die lokalen Extrema von $f : L \to \mathbb{R}, f(x) = x_2$, bestimmen.
Dazu benötigen wir

**Definition 12.4.14** Es seien $(Z, \|\cdot\|_E), (E, \|\cdot\|_E)$ vollständige normierte Räume über $\mathbb{R}$, $U \subset Z$ offen, $g : U \to E$ und $f : U \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Ist

$$L := \{z \in U : g(z) = 0\},$$

so sagen wir, $f$ habe an $z_0 \in L$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(z) = 0$, falls $f|_L : L \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum an $z_0$ hat, mit anderen Worten: es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \sup\big\{f(z) : g(z) = 0, |z - z_0| < \varepsilon\big\} \text{ oder} \\ f(z_0) &= \inf\big\{f(z) : g(z) = 0, |z - z_0| < \varepsilon\big\}. \end{aligned}$$

**Satz 12.4.15** *Es sei $U \subset Z$ offen, $g : U \to E$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es sei $z_0 \in U$ mit $g(z_0) = 0$, und es existiere ein $R : E \to Z$ linear und stetig mit $dg(z_0) \circ R = \mathrm{id}_E$. Hat $f$ an $z_0$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(z) = 0$, so gibt es ein $\lambda : E \to \mathbb{R}$ stetig und linear mit*

$$df(z_0) = \lambda \circ dg(z_0).$$

**Beweis.** Wir wollen zunächst den Satz über implizite Funktionen anwenden. Dazu müssen wir erst einmal $Z = X \times Y$ schreiben.
Wir setzen $P : Z \to Z, P = \mathrm{id}_Z - R \circ dg(z_0), Q : Z \to Z, Q = R \circ dg(z_0)$ und $X = P(Z), Y = Q(Z)$. Dann gilt $P \circ P = P, Q \circ Q = Q, P = \mathrm{id} - Q$ und somit $\ker P = Q(Z) = Y$ und $\ker Q = P(Z) = X$.
Somit sind $X$ und $Y$ abgeschlossen, also selber vollständige normierte Räume. Weiter hat $z \in Z$ eine eindeutige Darstellung $z = x + y$ mit $x \in X, y \in Y$. Wir identifizieren also $Z$ mit $X \times Y$ und schreiben $z = (x, y), z_0 = (x_0, y_0)$. Mit obiger Identifikation erhalten wir $dg(z_0)|_Y = d_y g(x_0, y_0)$, also gilt nach Voraussetzung, dass $d_y g(x_0, y_0) \circ R = \mathrm{id}_E$ und $R \circ d_y g(x_0, y_0) = \mathrm{id}_Y$. Somit ist $d_y g(x_0, y_0) : Y \to E$ ein Isomorphismus.
Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es $\varepsilon, \delta > 0$ und eine stetige differenzierbare Funktion $y : U_\delta(x_0) \to U_\varepsilon(y_0)$ mit $\big\{(x, y) \in U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0) : g(x, y) = 0\big\} = \big\{(x, y(x)) : x \in U_\delta(x_0)\big\}$.
Somit hat (nach der Voraussetzung an $f$) die Abbildung $h : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}, h(x) = f\big(x, y(x)\big)$, ein lokales Extremum an $x_0$. Wegen

$$dy(x_0) = -d_y g(x_0, y_0)^{-1} d_x g(x_0, y_0)$$

folgt also mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= dh(x_0) = d_x f(x_0, y_0) + d_y f(x_0, y_0) \circ dy(x_0) \\ &= d_x f(x_0, y_0) + d_y f(x_0, y_0) \circ \big( - d_y g(x_0, y_0)^{-1} \circ d_x g(x_0, y_0)\big). \end{aligned}$$

Wir setzen nun $\lambda := d_y f(x_0, y_0) \circ d_y g(x_0, y_0)^{-1}$, somit $d_x f(x_0, y_0) = \lambda \circ d_x g(x_0, y_0)$. Dies impliziert zusammen mit $d_y f(x_0, y_0) = \lambda \circ d_y g(x_0, y_0)$, dass

$$\begin{aligned}
df(x_0, y_0)(r, s) &= d_x f(x_0, y_0)(r) + d_y f(x_0, y_0)(s) \\
&= \lambda\big(d_x g(x_0, y_0)(r)\big) + \lambda\big(d_y g(x_0, y_0)(s)\big) \\
&= \lambda\big(d_x g(x_0, y_0)(r) + d_y g(x_0, y_0)(s)\big) \\
&= \lambda \circ dg(x_0, y_0)(r, s)
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$df(z_0) = df\big(x_0, y_0\big) = \lambda \circ dg(x_0, y_0) = \lambda \circ dg(z_0).$$

$\square$

**Korollar 12.4.16** *(Satz über die Lagrangemultiplikatoren)*
*Es sei $n > m, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es seien $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiter sei $g(x_0) = 0$ und $J_g(x_0)$ habe vollen Rang (also $\operatorname{rang} J_g(x_0) = m$).*
*Hat $f$ an $x_0$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (so genannte Lagrangemultiplikatoren) mit*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_0) \quad \textit{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

**Beweis.** Da $J_g(x_0)$ den Rang $m$ hat, ist $dg(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv. Wähle $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ mit $dg(x_0)(y_k) = e_k, 1 \leq k \leq m$, und setze $R(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k y_k$. Dann ist $R$ linear (und daher stetig, da $\mathbb{R}^m$ endlichdimensional), und es gilt $dg(x_0) \circ R = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Wir erhalten also ein $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ linear mit $df(x_0) = \lambda \circ dg(x_0)$. Setze $\lambda_k := \lambda(e_k), 1 \leq k \leq m$. Dann ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ die darstellende Matrix von $\lambda$ (bezüglich der kanonischen Basen), und es folgt

$$J_f(x_0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot J_g(x_0),$$

ausgeschrieben also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix},$$

somit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_0), \ 1 \leq j \leq n.$$

$\square$

**Beispiel 12.4.17** Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g_1(x) = |x|^2 - 1, g_2(x) = x_3 - \frac{1}{2}$. Dann ist

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x) \\ & & \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist $g(x) = 0$, so ist zunächst $x_3 = \frac{1}{2}$, und wegen $|x|^2 = 1$ ist $(x_1, x_2) \neq 0$. Somit hat $J_g(x)$ vollen Rang für alle $x$ mit $g(x) = 0$.
Betrachten wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x_2$. Besitzt $f$ an $x$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$, so müssen also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \\ 1 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 2x_1 \\ 1 &= \lambda_1 2x_2 \\ 0 &= \lambda_1 2x_3 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, somit folgt aus der ersten Gleichung, dass $x_1 = 0$. Setzen wir die Nebenbedingung ein

$(x_3 = \frac{1}{2}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1)$, so folgt $x_2^2 = 1 - \frac{1}{4}$, also $|x_2| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, somit erhalten wir zwei Kandidaten für Extremstellen: $x = \big(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\big)$ und $x = \big(0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\big)$. Da die stetige Funktion $f$ auf der kompakten Menge $\{x : g(x) = 0\}$ sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annimmt, muss also $\big(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\big)$ lokale (und globale) Maximalstelle und $\big(0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\big)$ lokale (und globale) Minimalstelle von $f|_{\{x:g(x)=0\}}$ sein.

# Kapitel 13

# Höhere Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Wie im vorigen Kapitel sei im Folgenden $(X, \|\cdot\|_X)$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{R}$, $\emptyset \neq U \subset X$ sei eine offene Teilmenge und $(E, \|\cdot\|_E)$ sei ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Prinzipiell können wir höhere Ableitungen von Abbildungen $f : U \to E$ bilden: Ist nämlich $f$ stetig differenzierbar und ist $df : U \to \mathscr{L}(X, E)$ ebenfalls stetig differenzierbar, so ist dann $ddf$ eine Abbildung von $U$ nach $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, E))$. Ist nun letztere Abbildung wieder differenzierbar, so ist deren Ableitung eine Abbildung von $U$ nach $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, E)))$. Dies ist eine völlig unübersichtliche Notation. Wir werden nun ein einfacheres Konzept für höhere Ableitungen einführen (und später zeigen, dass wir nur die Notation geändert haben).

## 13.1 Definition und elementare Eigenschaften

Wir starten wieder mit Richtungsableitungen.

**Definition 13.1.1** Eine richtungsdifferenzierbare Abbildung $f : U \to E$ heißt zweimal richtungsdifferenzierbar an $x \in U$, falls für alle Richtungen $r_1, r_2 \in X$ der Grenzwert

$$d^2 f(x)(r_1, r_2) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(df(x + tr_2)(r_1) - df(x)(r_1)\big)$$

existiert.
$d^2f(x)(r_1, r_2)$ heißt dann zweite Ableitung von $f$ an $x$ in den Richtungen $(r_1, r_2) \in X \times X$ und

$$d^2f(x) : X \times X \to E,\ (r_1, r_2) \mapsto d^2f(x)(r_1, r_2)$$

heißt die zweite Ableitung von $f$ an $x$. Weiter heißt $f$ zweimal richtungsdifferenzierbar (auf $U$), falls $f$ an allen $x \in U$ zweimal richtungsdifferenzierbar ist.
Allgemeiner definiert man induktiv: Eine $(m-1)$-mal richtungsdifferenzierbare Abbildung $f : U \to E$ heißt $m$-mal richtungsdifferenzierbar an $x \in U$, falls für alle Richtungen $(r_1, \ldots, r_m) \in X^m$ der Grenzwert

$$\begin{aligned} & d^m f(x)(r_1, \ldots, r_m) \\ := \ & \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(d^{m-1}f(x + tr_m)(r_1, \ldots, r_{m-1}) - d^{m-1}f(x)(r_1, \ldots, r_{m-1})\Big) \end{aligned}$$

existiert.
$d^m f(x)(r_1, \ldots, r_m)$ heißt dann $m$-te Ableitung von $f$ an $x$ in den Richtungen $(r_1, \ldots, r_m) \in X^m$ und

$$d^m f(x) : X^m \to E,\ (r_1, \ldots, r_m) \mapsto d^m f(x)(r_1, \ldots, r_m)$$

heißt die $m$-te Ableitung von $f$ an $x$. Weiter heißt $f$ $m$-mal richtungsdifferenzierbar (auf $U$), falls $f$ an allen $x \in U$ $m$-mal richtungsdifferenzierbar ist.
Der Kürze halber schreibt man

$$d^m f(x)(r^m) := d^m f(x)(\underbrace{r, \ldots, r}_{m-\text{mal}}),\ r \in X.$$

**Beispiel 13.1.2** Es sei $U = X = \mathbb{R}^2$ und $E = \mathbb{R}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2$. Dann ist $df(x)(r) = 2x_1r_1 + (2x_2 - 4)r_2$, es folgt also für $x \in \mathbb{R}^2$ und die Richtungen $(r, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned} d^2f(x)(r, s) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(df(x + ts)(r) - df(x)(r)\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(2(x_1 + ts_1)r_1 + (2(x_2 + ts_2) - 4)r_2 - 2x_1r_1 - (2x_2 - 4)r_2\big) \\ &= 2s_1r_1 + 2s_2r_2. \end{aligned}$$

**Bemerkung 13.1.3** i) Es sei $f : U \to E$ eine (m-1)-mal richtungsdifferenzierbare Funktion. Ist

$$A := \{t \in \mathbb{R} : x + tr_m \in U\}$$

und

$$h_{x,r_1,\dots,r_m} : A \to E, h_{x,r_1,\dots,r_m}(t) = d^{m-1}f(x+tr_m)(r_1,\dots,r_{m-1}),$$

so ist $f$ genau dann $m-$mal richtungsdifferenzierbar an $x$, wenn für alle $r_1,\dots,r_m$ die Funktionen $h_{x,r_1,\dots,r_m}$ an der Stelle 0 differenzierbar sind. Es gilt dann

$$d^m f(x)(r_1,\dots,r_m) = h'_{x,r_1,\dots,r_m}(0).$$

Dies folgt sofort aus der Definition der Differenzierbarkeit in einer Veränderlichen.

Die nachfolgenden Bemerkungen ergeben sich leicht mit vollständiger Induktion über $m$.

ii) Es sei $f : U \to E$ $m-$mal richtungsdifferenzierbar, $x \in U$, $r \in X$ und ist $A$ analog wie in i) definiert, dann ist

$$g_{x,r} : A \to E,\ g_{x,r}(t) := f(x+tr),$$

$m-$mal differenzierbar und es gilt

$$g_{x,r}^{(m)}(t) = d^m f(x+tr)(\underbrace{r,\dots,r}_{m-\text{mal}}) = d^m f(x+tr)(r^m).$$

iii) Ist $f : U \to E$ $m-$mal richtungsdifferenzierbar an $x \in U$ so gilt

$$d^m f(x)(t_1 r_1,\dots,t_m r_m) = t_1 \cdots t_m d^m f(x)(r_1,\dots,r_m)$$

für alle $r_1,\dots,r_m \in X$ und alle $t_1,\dots,t_m \in \mathbb{R}$.

iv) Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \to E$ eine Abbildung, so ist $f$ genau dann $m-$mal differenzierbar, wenn $f$ $m-$mal richtungsdifferenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} d^m f(x)(r_1,\dots,r_m) &= r_1 \cdot \ldots \cdot r_m f^{(m)}(x),\ r_1,\dots,r_m \in \mathbb{R},\ \text{also} \\ f^{(m)}(x) &= d^m f(x)(\underbrace{1,\dots,1}_{m-\text{mal}}) = d^m f(x)(1^m). \end{aligned}$$

Eine erste Anwendung der zweiten Richtungsableitung ist

**Satz 13.1.4** *Es sei die offene Menge $U \subset X$ konvex und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal richtungsdifferenzierbar. Dann ist $f$ genau dann konvex, wenn*

$$d^2 f(x)(r^2) \geq 0$$

*für alle $r \in X$ und alle $x \in U$.*

**Beweis.** 1. Es sei $f$ konvex, $x \in U$ und $r \in X$. Dann ist die Menge $I := \{t \in \mathbb{R} : x + tr \in U\}$ eine offenes Intervall. Es sei $g : I \to \mathbb{R},\ g(t) = f(x + tr)$. Nach obiger Bemerkung ist $g$ zweimal differenzierbar mit $g''(0) = d^2 f(x)(r^2)$ und wegen

$$\begin{aligned} g(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda(x + t_1 r) + (1-\lambda)(x + t_2 r)) \\ &\leq \lambda f(x + t_1 r) + (1-\lambda) f(x + t_2 r) \\ &= \lambda g(t_1) + (1-\lambda) g(t_2),\ \lambda \in [0,1], t_1, t_2 \in I, \end{aligned}$$

ist $g$ konvex, also gilt mit 10.1.2 $g''(0) \geq 0$.
2. Es gelte die Bedingung und es seien $x_1, x_2 \in U$ sowie $\lambda \in [0,1]$. Ist $I := \{t \in \mathbb{R} : x_2 + t(x_1 - x_2) \in U\}$ so ist $I$ ein offenes Intervall mit $[0,1] \subset I$ Es sei $g : I \to \mathbb{R},\ g(t) := f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x_2 + t(x_1 - x_2))$. Dann ist $g$ zweimal differenzierbar und es gilt

$$g''(t) = d^2 f(x_2 + t(x_1 - x_2))((x_1 - x_2)^2) \geq 0,\ t \in I.$$

Mit 10.1.2 ist $g$ konvex, also gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= g(\lambda 1 + (1-\lambda)0) \leq \lambda g(1) + (1-\lambda) g(0) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

□

**Satz 13.1.5** *Es sei die offene Menge $U$ konvex, es sei $f : U \to \mathbb{R}$ richtungsdifferenzierbar und es sei $x_0 \in U$ mit $df(x_0) = 0$. Ist $f$ konvex (konkav), so hat $f$ an $x_0$ ein globales Minimum (Maximum).*

**Beweis.** Es sei ohne Einschränkung $f$ konvex (für den anderen Fall betrachte $-f$ anstelle von $f$).
Wir nehmen an, es gebe ein $x_1 \in U$ mit $f(x_1) < f(x_0)$ Dann gilt für $t \in (0,1]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\big(f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)\big) &= \frac{1}{t}\big(f(tx_1 + (1-t)x_0) - f(x_0)\big) \\ &\leq \frac{1}{t}\big(tf(x_1) + (1-t)f(x_0) - f(x_0)\big) \\ &= f(x_1) - f(x_0) < 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)\big) = df(x_0)(x_1 - x_0) = 0$. □

**Bemerkung 13.1.6** In den Übungen werden Sie mit ähnlichen Argumenten wie oben den folgenden Satz zeigen:
i) Es sei $U$ konvex und offen, $f : U \to \mathbb{R}$ konvex (bzw. konkav) und hat $f$ ein globales Maximum (bzw. Minimum) auf $U$, so ist $f$ konstant
ii) Ist $K \subset X$ kompakt und konvex, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und konvex (bzw. konkav), so nimmt $f$ sein Maximum (bzw. Minimum) auf dem Rand von $K$ an. Dieses Resultat hat große Bedeutung in der Optimierung, da häufig der Rand von $K$ viel kleiner als $K$ selbst ist und man daher nur auf einer kleineren Menge nach den Extremalstellen suchen muß.
ii) folgt mit i) und i) kann man folgendermaßen zeigen: Es sei $x_0 \in U$ mit $f(x_0) = \sup_{x\in U} f(x)$. Ist $x_1 \in U$ beliebig, so wähle $\lambda \in (0,1)$ mit $x_2 := \frac{1}{1-\lambda}(x_0 - \lambda x_1) \in U$. Dann gilt

$$f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq f(x_0).$$

Dies zeigt $f(x_1) = f(x_2) = f(x_0)$.

**Korollar 13.1.7** *Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal richtungsdifferenzierbar. Ist $x_0 \in U$ mit $df(x_0) = 0$ und existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass*
*i) $d^2f(x)(r^2) \geq 0$ für alle $r \in X$ und alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X < \varepsilon$, so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum,*
*ii) $d^2f(x)(r^2) \leq 0$ für alle $r \in X$ und alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X < \varepsilon$, so hat $f$ an $x_0$ ein lokales Maximum.*

**Beweis.** Es genügt i) zu zeigen, ii) folgt dann durch Betrachtung von $-f$. Es sei ohne Einschränkung $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Mit 13.1.4 ist $f$ konvex auf $U_\varepsilon(x_0)$ und 13.1.5 zeigt dann, dass $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum hat. □

Betrachten Sie als Beispiel die Funktion $f$ aus 13.1.2. Sie werden leicht feststellen, dass $df(x) = 0$ genau dann, wenn $x = (0,2)$. Weiter ist $d^2f(x)(r^2) = 2r_1^2 + 2r_2^2 \geq 0$ für alle $r \in X = \mathbb{R}^2$ und alle $x \in U = \mathbb{R}^2$. Somit ist $(0,2)$ lokale (und auch globale) Minimalstelle von $f$.

**Lemma 13.1.8** *Es sei $f : U \to E$ richtungsdifferenzierbar und es seien $r_1, r_2 \in X$. Existieren für alle $x \in U$ die Grenzwerte $d^2f(x)(r_1,r_2)$, sind die Abbildungen $x \mapsto df(x)(r_1)$ und $x \mapsto d^2f(x)(r_1,r_2)$ stetig auf $U$, so existiert auch $d^2f(x)(r_2,r_1)$ und es gilt $d^2f(x)(r_2,r_1) = d^2f(x)(r_1,r_2) =$*

$$\lim_{(t_1,t_2)\to(0,0)} \frac{1}{t_1t_2}\Big(f(x+t_1r_1+t_2r_2) - f(x+t_1r_1) - f(x+t_2r_2) + f(x)\Big)$$

**Beweis.** Wir zeigen zunächst $\lim_{(t_1,t_2)\to(0,0)} \cdots = d^2 f(x)(r_1,r_2)$. Dazu schreiben wir mit dem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_1}\big(f(x+t_1r_1)-f(x)\big) &= \int_0^1 df(x+u_1t_1r_1)(r_1)du_1, \\
\frac{1}{t_1}\big(f(x+t_1r_1+t_2r_2)-f(x+t_2r_2)\big) &= \int_0^1 df(x+u_1t_1r_1+t_2r_2)(r_1)du_1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_2}\big(df(x+u_1t_1r_1+t_2r_2)(r_1)-df(x+u_1t_1r_1)(r_1)\big) &= \\
\int_0^1 d^2 f(x+u_1t_1r_1+u_2t_2r_2)(r_1,r_2)du_2.
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_1t_2}\Big(f(x+t_1r_1+t_2r_2)-f(x+t_2r_2)-(f(x+t_1r_1)-f(x))\Big) &= \\
\frac{1}{t_2}\int_0^1 df(x+u_1t_1r_1+t_2r_2)(r_1)-df(x+u_1t_1r_1)(r_1)du_1 &= \\
\int_0^1\int_0^1 d^2 f(x+u_1t_1r_1+u_2t_2r_2)(r_1,r_2)du_2du_1 \overset{(t_1,t_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} d^2 f(x)(r_1,r_2).
\end{aligned}$$

Aus obiger Gleichung folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_2}\Big(df(x+t_2r_2)(r_1)-df(x)(r_1)\Big) &= \\
\lim_{t_1\to 0}\frac{1}{t_1t_2}\Big(f(x+t_1r_1+t_2r_2)-f(x+t_2r_2)-(f(x+t_1r_1)-f(x))\Big) &= \\
\lim_{t_1\to 0}\int_0^1\int_0^1 d^2 f(x+u_1t_1r_1+u_2t_2r_2)(r_1,r_2)du_2du_1 &= \\
\int_0^1 d^2 f(x+u_2t_2r_2)(r_1,r_2)du_2 \overset{t_2\to 0}{\longrightarrow} d^2 f(x)(r_1,r_2).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch $d^2 f(x)(r_2,r_1)$ existiert und gleich $d^2 f(x)(r_1,r_2)$ ist. □

**Korollar 13.1.9** *Es sei $f : U \to E$ zweimal richtungsdifferenzierbar, und die Abbildungen*

$$U \times X \to E,\ (x,r) \mapsto df(x)(r),\ \textit{sowie}\ U \times X^2 \to E,\ (x,r_1,r_2) \mapsto d^2f(x)(r_1,r_2),$$

*seien stetig. Dann ist*

$$d^2f(x) : X \times X \to E$$

*eine stetige symmetrische bilineare Abbildung für alle $x \in U$, d.h. $d^2f(x)$ ist stetig, man kann die Koordinaten vertauschen, ohne den Wert zu ändern, und sie ist linear in beiden Koordinaten.*

**Beweis.**

Es sei $x \in U$. Dann gilt zunächst mit 13.1.8, dass $d^2f(x)$ symmetrisch ist, also $d^2f(x)(r_1,r_2) = d^2f(x)(r_2,r_1)$ gilt. Sind nun $r, s \in X^2$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so folgt aus der Linearität von $df(x)$, dass

$$\begin{aligned}
d^2f(x)(\lambda r_1 + s_1, r_2) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(df(x+tr_2)(\lambda r_1 + s_1) - df(x)(\lambda r_1 + s_1)\big) \\
&= \lambda \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(df(x+tr_2)(r_1) - df(x)(r_1)\big) + \\
&\qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(df(x+tr_2)(s_1) - df(x)(s_1)\big) \\
&= \lambda d^2f(x)(r_1,r_2) + d^2f(x)(s_1,r_2)
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Symmetrie liefert dies auch

$$d^2f(x)(r_1, \lambda r_2 + s_2) = \lambda d^2f(x)(r_1,r_2) + d^2f(x)(r_1,s_2)$$

□

**Beispiel 13.1.10** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1^2x_2^2 + e^{x_1}$. Dann ist $f$ stetig differenzierbar mit

$$df(x)(r) = \nabla f(x) \cdot r = (2x_1x_2^2 + e^{x_1}, 2x_1^2x_2) \cdot r = (2x_1x_2^2 + e^{x_1})r_1 + 2x_1^2x_2r_2.$$

Sind $(r,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned}
d^2f(x)(r,s) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(df(x+ts)(r) - df(x)(r)\Big) \\
&= (2x_2^2 + e^{x_1})r_1s_1 + 4x_1x_2r_1s_2 + 4x_1x_2r_2s_1 + 2x_1^2r_2s_2 \\
&= s^tHr,
\end{aligned}$$

mit

$$H = \begin{pmatrix} 2x_2^2 + e^{x_1} & 4x_1x_2 \\ \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 \end{pmatrix}.$$

$d^2f(x)$ ist also eine symmetrische Bilinearform.

**Definition 13.1.11** Eine Abbildung $T : X^m \to E$ heißt $m-$linear, falls für alle $r = (r_1, \ldots, r_m) \in X^m$ und alle $1 \leq k \leq m$ die Abbildung

$$X \to E,\ s \mapsto T(r_1, \ldots, r_{k-1}, s, r_{k+1}, \ldots, r_m),$$

linear ist. Eine $2-$lineare Abbildung heißt bilinear.
$T$ heißt symmetrisch, falls für alle $r \in X^m$ und alle Permutationen $\pi : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ gilt, dass

$$T(r_{\pi(1)}, \ldots, r_{\pi(m)}) = T(r_1, \ldots, r_m).$$

Wir wollen nun die Stetigkeit multilinearer Abbildungen charakterisieren. Hierzu statten wir bequemerweise $X^m$ mit der Norm $\| \cdot \|_{X^m}$, welche durch

$$\|r\|_{X^m} := \sup_{1 \leq \nu \leq m} \|r_\nu\|_X$$

definiert ist, aus. Diese Norm ist natürlich zu der in 1.3.15 betrachteten äquivalent.

**Satz 13.1.12** *Es sei $T : X^m \to E$ eine $m-$lineare Abbildung. Dann sind äqivalent.*

*i)* *$T$ ist stetig,*

*ii)* *$T$ ist stetig in* $0$,

*iii)* *Es existiert ein $C \geq 1$ mit*

$$\|T(r)\|_E \leq C\|r_1\|_X \cdot \ldots \cdot \|r_m\|_X$$

*für alle $r \in X^m$,*

*iv)*

$$\sup_{\|r\|_{X^m} \leq 1} \|T(r)\|_E < \infty.$$

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii) ist trivial, ebenso wie iii) $\Rightarrow$ iv). Die Implikation iv) $\Rightarrow$ iii) folgt mit $T(\lambda_1 r_1, \ldots, \lambda_m r_m) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m T(r)$.
Wir zeigen jetzt ii) $\Rightarrow$ iv).Da $T$ stetig in 0 existiert ein $\delta > 0$ mit $T(\delta B_{X^m}) \subset B_E$. Mit obiger Identität folgt für $\|r\|_{X^m} \leq 1$, dass

$$\|T(r)\|_E = \frac{1}{\delta^m}\|T(\delta r_1, \ldots, \delta r_m)\|_E \leq \frac{1}{\delta^m}.$$

Es bleibt iii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen. Es sei dazu $s \in X^m$ fest. Ist $r \in X^m$ mit $\|r - s\|_{X^m} \leq 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
\|T(r) - T(s)\|_E &\leq \|T(r_1, \ldots, r_m) - T(r_1, \ldots, r_{m-1}, s_m)\|_E \\
&\quad + \|T(r_1, \ldots, r_{m-1}, s_m) - T(r_1, \ldots, r_{m-2}, s_{m-1}, s_m)\|_E \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \|T(r_1, s_2, \ldots, s_m) - T(s_1, \ldots, s_m)\|_E \\
&= \|T(r_1, \ldots, r_{m-1}, r_m - s_m)\|_E \\
&\quad + \|T(r_1, \ldots, r_{m-2}, r_{m-1} - s_{m-1}, s_m)\|_E \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \|T(r_1 - s_1, s_2, \ldots, s_m)\|_E \\
&\leq mC(\|s\|_{X^m} + 1)^{m-1}\|r - s\|_{X^m}
\end{aligned}$$

Damit ist $T$ stetig in $s$ (aber im Falle $m \geq 2$ nur in Trivialfällen gleichmäßig stetig!). $\square$

**Definition/Bemerkung 13.1.13** i) Den Vektorraum aller $m-$linearen stetigen Abbildungen $T : X^m \to E$ bezeichnen wir mit $\mathscr{L}^m(X, E)$. Versehen mit der Norm, welche durch

$$\|T\|_{\mathscr{L}^m(X,E)} := \sup_{\|r\|_{X^m} \leq 1} \|T(r)\|_E$$

definiert ist, wird $\mathscr{L}^m(X, E)$ zu einem vollständigen normierten Raum. Der Untervektorraum $\mathscr{L}_s^m(X, E)$ aller symmetrischen $m-$linearen stetigen Abbildungen ist abgeschlossen, also selbst ein vollständiger normierter Raum. Die Abbildung $I : \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, E)) \to \mathscr{L}^2(X, E),\ I(T)(r_1, r_2) = T(r_2)(r_1)$, ist ein Isomorphismus.
ii) Es sei $T : X^m \to E$ eine stetige $m-$lineare Abbildung. Dann setzt man

$$T(r^m) := T(\underbrace{r, \ldots, r}_{m-\text{mal}}),\ r \in X.$$

Die Abbildung $X \to E,\ r \mapsto T(r^m)$, heißt das von $T$ erzeugte $m$-homogene Polynom. Natürlich können zwei verschiedene $T$ dasselbe Polynom erzeugen. Ist $T_s : X^m \to E$ definiert durch

$$T_s(r_1, \ldots, r_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} T(r_{\pi(1)}, \ldots, r_{\pi(m)}),$$

so ist $T_s$ eine symmetrische stetige $m-$lineare Abbildung, welche dasselbe Polynom wie $T$ erzeugt. Ist nun $S : X^m \to E$ eine symmetrische stetige $m-$lineare Abbildung, so läßt sich $S$ mithilfe der sogenannten Polarisationsformel (die wir hier aber nicht beweisen wollen)

$$S(r_1, \ldots, r_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^m} \prod_{1 \le \nu \le m} \varepsilon_\nu S\Big( \big( \sum_{1 \le \mu \le m} \varepsilon_\mu r_\mu \big)^m \Big)$$

aus dem von $S$ erzeugten Polynom zurückgewinnen. Also entspricht jedem $m-$homogenen Polynom genau eine stetige symmetrische $m-$lineare Abbildung!

Analog wie 13.1.9 beweist man

**Korollar 13.1.14** *Es sei $f : U \to E$ $m-$mal richtungsdifferenzierbar, und die Abbildungen*

$$U \times X^k \to E,\ (x, r_1, \ldots, r_k) \mapsto d^k f(x)(r_1, \ldots, r_k),$$

*seien stetig für $1 \le k \le m$. Dann ist*

$$d^m f(x) : X^m \to E$$

*eine stetige symmetrische $m-$lineare Abbildung für alle $x \in U$.*

Anknüpfend an Satz 12.1.10 definieren wir nun höhere stetige Differenzierbarkeit.

**Definition 13.1.15** Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to E$ heißt zweimal stetig differenzierbar, falls $f$ zweimal richtungsdifferenzierbar ist, die Abbildung $U \times X^2 \to E,\ (x, r_1, r_2) \to d^2 f(x)(r_1, r_2)$, stetig ist und (die damit nach 13.1.9 wohldefinierte Abbildung) $d^2 f : U \to \mathscr{L}_s^2(X, E),\ x \mapsto$

$d^2f(x)$, ebenfalls stetig ist.
Sukzessiv definiert man: Eine $(m-1)$-mal stetig differenzierbare Abbildung $f: U \to E$ heißt $m-$mal stetig differenzierbar, falls $f$ $m-$mal richtungsdifferenzierbar ist, die Abbildung $U \times X^m \to E,\ (x, r_1, \ldots, r_m) \to d^m f(x)(r_1, \ldots, r_m)$, stetig ist und (die damit nach 13.1.14 wohldefinierte Abbildung) $d^m f: U \to \mathscr{L}_s^m(X, E),\ x \mapsto d^m f(x)$, ebenfalls stetig ist.

**Satz 13.1.16** *Eine stetig differenzierbare Abbildung $f: U \to E$ ist genau dann zweimal stetig differenzierbar, wenn $df: U \to \mathscr{L}(X, E)$ stetig differenzierbar ist. In diesem Fall gilt $d^2f(x)(r_1, r_2) = ddf(x)(r_2)(r_1),\ r_1, r_2 \in X,\ x \in U.$*

**Beweis.** Ist $df: U \to \mathscr{L}(X, E)$ richtungsdifferenzierbar, so ist $f$ offensichtlich zweimal richtungsdifferenzierbar mit $d^2f(x)(r_1, r_2) = ddf(x)(r_2)(r_1)$. Ist andererseits $f$ zweimal stetig differenzierbar, $x \in U, r \in X$ und $S \in \mathscr{L}(X, E)$ definiert durch $S(s) := d^2f(x)(s, r)$, so gilt mit dem HDI angewendet auf $g: [0,1] \to E,\ g(u) = df(x+utr)(s)$ (und somit $g'(u) = d^2f(x+utr)(s, tr) = td^2f(x+utr)(s, r)$)

$$\begin{aligned}
& \|\frac{1}{t}\big(df(x+tr) - df(x)\big) - S\|_{\mathscr{L}(X,E)} \\
= \quad & \sup_{\|s\|_X \le 1} \|\frac{1}{t}\big(df(x+tr)(s) - df(x)(s)\big) - S(s)\|_E \\
= \quad & \sup_{\|s\|_X \le 1} \|\int_0^1 d^2f(x+utr)(s,r) - d^2f(x)(s,r)du\|_E \\
\le \quad & \sup_{\|s\|_X \le 1} \int_0^1 \|(d^2f(x+utr) - d^2f(x))(s,r)\|_E du \\
\le \quad & \sup_{|v| \le t} \sup_{\|s\|_X \le 1} \|d^2f(x+vr) - d^2f(x)\|_{\mathscr{L}^2(X,E)} \|s\|_X \|r\|_X \to 0 \quad (t \longrightarrow 0).
\end{aligned}$$

Also ist $df$ richtungsdifferenzierbar mit $ddf(x)(r)(s) = d^2f(x)(s, r)$. Mithilfe des Isomorphismus' $I: \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, E)) \to \mathscr{L}^2(X, E),\ I(T)(r, s) = T(s)(r)$, sieht man, dass die jeweils geforderten Linearitäts- und Stetigkeitbedingungen äquivalent sind. $\square$

Analog beweist man

**Satz 13.1.17** *Eine Funktion $f : U \to E$ ist genau dann $m$-mal stetig differenzierbar, wenn sukzessive $f, df, \ldots, \underbrace{d\ldots d}_{(m-1)-mal}f$ stetig differenzierbar sind. Es gilt dann $d^m f(x)(r_1, \ldots, r_m) = \underbrace{d\ldots d}_{m-mal}f(x)(r_m)(r_{m-1})\ldots(r_2)(r_1)$.*

Wir wollen nun für zweimal stetig differenzierbares $f$ ein hinreichendes Kriterium für lokale Extremstellen beweisen, welches sich wie Satz 10.1.1 liest ($f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 (< 0)$ impliziert, dass $x_0$ Minimalstelle (Maximalstelle) ist).

**Definition 13.1.18** Eine stetige symmetrische bilineare Abbildung $T : X \times X \to \mathbb{R}$ (d.h eine stetige symmetrische Bilinearform) heißt
i) positiv definit, falls $\inf_{\|r\|_X=1} T(r^2) > 0$,
ii) positiv semidefinit, falls $T(r^2) \geq 0$ für alle $r \in X$,
iii) negativ definit, falls $\sup_{\|r\|_X=1} T(r^2) < 0$,
iv) negativ semidefinit, falls $T(r^2) \leq 0$ für alle $r \in X$,
v) indefinit, falls $r, s \in X$ mit $T(r^2) < 0 < T(s^2)$ existieren

**Bemerkung 13.1.19** Ist $X$ endlichdimensional, so nimmt die stetige Abbildung $r \mapsto T(r^2)$ ihr Maximum und ihr Minimum auf der nach Heine-Borel kompakten Menge $S := \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ an, also ist $T$ in diesem Fall genau dann positiv (negativ) definit, wenn $T(r^2) > 0 \quad (T(r^2) < 0)$ für alle $r \in X \setminus \{0\}$.

**Satz 13.1.20** *Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei $x_0 \in U$ mit $df(x_0) = 0$. Ist zusätzlich $d^2 f(x_0)$ positiv definit (negativ definit), so besitzt $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum (Maximum). Ist $d^2 f(x_0)$ indefinit, so besitzt $f$ an $x_0$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

**Beweis.**1. Es sei $d^2 f(x_0)$ positiv definit. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$d^2 f(x_0)(r^2) \geq \varepsilon \|r\|_X^2, r \in X.$$

Aus der Stetigkeit von $d^2 f$ in $x_0$ folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\|d^2 f(x) - d^2 f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. für alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} d^2 f(x)(r^2) &\geq d^2 f(x_0)(r^2) - |d^2 f(x)(r^2) - d^2 f(x_0)(r^2)| \\ &\geq \varepsilon \|r\|_X^2 - \|d^2 f(x) - d^2 f(x_0)\| \|r\|_X^2 \\ &\geq \varepsilon \|r\|_X^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|r\|_X^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Mit 13.1.7 hat $f$ an $x_0$ ein lokales Minimum.
2. Ist $d^2 f(x_0)$ negativ definit, so betrachte in 1. $-f$ anstelle von $f$.
3. (in den Übungen) □

Anstelle jetzt Beispiele anzugeben wollen wir höhere partielle Ableitungen definieren und eine zu 12.2.3 analoge Charakterisierung bereitstellen.

## 13.2 Höhere partielle Ableitungen

**Definition 13.2.1** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to E$ eine stetig (partiell) differenzierbare Abbildung mit Werten in einem vollständigen normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$. $f$ heißt zweimal stetig partiell differenzierbar auf $U$, falls

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x) := \lim_{t \to x_\nu} \frac{1}{t - x_\nu}\big(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, t, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

für alle $1 \leq \nu, \mu \leq n,\ x \in U$, existiert und die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} : U \to E, x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x),$$

für alle $1 \leq \nu, \mu \leq n$ stetig sind.
Anstelle von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\nu}$ schreibt man auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2}$.

**Bemerkung 13.2.2** Ist $f$ zweimal stetig differenzierbar, so ist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x) =$ $d^2 f(x)(e_\mu, e_\nu) = d^2 f(x)(e_\nu, e_\mu) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(x)$ und $f$ ist zweimal stetig partiell differenzierbar.

**Satz 13.2.3** *(von Schwarz) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to E$ eine stetig (partiell) differenzierbare Abbildung, sodass für $1 \leq \nu \leq \mu \leq n$ die zweiten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x),\ x \in U$, existieren und stetig sind. Dann gilt*
*i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$ existieren auch für $\nu > \mu$, und es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$$

*für alle $1 \leq \nu, \mu \leq n$.*
*ii) $f$ ist zweimal stetig differenzierbar und*

$$d^2 f(x)(r,s) = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n} r_\nu s_\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x).$$

**Beweis.** Zunächst ist wegen 12.2.3 die Funktion $f$ stetig differenzierbar. Die erste Aussage folgt somit sofort aus 13.1.8 angewendet auf $r_1 = e_\nu,\ r_2 = e_\mu$. Die Linearität von $df(z)$ liefert

$$g_\nu(x)(r) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(df(x + te_\nu)(r) - df(x)(r)\big) = \sum_{\mu=1}^{n} r_\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x).$$

Überdies existiert der Limes gleichmäßig für $|r| \leq 1$. Man sieht nun leicht, aufgrund der Darstellung rechts, dass jedes $g_\nu : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ stetig ist und damit ist $df$ stetig partiell differenzierbar, also wieder mit 12.2.3 stetig differenzierbar. Wegen $d^2 f(x)(r,s) = d(df)(x)(s)(r)$, siehe 13.1.13 i), folgt die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $f$. Die Formel ergibt sich dann mit 13.2.2 aus der Bilinearität von $d^2 f(x)$ :

$$\begin{aligned} d^2 f(x)(r,s) &= d^2 f(x)(\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu e_\nu, \sum_{\mu=1}^{n} s_\mu e_\mu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} r_\nu s_\mu d^2 f(x)(e_\nu, e_\mu) \\ &= \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n} r_\nu s_\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}(x). \end{aligned}$$

□

**Definition/Bemerkung 13.2.4** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig (partiell) differenzierbare Abbildung. Die symmetrische $n \times n$-Matrix

$$\nabla \otimes \nabla f(x) := H_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt die Hessematrix von $f$ an $x$. Sie ist nicht mit der Jacobimatrix einer Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ zu verwechseln! Aus dem Satz von Schwarz ergibt sich sofort, dass

$$\begin{aligned} d^2 f(x)(r,s) &= s^t \cdot H_f(x) \cdot r, \ r,s \in \mathbb{R}^n, \text{ also insbesondere} \\ d^2 f(x)(r^2) &= r^t \cdot H_f(x) \cdot r, \ r \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Hessematrix ist also die Darstellung der zweiten Ableitung bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$. Die Bezeichnung $\nabla \otimes \nabla f$ wird auch manchmal $\nabla^2 f$ geschrieben, dies letzte Zeichen steht aber häufig auch für $\Delta f$ mit $\Delta f(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2}(x)$!

**Beispiel 13.2.5** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ f(x) = x_1^2 x_2^2 + e^{x_1} + x_3$. Wir berechnen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1 x_2^2 + e^{x_1}, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2x_1^2 x_2, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 1$, und stellen fest, dass die partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, $f$ ist also einmal stetig differenzierbar. Dann berechnen wir die zweiten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 2x_2^2 + e^{x_1}, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 4x_1 x_2, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) = 0, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 2x_1^2, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x) = 0$. All diese sind stetig, also schenkt der Satz von Schwarz uns die restlichen zweiten partiellen Ableitungen. Überdies ist $f$ zweimal stetig differenzierbar. Wir erhalten als Hessematrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2^2 + e^{x_1} & 4x_1 x_2 & 0 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $d^2 f(x)(r,s) = s^t \cdot H_f(x) \cdot r$.

Der folgende Satz gehört zur linearen Algebra.

**Satz 13.2.6** *Es sei $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische bilineare Abbildung (d.h. eine symmetrische Bilinearform). Dann existiert eine (eindeutig bestimmte) symmetrische $n \times n$-Matrix $A$ mit*

$$T(r,s) = r^t \cdot A \cdot s, \ r,s \in \mathbb{R}^n.$$

*i) $T$ ist genau dann positiv definit (negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit) wenn alle Eigenwerte von $A$ positiv (negativ, nichtnegativ,*

*nichtpositiv) sind.*
*ii) $T$ ist genau dann indefinit, wenn $A$ sowohl einen positiven wie auch einen negativen Eigenwert besitzt.*

**Beweis.** Es sei $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektorbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $A$ durch

$$a_{ij} = T(e_i, e_j),\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Mit $T$ ist auch $A$ symmetrisch. Weiter gilt aufgrund der Bilinearität von $T$, dass

$$T(r, s) = T(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i, \sum_{j=1}^{n} s_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i s_j T(e_i, e_j) = r^t A s$$

für alle $r, s \in \mathbb{R}^n$. Überdies ist $A$ eindeutig bestimmt.
Da $A$ symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A$ reell und $A$ ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Orthonormalbasis $y_1, \ldots, y_n$ des $\mathbb{R}^n$ mit $A y_i = \lambda_i y_i,\ 1 \leq i \leq n$.
Wir zeigen nun: $T$ ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von $A$ positiv sind. Die anderen Aussagen aus i) beweist man analog.
Es sei also $T$ positiv definit. Dann gilt $0 < T(y_i, y_i) = y_i^t A y_i = y_i^t \lambda_i y_i = \lambda_i |y_i|^2$, also $\lambda_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Sind andererseits alle $\lambda_i > 0$ und $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so existieren (eindeutig bestimmte) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich 0, mit $r = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Die Orthonormalität der $y_1, \ldots, y_n$ liefert $y_i^t y_j = \delta_{ij}$, also erhalten wir aus der Bilinearität von $T$

$$\begin{aligned} T(r^2) &= T(r, r) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j T(y_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j y_i^t A y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j y_i^t \lambda_j y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0. \end{aligned}$$

ii) $T$ ist genau dann indefinit, wenn $T$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist. Mit i) ist dies genau dann der Fall, wenn $T$ mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert besitzt. $\square$

**Satz 13.2.7** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$ mit $\mathrm{grad} f(x) = 0$. Sind alle Eigenwerte von $H_f(x)$ positiv (negativ), so besitzt $f$ an $x$ ein lokales Minimum (Maximum). Besitzt $H_f(x)$*

*sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, so besitzt $f$ an $x$ kein lokales Extremum.*

**Beweis.** Dies folgt sofort aus dem obigen Satz, 13.2.4 und 13.1.20. □

**Bemerkung 13.2.8** Analog zeigt man: Ein auf einer offenen konvexen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiertes, zweimal stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ ist konvex (konkav) genau dann, wenn für alle $x \in U$ alle Eigenwerte der Hessematrizen $H_f(x)$ nichtnegativ (nichtpositiv) sind.

**Beispiel 13.2.9** Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 26x_3^2 - 2x_1x_2 - 10x_2x_3.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= 2x_1 - 2x_2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= 4x_2 - 2x_1 - 10x_3 \\
\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) &= 52x_3 - 10x_2.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{array}{rll}
\mathrm{grad} f(x) = \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow & x_1 = x_2 & \text{und} \\
& 2x_2 - 10x_3 = 0, & \text{also} \\
& x_2 = 5x_3 & \text{und} \\
& 52x_3 - 50x_3 = 0 & \\
\text{insgesamt folgt} & x_1 = x_2 = x_3 = 0. &
\end{array}$$

Es gibt also nur einen kritischen Punkt, und dieser ist $(0, 0, 0)$.

Wir berechnen die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x) = 52 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x) = -10$$

und erhalten als Hessematrix an $(0,0,0)$

$$H_f(0,0,0) = \nabla \otimes \nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -10 \\ 0 & -10 & 52 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\det(2) = 2 > 0 \\ &\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 > 0 \\ &\det H_f(0,0,0) = 2 \det \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 52 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 0 & 52 \end{pmatrix} + 0 \det(\dots) \\ &= 8 > 0. \end{aligned}$$

Also ergibt das Hauptminorenkriterium, dass $H_f(0,0,0)$ positiv definit ist, somit liegt an $(0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle vor.

Leider lassen sich höhere Ableitungen nicht mehr durch Matrizen darstellen (man bräuchte für die dritte Ableitung schon so etwas wie $n \times n \times n$-Matrizen). Daher greift man in diesen Fällen zu einer anderen Notation. Diese hat allerdings den kleinen Nachteil, dass man nur $d^m f(x)(r^m)$ darstellen kann, was aber genügt (da man ja $d^m f(x)$ aus dem erzeugten Polynom $r \mapsto d^m f(x)(r^m)$ mithilfe der Polarisationsformel wiedergewinnen kann, wenn man unbedingt will).

**Definition/Bemerkung 13.2.10** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to E$ stetig (partiell) differenzierbar. Anstelle von $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$ schreibt man $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} f$ und sukzessiv definiert heißt ein $(m-1)$-mal stetig (partiell) differenzierbares $f$ $m-$mal stetig partiell differenzierbar, falls alle iterierten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\nu_m}} f$$

für alle $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \{1, \ldots, n\}$ existieren und auf $U$ stetig sind. Induktiv liefert der Satz von Schwarz, dass man nur die partiellen Ableitungen mit $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \ldots \leq \nu_m$ untersuchen muss.

Dies kann man auch anders ausdrücken: Man muss für alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq m$ feststellen, ob die iterierten partiellen Ableitungen

$$\partial^\alpha f := \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1}}_{\alpha_1 - \text{ mal}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_2}}_{\alpha_2 - \text{ mal}} \cdots \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\alpha_n - \text{ mal}} f$$

existieren und auf $U$ stetig sind. Man setzt noch $\partial^{(0,\ldots,0)} f := f$.
Man beachte, dass hier $|\alpha| := \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gesetzt wurde, jedoch $|x| := (\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}$ für $x \in \mathbb{K}^n$ definiert war. Dies sollte zu keinen Verwirrungen führen.

Das iterierte Anwenden des Satzes von Schwarz liefert dann:

**Satz 13.2.11** *$f : U \to E$ ist $m-$mal stetig differenzierbar genau dann, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq m$ die iterierten partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f$ existieren und stetig auf $U$ sind.*

**Beispiel 13.2.12** (vergleiche 13.2.5) Es sei wieder $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1^2 x_2^2 + e^{x_1} + x_3$. Wir erhalten für $|\alpha| =$

0 : $\partial^{(0,0,0)} f(x) = x_1^2 x_2^2 + e^{x_1} + x_3$.

1 : $\partial^{(1,0,0)} f(x) = 2x_1 x_2^2 + e^{x_1},\ \partial^{(0,1,0)} f(x) = 2x_1^2 x_2,\ \partial^{(0,0,1)} f(x) = 1,$

2 : $\partial^{(2,0,0)} f(x) = 2x_2^2 + e^{x_1},\ \partial^{(0,2,0)} f(x) = 2x_1^2,\ \partial^{(0,0,2)} f(x) = 0,$
$\partial^{(1,1,0)} f(x) = 4x_1 x_2,\ \partial^{(1,0,1)} f(x) = 0,\ \partial^{(0,1,1)} f(x) = 0$

3 : $\partial^{(3,0,0)} f(x) = e^{x_1},\ \partial^{(0,3,0)} f(x) = \partial^{(0,0,3)} f(x) = 0,\ \partial^{(2,1,0)} f(x) = 4x_2,\ \partial^{(1,2,0)} f(x) = 4x_1$, alle anderen partiellen Ableitungen der Ordnung 3 verschwinden.

$4:$ $\partial^{(4,0,0)} f(x) = e^{x_1},\ \partial^{(2,2,0)} f(x) = 4$, alle anderen partiellen Ableitungen der Ordnung 4 verschwinden.

$\geq 5:$ $\partial^{(k,0,0)} f(x) = e^{x_1}, k \geq 5$, alle anderen partiellen Ableitungen der Ordnung größer gleich 5 verschwinden.

Alle obigen partiellen Ableitungen sind stetig auf $\mathbb{R}^3$ und somit ist $f$ beliebig oft stetig differenzierbar.

**Bemerkung/Bezeichnung 13.2.13** Wir beschränken uns für den Rest dieses Abschnittes auf Funktionen $f : U \to \mathbb{K}$, wobei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit $n$ fest) sei. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ sowie } \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Weiter schreiben wir $\displaystyle\sum_{|\alpha|=m}$ anstelle von $\displaystyle\sum_{|\alpha|=m,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}$.

**Lemma 13.2.14** *(Leibnizregel für symmetrische multilineare Abbildungen) Es sei $T : X^m \to E$ eine symmetrische $m$-lineare Abbildung. Setzt man*

$$T(x^\alpha) := T(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1\textit{-mal}}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{\alpha_2\textit{-mal}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{\alpha_n\textit{-mal}}),$$

*für $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$, so gilt*

$$\frac{1}{m!} T\big((\sum_{\nu=1}^n x_\nu)^m\big) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} T(x^\alpha).$$

**Beweis.** (mit vollständiger Induktion über m) Ist $m = 1$, so ist $T$ linear, und die Formel folgt sofort aus der Additivität von $T$. Es gelte die Formel für $m \geq 1$ und es sei $T$ nun $m+1$-linear. Die Induktionsannahme liefert dann zusammen mit der Linearität von $T$ in der $m+1$-ten Koordinate, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(m+1)!} T\big((\sum_{\nu=1}^n x_\nu)^{m+1}\big) &= \frac{1}{(m+1)!} T\big((\sum_{\nu=1}^n x_\nu)^m, \sum_{\nu=1}^n x_\nu\big) \\
&= \sum_{\nu=1}^n \sum_{|\alpha'|=m} \frac{1}{m+1} \frac{1}{\alpha'!} T(x^{\alpha'}, x_\nu)
\end{aligned}$$

Ist nun $|\alpha| = m+1$ und $\alpha = (\alpha_1', \dots, \alpha_\nu' + 1, \dots, \alpha_n')$, so gilt

$$\frac{1}{\alpha'!} = \frac{1}{\alpha!}(\alpha_\nu' + 1) = \frac{1}{\alpha!}\alpha_\nu \text{ sowie } T(x^{\alpha'}, x_\nu) = T(x^\alpha).$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{(m+1)!}T\big((\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu)^{m+1}\big) \quad = \quad \sum_{|\alpha|=m+1} (\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu)\frac{1}{m+1}\frac{1}{\alpha!}T(x^\alpha).$$

Wegen $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = |\alpha|$ folgt die Behauptung. □

**Satz 13.2.15** *Es sei $f : U \to \mathbb{K}$ $m-$mal stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in U$, dass*

$$d^m f(x)(r^{(1)},\dots,r^{(m)}) \quad = \quad \sum_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m=1}^{n} r^{(1)}_{\nu_1} r^{(2)}_{\nu_2}\dots r^{(m)}_{\nu_m}\frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{\nu_m}}f(x),$$
$$\text{für alle } r^{(1)},\dots,r^{(m)} \in \mathbb{R}^n$$

*und kürzer*

$$\frac{1}{m!}d^m f(x)(r^m) = \frac{1}{m!}d^m f(x)(\underbrace{r,\dots,r}_{m-mal}) = \sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}r^\alpha,\ \ r \in \mathbb{R}^n.$$

**Beweis.** 1. Die Definitionen der $m-$ten Ableitung und der iterierten partiellen Ableitungen ergeben zusammen mit der Symmetrie der $m-$ten Ableitung

$$d^m f(x)(e_{\nu_1}, e_{\nu_2},\dots,e_{\nu_m}) = \frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{\nu_m}}f(x).$$

Es seien $r^{(1)},\dots,r^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt aus der $m-$Linearität von $d^m f(x)$, dass

$$d^m f(x)(r^{(1)},\dots,r^{(m)}) = d^m f(x)(\sum_{\nu_1=1}^{n} r^{(1)}_{\nu_1}e_{\nu_1},\dots,\sum_{\nu_m=1}^{n} r^{(m)}_{\nu_m}e_{\nu_m})$$
$$= \sum_{\nu_1=1}^{n}\sum_{\nu_2=1}^{n}\cdots\sum_{\nu_m=1}^{n} r^{(1)}_{\nu_1}\dots r^{(m)}_{\nu_m} d^m f(x)(e_{\nu_1},\dots,e_{\nu_m}).$$

Also gilt die erste Formel.
2. Wir verwenden die Notation aus dem Lemma über die Leibnizregel.
Aus den Definitionen der $m-$ten Ableitung und der iterierten partiellen Ableitung erhalten wir für $e := (e_1,\dots,e_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$

$$d^m f(x)(e^\alpha) = d^m f(x)(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{\alpha_1-\text{mal}},\underbrace{e_2,\dots,e_2}_{\alpha_2-\text{mal}},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{\alpha_n-\text{mal}}) = \partial^\alpha f(x)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m$. Es sei nun $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Ist $re := (r_1e_1, \ldots, r_ne_n)$, so folgt für $|\alpha| = m$ aus der $m$-Linearität von $d^m f(x)$, dass

$$\begin{aligned} d^m f(x)((re)^\alpha) &= d^m f(x)(\underbrace{r_1e_1, \ldots, r_1e_1}_{\alpha_1-\text{mal}}, \underbrace{r_2e_2, \ldots, r_2e_2}_{\alpha_2-\text{mal}}, \ldots, \underbrace{r_ne_n, \ldots, r_ne_n}_{\alpha_n-\text{mal}}) \\ &= r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_n^{\alpha_n} d^m f(x)(e^\alpha) = \partial^\alpha f(x) r^\alpha. \end{aligned}$$

Die Leibnizregel ergibt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} d^m f(x)(r^m) &= \frac{1}{m!} d^m f(x)\big((\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu e_\nu)^m\big) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} d^m f(x)((re)^\alpha) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} r^\alpha. \end{aligned}$$

□

## 13.3 Satz von Taylor

Es sei wieder im folgenden $U$ eine offene nichtleere Teilmenge eines vollständigen normierten Raumes über $\mathbb{R}$ und $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K}$. Wir wollen wie im Falle $U \subset \mathbb{R}$ eine $m$-mal differenzierbare Funktion lokal durch Polynome approximieren.

**Definition 13.3.1** Es sei $f : U \to E$ $m-$mal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$. Dann heißt

$$T_{x_0}^m(f) : X \to E,\ T_{x_0}^m(f)(x) := \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\nu!} d^\nu f(x_0)((x - x_0)^\nu),$$

das $m-$te Taylorpolynom von $f$ mit Entwicklungspunkt $x_0$.
Hierbei ist $d^0 f(x_0)((x - x_0)^0) := f(x_0)$ gesetzt.

**Satz 13.3.2** *(von Taylor) Es sei $f : U \to E$ $m$-mal stetig differenzierbar und es sei $x_0 \in U$. Dann gilt für alle $x \in U$ mit $[x_0, x] \subset U$, dass*

$$f(x) = T_{x_0}^{m-1}(f)(x) + R_m(x, x_0),$$

*wobei*

$$R_m(x,x_0) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1} d^m f(x_0 + t(x-x_0))((x-x_0)^m)dt.$$

*Ist zusätzlich* $E = \mathbb{R}$ *so existiert ein* $\xi \in [x_0, x]$ *mit*

$$R_m(x,x_0) = \frac{1}{m!} d^m f(\xi)((x-x_0)^m).$$

**Beweis.** Es sei $g : [0,1] \to E,\ g(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$. Nach Bemerkung 13.1.3 ii) ist $g$ ebenfalls $m$-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$g^{(\nu)}(t) = d^\nu f(x_0 + t(x-x_0))((x-x_0)^\nu),\ 0 \le \nu \le m,\ t \in [0,1].$$

Mit 10.2.4 gilt

$$g(1) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(0)(1-0)^\nu + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1} g^{(m)}(t)dt$$

und es folgt die erste Behauptung.
Es sei nun zusätzlich $E = \mathbb{R}$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\eta \in [0,1]$ mit

$$R_m(x,x_0) = g^{(m)}(\eta)\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}dt = \frac{1}{m!} d^m f(\xi)((x-x_0)^m),$$

wenn man $\xi := x_0 + \eta(x-x_0)$ setzt. □

**Korollar 13.3.3** *(Qualitative Version des Taylorschen Satzes) Es sei* $f : U \to E$ $m$*-mal stetig differenzierbar und es sei* $x_0 \in U$*. Dann gilt für alle* $x \in U$ *mit* $[x_0, x] \subset U$*, dass*

$$\begin{aligned} &\frac{\left\| f(x) - T^m_{x_0}(f)(x) \right\|_E}{\|x-x_0\|^m_X} \\ \le\ & \frac{1}{m!} \sup_{\xi \in [x_0,x]} \|d^m f(\xi) - d^m f(x_0)\|_{\mathscr{L}^m(X,E)} \to 0 \quad (x \to x_0). \end{aligned}$$

**Beweis.** Es gilt mit dem Satz von Taylor:

$$\begin{aligned}
&\Big\|f(x)-\sum_{\nu=0}^{m}\frac{1}{\nu!}d^{\nu}f(x_0)((x-x_0)^{\nu})\Big\|_E\\
=\ &\Big\|\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1(1-t)^m\Big(d^mf(x_0+t(x-x_0))((x-x_0)^m)-d^mf(x_0)((x-x_0)^m)\Big)dt\Big\|_E\\
\le\ &\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1(1-t)^m\|\big(d^mf(x_0+t(x-x_0))-d^mf(x_0)\big)((x-x_0)^m)\|_E dt\\
\le\ &\frac{1}{m!}\sup_{\xi\in[x_0,x]}\|d^mf(\xi)-d^mf(x_0)\|_{\mathscr{L}^m(X,E)}\|x-x_0\|_X^m.
\end{aligned}$$

□

Wir können nun unsere Darstellungen für die Ableitungen einsetzen und weitere Resultate vom Taylortyp beweisen. Aus 13.2.4 und 13.2.15 folgt zunächst:

**Bemerkung 13.3.4** Es sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $x_0\in U$ sowie $f:U\to\mathbb{K}$ $m-$mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$T_{x_0}^m(f)(x)=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
T_{x_0}^0(f)(x)&=f(x_0),\\
T_{x_0}^1(f)(x)&=f(x_0)+\mathrm{grad}f(x_0)\cdot(x-x_0),\\
T_{x_0}^2(f)(x)&=f(x_0)+\mathrm{grad}f(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^t\cdot H_f(x_0)\cdot(x-x_0).
\end{aligned}$$

**Korollar 13.3.5** *Es sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{K}$ eine $m$-mal stetig differenzierbare Abbildung und $x_0\in U$. Dann gilt für $x\in U$ mit $[x_0,x]\subset U$ :*
*i)*

$$\begin{aligned}
f(x)\ =\ &\sum_{|\alpha|\le m-1}\frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\\
&+\sum_{|\alpha|=m}\frac{m}{\alpha!}\Big(\int_0^1(1-t)^{m-1}\partial^\alpha f(x_0+t(x-x_0))dt\Big)(x-x_0)^\alpha.
\end{aligned}$$

*Weiter gilt*

$$\frac{\left|f(x) - \sum_{|\alpha|\le m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\right|}{|x-x_0|^m} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0)$$

*Ist* $m = 1$, *so gilt*

$$\frac{\left|f(x) - f(x_0) - \operatorname{grad} f(x_0)\cdot(x-x_0)\right|}{|x-x_0|} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0).$$

*Ist* $m = 2$, *so gilt*

$$\frac{\left|f(x) - f(x_0) - \operatorname{grad} f(x_0)\cdot(x-x_0) - \frac{1}{2}(x-x_0)^t\cdot H_f(x_0)\cdot(x-x_0)\right|}{|x-x_0|^2} \longrightarrow 0 \;\; (x \to x_0).$$

*ii) Es sei zusätzlich* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Dann existiert ein* $\xi \in [x_0, x]$ *mit*

$$f(x) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha,$$

*also im Falle* $m = 1$*:*

$$f(x) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(\xi)\cdot(x-x_0),$$

*und im Falle* $m = 2$,

$$f(x) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t\cdot H_f(\xi)\cdot(x-x_0).$$

**Beispiel 13.3.6** (vergleiche 13.2.5 und 13.2.12) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\; f(x) = x_1^2 x_2^2 + e^{x_1} + x_3$.
i) (nullte Ableitung, trivial) Es ist

$$d^0 f(1,1,2)((x-(1,1,2))^0) \;=\; f(1,1,2) = 3 + e.$$

ii) (erste Ableitung) Die erste Ableitung können wir zum Beispiel über den Gradienten berechnen. Es gilt somit

$$df(1,1,2)\big(x-(1,1,2)\big) = \operatorname{grad} f(1,1,2)\big(x-(1,1,2)\big)$$

$$= (2+e, 2, 1)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2+e)(x_1-1) + 2(x_2-1) + (x_3-2).$$

Dies kann man alternativ aus Folgendem ableiten (siehe 13.2.12):

$$
\begin{aligned}
& df(1,1,2)\big(x-(1,1,2)\big) \\
& \quad = \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(1,1,2)}{\alpha!}\,\big(x-(1,1,1)\big)^\alpha \\
& \quad = \partial^{(1,1,0)} f(1,1,2)(x_1-1)^1(x_2-1)^0(x_3-2)^0 \\
& \quad\quad + \partial^{(0,1,0)} f(1,1,2)(x_1-1)^0(x_2-1)^1(x_3-2)^0 \\
& \quad\quad + \partial^{(0,0,1)} f(1,1,2)(x_1-1)^0(x_2-1)^0(x_3-2)^1 \\
& \quad = (2+e)(x_1-1) + 2(x_2-1) + (x_3-2).
\end{aligned}
$$

iii) (Zweite Ableitung)   Berechnen wir zunächst die zweite Ableitung mithilfe der Hessematrix:
Es gilt

$$
H_f(1,1,2) = \begin{pmatrix} 2+e & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

also ist

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\, d^2 f(1,1,2)\Big(\big(x-(1,1,2)\big)^2\Big) \\
& = \frac{1}{2}\big(x-(1,1,2)\big)^t H_f(1,1,2)\big(x-(1,1,2)\big) \\
& = \frac{1}{2}(x_1-1, x_2-1, x_3-2) \begin{pmatrix} 2+e & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-2 \end{pmatrix} \\
& = \Big(1+\frac{e}{2}\Big)(x_1-1)^2 + 4(x_1-1)(x_2-1) + (x_2-1)^2.
\end{aligned}
$$

Die andere Möglichkeit ist wieder (siehe 13.2.12)

$$\frac{1}{2}\,d^2f(1,1,2)\Big(\big(x-(1,1,2)\big)^2\Big) = \sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha f(1,1,2)}{\alpha!}\,\big(x-(1,1,2)\big)^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\,\partial^{(2,0,0)}f(1,1,2)(x_1-1)^2(x_2-1)^0(x_3-2)^0$$

$$+\frac{1}{2}\,\partial^{(0,2,0)}f(1,1,2)(x_1-1)^0(x_2-1)^2(x_3-2)^0$$

$$+\frac{1}{2}\,\partial^{(0,0,2)}f(1,1,2)(x_1-1)^0(x_2-1)^0(x_3-2)^2$$

$$+\,\partial^{(1,1,0)}f(1,1,2)(x_1-1)^1(x_2-1)^1(x_3-2)^0$$

$$+\,\partial^{(1,0,1)}f(1,1,2)(x_1-1)^1(x_2-1)^0(x_3-2)^1$$

$$+\,\partial^{(0,1,1)}f(1,1,2)(x_1-1)^0(x_2-1)^1(x_3-2)^1$$

$$= \frac{1}{2}\,(2+e)(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+4(x_1-1)(x_2-1).$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} T^2_{(1,1,2)}(f)(x) &= 3+e+(2+e)(x_1-1)+2(x_2-1)+(x_3-2)\\ &\quad +(1+\frac{e}{2})(x_1-1)^2+4(x_1-1)(x_2-1)+(x_2-1)^2. \end{aligned}$$

und somit aus dem obigen Satz

$$\frac{|f(x_1,x_2,x_3)-T^2_{(1,1,2)}(x_1,x_2,x_3)|}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-2)^2}\to 0 \;\;\big(x\to(1,1,2)\big).$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
T^4_{x_0}(f)(x) &= 3 + e + (2+e)(x_1-1) + 2(x_2-1) + (x_3-2) \\
&\quad +(1+\frac{e}{2})(x_1-1)^2 + 4(x_1-1)(x_2-1) + (x_2-1)^2 \\
&\quad +\frac{e}{6}(x_1-1)^3 + 2(x_1-1)^2(x_2-1) + 2(x_1-1)(x_2-1)^2 \\
&\quad +\frac{e}{24}(x_1-1)^4 + (x_1-1)^2(x_2-1)^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + x_3 + \sum_{\nu=0}^{4} \frac{e}{\nu!}(x_1-1)^\nu .
\end{aligned}$$

Mit obigem Satz folgt dann

$$\frac{|f(x_1,x_2,x_3) - T^4_{(1,1,2)}(x_1,x_2,x_3)|}{((x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-2)^2)^2} \to 0 \quad \bigl(x \to (1,1,2)\bigr).$$

Das geht aber in diesem Fall noch etwas besser: Da $f(x) - T^4_{(1,1,2)}(f)(x) = \sum_{\nu=5}^{\infty} \frac{e}{\nu!}(x_1-1)^\nu$ (Umentwicklung von $e^{x_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e}{\nu!}(x_1-1)^\nu$ an 1), gilt sogar

$$|f(x_1,x_2,x_3) - T^4_{(1,1,2)}(x_1,x_2,x_3)| \leq e^{|x_1-1|+1}|x_1-1|^5.$$

# Kapitel 14

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 14.1 Einführende Beispiele

**Beispiel 14.1.1** i) (freier harmonischer Oszillator)
Stellen Sie sich vor, ein schwingender Körper mit der Masse $m > 0$ sei an einer Feder aufgehängt, seine Ruhelage sei $x = 0$ und zur Zeit $t$ befinde er sich in der Position $x(t) \in \mathbb{R}$. Ist $x(t) \neq 0$, so greift an den Körper eine rücktreibende Kraft $k(t)$ an, welche proportional zur Auslenkung $x(t)$ ist, für die also mit einer Konstanten $c > 0$ (Elastizitäts- oder Federkonstante) gilt, dass

$$k(t) = -cx(t).$$

Auf der anderen Seite gilt nach dem Newtonschen Gesetz („Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“)

$$k(t) = m \cdot x''(t).$$

Wir erhalten also $mx''(t) + cx(t) = 0$ oder

$$x''(t) + \frac{c}{m}\, x(t) = 0.$$

Setzen wir $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, so löst (für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ fest) jede Funktion der Form

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x(t) = \lambda_1 e^{i\omega t} + \lambda_2 e^{-i\omega t},$$

obige Gleichung. Denn es gilt ja

$$x'(t) = \lambda_1 e^{i\omega t} + \lambda_2(-i\omega)e^{-i\omega t}$$

und

$$x''(t) = \lambda_1(i\omega)^2 e^{i\omega t} + \lambda_2(-i\omega)^2 e^{-i\omega t}$$
$$= -\omega^2(\lambda_1 e^{i\omega t} + \lambda_2 e^{-i\omega t}) = -\omega^2 x(t).$$

Wir sind aber nur an reellen Lösungen unserer Differentialgleichung $x''(t) + \frac{c}{m}\,x(t) = 0$ interessiert, da der Ort $x(t)$ des Körpers ja reell sein soll. Wie man leicht sieht, ist (für feste $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) jede Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$, eine reelle Lösung der Differentialgleichung $x''(t) + \frac{c}{m}\,x(t) = 0$.

Fragen

1. Haben wir etwa oben schon alle komplexen und reellen Lösungen konstruiert?
2. Falls dies so ist, warum können wir dann genau 2 Parameter ($\lambda_1, \lambda_2$ bzw. $c_1, c_2$) frei wählen? Wir haben obige Lösungen geraten; gibt es Verfahren, diese Lösungen zu konstruieren?
3. Können wir die Schwingung unseres Körpers bestimmen, wenn wir wissen, wie Ort und Geschwindigkeit desselben an einem festen Zeitpunkt $t_0$ sind? Mit anderen Worten: Ist $x(t_0) = x_0$ und $x'(t_0) = x_1$, ist dann die Lösung $x(t)$ von $x''(t) + \frac{c}{m}\,x(t) = 0$ unter diesen Zusatzvoraussetzungen eindeutig?

ii) Nehmen wir in unserem Beispiel des schwingenden Körpers zusätzlich an, dass die Schwingung proportional zur Geschwindigkeit gedämpft wird, so erhalten wir eine Differentialgleichung der Form

$$x''(t) + 2dx'(t) + \frac{c}{m}\,x(t) = 0$$

mit einem $d \geq 0$. Man unterscheidet 3 Fälle:

$\alpha$) $d^2 < \frac{c}{m}$ (schwache Dämpfung),

$\beta$) $d^2 > \frac{c}{m}$ (starke Dämpfung),

$\gamma$) $d^2 = \frac{c}{m}$ (kritische Dämpfung).

Wir wollen später alle Lösungen dieser Differentialgleichungen bestimmen und auch die Fragen analog zu i) beantworten.

iii) (Wachstum und Zerfall)

Die Menge von Bakterien in einer Nährlösung (gemessen in Gramm) sei zum Zeitpunkt $t$ gleich $x(t)$. Wir nehmen an, dass die Zunahme $x'(t)$ zu jedem Zeitpunkt proportional zum Bestand $x(t)$ ist, es gilt also mit einer Konstanten $\alpha > 0$, dass

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Ist $c \in \mathbb{C}$ fest, so ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x(t) = ce^{\alpha t}$, eine Lösung obiger Differentialgleichung.

Wir wollen nun zeigen, dass keine weiteren Lösungen existieren. Dazu sei $x : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar ($I$ ein offenes Intervall) und $x'(t) = \alpha x(t), t \in I$. Dann gilt mit $f : I \to \mathbb{C}, f(t) = x(t) \cdot e^{-\alpha t}$, dass $f'(t) = x'(t)e^{-\alpha t} - \alpha x(t)e^{-\alpha t} = 0$, also ist $f \equiv c, c$ eine Konstante. Es folgt $x(t) = ce^{\alpha t},\ t \in I$.

Kennen wir nun zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ den Wert $x_0 = x(t_0)$, so folgt $c = x_0\, e^{-\alpha t_0}$, und unter dieser sogenannten Anfangsbedingung gilt

$$x(t) = (x_0\, e^{-\alpha t_0}) \cdot e^{\alpha t} = x_0\, e^{\alpha(t-t_0)},\ t \in \mathbb{R}.$$

Ist also $t_0 = 0$, so erhalten wir

$$x(t) = x_0\, e^{\alpha t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Interessant ist noch, die Verdoppelungszeit $\tau$ (des Gewichtes) der Bakterien zu bestimmen, diese ist definiert als die Lösung der Gleichung

$$x(\tau) = 2x_0.$$

Es muss gelten $x_0\, e^{\alpha\tau} = 2x_0$, also $\tau = \frac{\log 2}{\alpha}$.
Wir bemerken, dass dieser Wert unabhängig von $x_0$ ist, somit verdoppelt sich der Bakterienbestand jeweils nach Ablauf der Zeit $\tau = \frac{\log 2}{\alpha}$.

Betrachten wir nun den Zerfall eines radioaktiven Elementes. Die Abnahme $x'(t)$ des Gewichtes $x(t)$ ist zu jedem Zeitpunkt proportional zum vorhandenen Gewicht, mit einer Konstanten $\alpha < 0$ gilt also

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Analog zu oben erhalten wir, dass

$$x(t) = ce^{\alpha t} \text{ mit } c \in \mathbb{C} \text{ fest.}$$

Ist das Gewicht zum Zeitpunkt $t_0$ bekannt, also $x(t_0) = x_0$, so gilt ganz genauso wie oben

$$x(t) = x_0\, e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Interessant ist hier, die sogenannte Halbwertszeit $\tau$ zu berechnen, während dessen sich das Gewicht $x(t)$ halbiert. Es gilt also

$$x_0 e^{\alpha\tau} = x(\tau) = \frac{1}{2}\, x_0, \text{ also } \tau = \frac{\log\frac{1}{2}}{\alpha} = \frac{-\log 2}{\alpha}.$$

Wiederum sieht man, dass die Halbwertszeit unabhängig von $x_0$ ist: Hat also unser Isotop zum Zeitpunkt $t_0$ das Gewicht $x(t_0)$, so ist

$$x\Bigl(t_0 + \underbrace{\frac{-\log 2}{\alpha}}_{>0}\Bigr) = \frac{1}{2}\, x(t_0).$$

Wir bemerken, dass wir bei der Differentialgleichung $x'(t) = \alpha x(t)$ (der Fall $\alpha = 0$ ist trivial!) alle Lösungen gefunden haben und diese Lösung unter der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ auch eindeutig ist!

iv) (leicht verbessertes Wachstumsmodell)
Den tatsächlichen biologischen Gegebenheiten trägt folgendes Wachstumsmodell etwas besser Rechnung: Wir nehmen an, dass die Zunahme $x'(t)$ (des Gewichts) der Bakterien $x(t)$ nicht proportional zum Gewicht ist, sondern dass $x'(t) = \alpha x(t)\bigl(\beta - x(t)\bigr)$ gilt, $\beta$ heißt hier die Kapazitätsgrenze. Diese Differentialgleichung werden wir später lösen und die Fragen analog zu i) beantworten!

v) In der Physik spielen folgende (sogenannte partielle) Differentialgleichungen eine Rolle. Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge.

$\alpha$) Gesucht sind Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = f$, hierbei ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine fest vorgegebene Funktion.
Die Gleichung $\Delta u = f$ beschreibt z.B. eine zeitunabhängige Wärmeverteilung in $\Omega$.

$\beta$) Gesucht sind Lösungen $u : [0, \infty) \times \Omega$ der Gleichung $\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = f$.
Diese Gleichung („Wärmeleitungsgleichung“) beschreibt eine zeitabhängige Wärmeverteilung in $\Omega$.

$\gamma$) Gesucht sind Lösungen $u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = f$.
Diese Gleichung („Wellengleichung") beschreibt Wellen, aber auch elektromagnetische Felder.

$\delta$) Gesucht sind Lösungen $u : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\frac{i\partial}{\partial t} u - \Delta u = f$.
Diese Gleichung („Schrödinger-Gleichung") beschreibt das quantenmechanische Verhalten eines Teilchens.

All diese Gleichungen können wir hier (trotz ihrer Wichtigkeit) noch nicht behandeln.

## 14.2 Definitionen und Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Wir definieren nun explizite Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung. Im folgenden sei $(X, \| \cdot \|_X)$ ein vollständiger normierter Raumüber $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Definition 14.2.1** Ist $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ offen und ist $f : U \to X$ stetig, so heißt

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung. Auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt die $n$-mal (stetig) differenzierbare Funktion $x : I \to X$ Lösung obiger Differentialgleichung, falls

$$\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \in U \text{ für alle } t \in I$$

und

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \text{ für alle } t \in I$$

gilt.
Ist $n = 1$, also $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$, so heißt obige Gleichung gewöhnliche Differentialgleichung oder dynamisches System.

Für eine Lösung $x : I \to X$ einer Differentialgleichung schreibt man (um die Wichtigkeit des Definitionsbereichs $I$ auszudrücken) auch $(x, I)$, und man setzt

$$(x_1, I_1) \subset (x_2, I_2), \text{ falls } I_1 \subset I_2 \text{ und } x_2|_{I_1} = x_1$$

sowie $(x_1, I_1) = (x_2, I_2)$, falls $I_1 = I_2$ und $x_1 = x_2$ gilt.

**Beispiel 14.2.2** i) Es sei $X = \mathbb{R}$ und $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t,x) := \alpha x$. Dann ist

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) = \alpha x(t)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

ii) Es sei wieder $X = \mathbb{R}, U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\ \omega^2, d \geq 0, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, f(t, x_0, x_1) = -\omega^2 x_0 - 2dx_1$.
Dann ist

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) = -\omega^2 x(t) - 2dx'(t)$$
$$(\Leftrightarrow x''(t) + 2dx'(t) + \omega^2 x(t) = 0)$$

eine Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

**Definition 14.2.3** Es sei $(x, I)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big).$$

Weiter seien $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ vorgeschrieben. Gilt noch

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

so sagt man, dass die Lösung $(x, I)$ der Anfangsbedingung

$$x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu\ , 0 \leq \nu \leq n-1,$$

an $t_0$ genügt.
Für $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in U$ heißt

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big),\ x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu,\ 0 \leq \nu \leq n-1,$$

Anfangswertproblem.

Wir zeigen nun, dass gewöhnliche Differentialgleichungen $n-$ter Ordnung sich immer auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zurück führen lassen, allerdings wird dann der Bildraum $X$ zu $X^n$, also z.B. $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^n$ und man erhält in diesem Fall anstelle der Gleichung $n-$ter Ordnung ein System von $n$ Gleichungen erster Ordnung.

**Satz 14.2.4** *Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ offen, die Abbildung $f : U \to X$ stetig und $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in U$.*

*i) Ist $t_0 \in I$ und $x : I \to X$ Lösung des Anfangswertsproblems*

$$(14.2.1) \qquad \begin{aligned} x^{(n)}(t) &= f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \\ x^{(\nu)}(t_0) &= x_\nu, \ 0 \leq \nu \leq n-1, \end{aligned}$$

*so löst $\tilde{x} : I \to X^n$, $\tilde{x}(t) = \big(x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$ das Anfangswertproblem*

$$(14.2.2) \qquad \begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= F\big(t, \tilde{x}(t)\big) \\ \tilde{x}(t_0) &= (x_0, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

*mit*

$$F : U \to X^n, F\big(t, \tilde{x}(t)\big) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n\ (t) \\ f\big(t, \tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\big) \end{pmatrix}.$$

*ii) Ist $\tilde{x} : I \to X^n$ Lösung des Anfangswertproblems (14.2.2), so löst $x : I \to X, x(t) := \tilde{x}_1(t)$, das Anfangswertproblem (14.2.1).*

*Können wir also Anfangswertprobleme erster Ordnung*

$$\tilde{x}'(t) = F\big(t, \tilde{x}(t)\big), \ \tilde{x}(t_0) = (x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

*lösen, so auch die $n$-ter Ordnung.*

**Beweis.**

i) Es sei $x : I \to X$ eine Lösung von (14.2.1).
Dann ist $\tilde{x} : I \to X^n, \tilde{x}(t) = \big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$, differenzierbar, und es gilt $\tilde{x}'_\nu(t) = x^{(\nu)}(t) = \tilde{x}_{\nu+1}(t), 1 \leq \nu \leq n-1$ und $\tilde{x}'_n(t) = x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) = f\big(t, \tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}'_n(t)\big)$. Weiter ist $\tilde{x}(t_0) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Also löst $\tilde{x} : I \to X^n$ das Anfangswertproblem (14.2.2).

ii) Es löse $\tilde{x} : I \to X^n$ das Anfangswertproblem (14.2.2). Dann gilt für $x : I \to X, x(t) := \tilde{x}_1(t)$, dass

$$\begin{aligned}
&x'(t) = \tilde{x}_2(t)\\
&\tilde{x}_2'(t) = \tilde{x}_3(t)\\
&\vdots\\
&\tilde{x}_{n-1}'(t) = \tilde{x}_n(t)\\
&\tilde{x}_n'(t) = f\big(t, x(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\big).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $x$ $n$-mal differenzierbar und $x^{(\nu)}(t) = \tilde{x}_{\nu+1}(t), 0 \leq \nu \leq n-1$, und $x^{(n)}(t) = \tilde{x}_2^{(n-1)}(t) = \ldots = \tilde{x}_n'(t) = f\big(t, \tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots \tilde{x}_n(t)\big) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$.

Weiter gilt

$$x^{(\nu)}(t_0) = \tilde{x}_{\nu+1}(t_0) = x_\nu,\ 0 \leq \nu \leq n-1.$$

Also löst $x$ das Anfangswertproblem (14.2.1).

□

**Bemerkung 14.2.5** Ist $X = \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und das skalare Anfangswertproblem $n-$ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

$$x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu \quad (0 \leq \nu \leq n-1),$$

vorgelegt, so müssen wir nach obigem Satz nur das folgende System erster Ordnung

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1'(t) &= \tilde{x}_2(t)\\
\tilde{x}_2'(t) &= \tilde{x}_3(t)\\
&\cdots\\
\tilde{x}_{n-1}'(t) &= \tilde{x}_n(t)\\
\tilde{x}_n'(t) &= f(t, \tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t))
\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{x}_1(t_0) = x_0, \ldots, \tilde{x}_n(t_0) = x_{n-1}$ lösen und wir erhalten mit $x(t) := x_1(t)$ eine Lösung des vorgelegten Problems. Für Existenz und Eindeutigkeitsaussagen brauchen wir ab jetzt nur Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten, geht es allerdings um konkrete Lösungen, so werden wir die obigen skalaren Anfangswertproblemen $n-$ter Ordnung auf andere Weise untersuchen.

**Beispiel 14.2.6** Es sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{14.2.3}$$

vorgelegt mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
Das zugehörige System ist also

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1'(t) &= \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_2'(t) &= -\omega^2 \tilde{x}_1(t) \end{aligned} \tag{14.2.4}$$

mit der Anfangsbedingung $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (0, 1)$.
Ist nun $\tilde{x}(t) = \big(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)\big)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (14.2.4), so ist $x(t) := \tilde{x}_1(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (14.2.3).

## 14.3 Elementare Lösungsverfahren

Wir wollen in diesem Abschnitt einige elementare Lösungsverfahren für bestimmte einfache skalare Differentialgleichungen kennenlernen.

Wir starten mit Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

**Satz 14.3.1** *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, also $U = I \times J, (t_0, x_0) \in U, g : I \to \mathbb{R}$ stetig und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig. Vorgelegt sei das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t)h\big(x(t)\big) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

*Dann gilt*

*i) Ist $h(x_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $x : I \to \mathbb{R}, x(t) := x_0$, eine Lösung des Anfangswertproblems.*

*ii) Ist $h(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $x : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, welches das Anfangswertproblem löst. Eine Lösung erhält man durch Auflösen der Gleichung*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{h(s)}\, ds = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

*nach $x$.*

**Beweis.** i) ist klar. Zu ii): Da $h$ stetig und $h(x_0) \neq 0$ gilt, so können wir nach eventueller Verkleinerung des Intervalles $J$ annehmen, dass $h$ keine Nullstelle auf $J$ hat.
Es sei dann

$$F : J \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{h(s)}\, ds$$

und

$$G : I \to \mathbb{R},\ G(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds.$$

$F' = \frac{1}{h}$ ist entweder positiv oder negativ auf $J$ (da $\frac{1}{h}$ stetig und ohne Nullstelle). Daher ist $F$ streng monoton und stetig differenzierbar. Also hat $F$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $F^{-1} : F(J) \to J$. Weiter ist $F(J)$ ein offenes Intervall mit $0 = F(x_0) \in F(J)$. Aufgrund der Stetigkeit von $G$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $G\big((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\big) \subset F(J)$.
Setzt man

$$x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R},\ x(t) = F^{-1}\big(G(t)\big),$$

so erhält man $x(t)$ gerade durch Auflösen der Gleichung

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{h(s)}\, ds = F(x) = G(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

nach $x$.
Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} x'(t) &= (F^{-1})'\big(G(t)\big)G'(t) \\ &= \frac{1}{F'(F^{-1}(G(t)))}\, G'(t) \\ &= h\big(F^{-1}(G(t)\big)g(t) \\ &= h\big(x(t)\big)g(t) \end{aligned}$$

und

$$x(t_0) = F^{-1}\big(G(t_0)\big) = F^{-1}(0) = x_0.$$

□

**Beispiel 14.3.2** i) Es sei das Anfangswertproblem $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$, vorgelegt. Dieses Anfangswertproblem besitzt unendlich viele Lösungen $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Aus obigem Satz erhält man (mit Teil i)) zunächst die Lösung $x = 0$. Wir setzen $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x_c(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & : \; t \geq c \\ 0 & : \; t \leq c \end{cases} .$$

Offensichtlich löst auch $x_c$ das Anfangswertproblem. Wir sehen, dass die Lösung eines Anfangswertproblemes trotz unschuldig aussehender rechter Seite nicht eindeutig sein muß!

ii) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem

$$x'(t) = tx(t)^2, \; x(0) = x_0,$$

vorgelegt.
Für $x_0 = 0$ hat das Anfangswertproblem die Lösung $x \equiv 0$.
Für $x_0 \neq 0$ erhält man die Gleichung

$$F\big(x(t)\big) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{t^2}\, ds = \int_0^t s ds = G(t),$$

was zu $\frac{-1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} t^2$ äquivalent ist.
Also erhält man als Lösungen

$$x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2} \quad \text{auf} \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{x_0}}, \sqrt{\frac{2}{x_0}}\right),$$

falls $x_0 > 0$ und

$$x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2} \quad \text{auf } \mathbb{R}, \text{ falls } x_0 < 0.$$

Wir sehen: Obwohl die rechte Seite der Differentialgleichung sehr einfach aussieht, gibt es Lösungen, welche nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar sind.

Als Nächstes betrachten wir so genannte lineare skalare Differentialgleichungen erster Ordnung.

**Satz 14.3.3** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, und es sei $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}$.*
*Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

*genau eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}$, welche durch*

$$x(t) = e^{A(t)}\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)dx\Big)$$

*mit $A(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)dx$, gegeben ist.*

**Beweis.** Es gilt für alle $t \in I$, dass

$$\begin{aligned} x'(t) &= A'(t)e^{A(t)}\Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds\Big) \\ &\quad + e^{A(t)}\Big(e^{-A(t)} b(t)\Big) \\ &= a(t)x(t) + b(t). \end{aligned}$$

Weiter gilt $x(t_0) = e^0(x_0 + 0) = x_0$.
Ist $\tilde{x} : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so sei

$$\varphi(t) := \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)e^{-A(t)}, t \in I.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \big(x'(t) - \tilde{x}'(t)\big)e^{-A(t)} - \big(x(t) - \tilde{x})(t)\big)e^{-A(t)} A'(t) \\ &= a(t)\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)e^{-A(t)} - \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)a(t) \cdot e^{-A(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(t_0) = 0$ ist $\varphi = 0$, also $x = \tilde{x}$. □

**Beispiel 14.3.4** Es seien $\alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das Anfangwertproblem

$$x'(t) = -\alpha x(t) + \beta,\ x(0) = x_0.$$

Dann ist $A(t) = -\alpha t$, und die eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}\Big(x_0 + \int\limits_0^t e^{\alpha s}\beta ds\Big) \\ &= \frac{\beta}{\alpha} + \Big(x_0 - \frac{\beta}{\alpha}\Big)\, e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 14.3.5** (Bernoullische Differentialgleichungen)
Es seien $I$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^{\alpha}.$$

Wir suchen positiven Lösungen dieser Gleichung. Dazu setzen wir $z(t) := x(t)^{1-\alpha}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} & x'(t) - a(t) - b(t)x(t)^{\alpha} \\ = & \frac{1}{1-\alpha}\, z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}\big(z'(t) - a(t)(1-\alpha)z(t) - (1-\alpha)b(t)\big). \end{aligned}$$

Also gilt $x'(t) = a(t) + b(t)x(t)^{\alpha}$ (im Falle $x > 0$) genau dann, wenn

$$z'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t).$$

Den Anfangsdaten $(t_0, x_0)$ für $x(t)$ mit $x_0 > 0$ entspricht den Anfangsdaten $(t_0, x_0^{1-\alpha})$ für $z(t)$. Die lineare Differentialgleichung $z'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t)$ kann man mit den Anfangsdaten $(t_0, x_0^{1-\alpha})$ lösen, dann löst $x(t) := z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ die urspezifische Gleichung (zumindest dort, wo $z(t) > 0$) mit den Anfangswerten $(t_0, x_0)$.

**Beispiel 14.3.6** Es sei die Differentialgleichung

$$x'(t) = \alpha x(t)\big(\beta - x(t)\big) = \alpha\beta x(t) - \alpha x(t)^2$$

vorgelegt. Wir suchen positive Lösungen dieser Gleichung.
Die Lösungen $x$ sind gerade $x = \frac{1}{z}$, wobei $z$ Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z'(t) = -\alpha\beta z(t) + \alpha.$$

Diese hat die reellen Lösungen

$$z(t) = \frac{1}{\beta} + ce^{-\alpha\beta t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Die für $t \geq 0$ positiven Lösungen sind die, welche $z(0) = \frac{1}{\beta} + c > 0$ erfüllen, also sind die für $t \geq 0$ positiven Lösungen der Gleichung $x'(t) = \alpha(t)\big(\beta - x(t)\big)$ gegeben durch

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{\beta} + ce^{-\alpha\beta t}}, \qquad c > -\frac{1}{\beta}.$$

Wir bemerken, dass $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \beta$ und dass die Konstante $\beta$ selbst eine Lösung ist, die so genannte Gleichgewichtslösung.

Zum Schluss dieses Kapitels betrachten wir lineare skalare Diffferentialgleichungen $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Später werden die hier vorgestellten Ergebnisse teilweise auf den nicht-skalaren und nicht-konstanten Fall verallgemeinert werden.
Vorgelegt seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und damit die so genannte homogene Differentialgleichung

$$\text{(H)} \qquad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0.$$

Gesucht sind alle Lösungen $(x, I)$ dieser Differentialgleichungen auf einem offenen Intervall $I$. Sind $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $t_0 \in I$, so betrachtet man auch das zugehörige Anfangswertproblem

$$\text{(H)} \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Ist $x$ eine Lösung von (H), so ist $x$ schon $n$-mal stetig differenzierbar (dies gilt bei allen Lösungen von Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung).
Wir werden später zeigen, dass alle Lösungen von (H) sogar beliebig oft differenzierbar sind (ja sogar durch Potenzreihen dargestellt werden).
Der Kürze halber führen wir die so genannte Operatorschreibweise ein.
Es sei $I$ ein Intervall und es sei $P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad $n$. Für $f \in C^n(I)$ sei

$$P(\partial)f \ := \ \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \partial^\nu\Big) f := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu f^{(\nu)},$$

also insbesondere $\partial^\nu f = f^{(\nu)}$.

**Satz 14.3.7** *Es sei $I$ in offenes Intervall.*
*Die Abbildung $P(\partial) : C^n(I) \to C(I), f \mapsto P(\partial)f$ ist linear, und es ist für $P(z) = z^n + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$ ihr Kern* $\ker P(\partial)$ *gerade die Menge aller Lösungen von (J). Insbesondere ist diese Menge ein Untervektorraum von $C^n(I)$.*

**Beweis.** Es seien $f, g \in C^n(I), \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$P(\partial)(f + \lambda g) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (f + \lambda g)^{(\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu f^{(\nu)} + \lambda \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu g^{(\nu)} = P(\partial)f + \lambda P(\partial)g.$$

Also ist $P(\partial)$ linear. Es gilt

$$P(\partial)f = 0 \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu f^{(\nu)} = 0$$

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots a_0 f(t) = 0, \quad t \in I.$$

Da der Kern einer linearen Abbildung immer ein Untervektorraum ist, folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun den Vektorraum kor$P(\partial)$ aller Lösungen von (H) genauer untersuchen. Dazu benötigen wir

**Satz 14.3.8** *(Fundamentalsatz der Algebra)*
*Es sei $P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ ein komplexes Polynom mit $a_n = 1$. Dann existieren paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ mit*

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{\alpha_\nu}.$$

**Bemerkung 14.3.9** i) Sind $P, Q$ komplexe Polynome, so gilt $P(\partial) \circ Q(\partial) = (P \cdot Q)(\partial) = Q(\partial) \circ P(\partial)$.

ii) Ist $P(z) = \prod\limits_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{\alpha_\nu}$ und $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ eine Permutation, so gilt

$$\begin{aligned} P(\partial) &= (\partial - \lambda_1)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ (\partial - \lambda_k)^{\alpha_k} \\ &= (\partial - \lambda_{\pi(1)})^{\alpha_{\pi(1)}} \circ (\partial - \lambda_{\pi(2)})^{\alpha_{\pi(2)}} \circ \cdots \circ (\partial - \lambda_{\pi(k)})^{\alpha_{\pi(k)}}. \end{aligned}$$

Dies folgt sofort aus i).

iii) Ist $f = e^{\lambda \cdot}$, so ist

$$P(\partial)f = P(\lambda)e^{\lambda \cdot}.$$

iv) Ist $g \in C^n(I), \lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{N}$, so ist

$$(\partial - \lambda)^\alpha (g \cdot e^{\lambda \cdot}) = g^{(\alpha)} e^{\lambda \cdot}.$$

Dies folgt sofort aus $(\partial - \lambda)(ge^{\lambda \cdot}) = g' e^{\lambda \cdot}$.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort

**Korollar 14.3.10** *Es sei $P$ ein Polynom, $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $a_n = 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit*

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{\alpha_\nu}.$$

*Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} &t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \ldots, t \mapsto t^{\alpha_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ &t \mapsto e^{\lambda_2 t}, \ldots, t \mapsto t^{\alpha_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ &t \mapsto e^{\lambda_k t}, \ldots, t \mapsto t^{\alpha_k - 1} e^{\lambda_k t}, \end{aligned}$$

*allesamt Lösungen von (H).*

Wir zeigen nun, dass die obigen Lösungen als Funktionen auf einem offenen Intervall $I$ unabhängig sind.

**Lemma 14.3.11** *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z^{\gamma_\nu} e^{\lambda_\nu z}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{N}_0$ mit $(\lambda_\nu, \gamma_\nu) \neq (\lambda_\mu, \gamma_\mu), \nu \neq \mu$. Gilt $f = 0$ auf einem offenen Intervall $I$, so sind alle $\alpha_\nu = 0$, $1 \leq \nu \leq n$.*

**Beweis.** (durch Induktion über $n$)

Zunächst ist $f$ auf $\mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe darstellbar, also $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, $z \in \mathbb{C}$. Ist $t_0 \in I$, so können wir diese Potenzreihe umsummieren und erhalten $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z - z_\nu)^\nu, z \in \mathbb{C}$.

Dies zeigt (wegen $f(t) = 0, t \in I$), dass alle $b_\nu = 0, \nu \in \mathbb{N}_0$, und damit $f = 0$ auf $\mathbb{C}$.

Es gelte die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$, und es sei $f(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu z^{\gamma_\nu} e^{\lambda_\nu z}$. Ohne Einschränkung sei dann $|\lambda_{n+1}| = \max\big\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_{n+1}|\big\}$ und $\gamma_{n+1} = \max\{\gamma_\nu : \lambda_\nu = \lambda_{n+1}\}$.

Es sei

$$z_k = \begin{cases} k & , \text{ falls } \lambda_{n+1} = 0 \\ k \cdot \overline{\lambda_{n+1}} & , \text{ falls } \lambda_{n+1} \neq 0. \end{cases}$$

Es gilt dann im Fall $\lambda_{n+1} \neq 0$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k^{\gamma_{n+1}} e^{\lambda_{n+1} z_k}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \lim_{k\to\infty} \frac{z_k^{\gamma_\nu} e^{\lambda_\nu z_k}}{z_k^{\gamma_{n+1}} e^{\lambda_{n+1} z_k}} + \alpha_{n+1} \\ &= \alpha_{n+1}, \end{aligned}$$

da

$$\lim_{k\to\infty} (k\overline{\lambda_{n+1}})^{\gamma_\nu - \gamma_{k+1}} \cdot e^{k(\lambda_\nu \overline{\lambda_{n+1}} - |\lambda_{n+1}^2|)} = 0 \qquad \text{für } 1 \leq \nu \leq n.$$

Somit ist $\alpha_{n+1} = 0$, und nach Induktionsannahme sind $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Der Fall $\lambda_{n+1} = 0$ wird analog behandelt. □

Wir wollen nun zeigen, dass die oben konstruierten Lösungen eine Basis des Lösungsraumes ker$P(\partial)$ von (H) bilden. Dazu benötigen wir

**Lemma 14.3.12** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $t_0 \in I, C \geq 0$ mit $f(t_0) = 0$ und $\big|f'(t)\big| \leq C|f(t)|, t \in I$. Dann ist $f = 0$.*

**Beweis.**

1. Es sei zunächst $f : I \to [0, \infty)$. Die Funktion $g : I \to [0, \infty), g(t) = f(t)e^{-Ct}$ ist wegen $g'(t) = e^{-Ct}\big(f'(t) - Cf(t)\big)$ monoton fallend. Da

$g(t_0) = 0$, folgt, dass $g(t) = 0, t \geq t_0$. Analog zeigt man mit $g(t) = f(t)e^{Ct}$, dass $g(t) = 0, t \leq t_0$. Somit gilt $g(t) = 0, t \in I$, und damit auch $f(t) = 0, t \in I$.

2. Es sei nun $f : I \to \mathbb{C}$. Setze $h : I \to \mathbb{C}, h(t) = \left|f(t)\right|^2 = f(t) \cdot \overline{f(t)} \geq 0$. Es gilt $h(t_0) = 0, \left|h'(t)\right| = \left|f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}\right| \leq 2\left|f'(t)\overline{f(t)}\right| \leq 2C\left|f(t)\right|^2 = 2C\left|h(t)\right|$.
   Mit 1. ist $h(t) = 0, t \in I$, also ist auch $f(t) = 0, t \in I$.

□

**Lemma 14.3.13** *(Eindeutigkeit des Anfangswertproblem) Es sei $I$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $x_1, x_2 : I \to \mathbb{C}$ seien Lösungen von (H) mit*

$$x_1^{(\nu)}(t_0) = x_2^{(\nu)}(t_0), \qquad 0 \leq \nu \leq n-1.$$

*Dann gilt $x_1 = x_2$ auf ganz $I$.*

**Beweis.** Wir wenden das Lemma auf $f : I \to \mathbb{C}, f(t) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|x^{(k)}(t)\right|^2$ mit $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ an. $f$ ist differenzierbar, da $x$ $n$-mal differenzierbar ist. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(t) &= x^{(n-1)}(t)\overline{x^{(n)}(t)} + x^{(n)}(t)\overline{x^{(n-1)}(t)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(x^{(k)}(t)\overline{x^{(k+1)}(t)} + x^{(k+1)}(t)\overline{x^{(k)}(t)}\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\left|x^{(k)}(t)\right| \leq \sqrt{f(t)}, 0 \leq k \leq n-1$, und

$$\left|x^{(n)}(t)\right| = \Big|\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^{(\nu)}(t)\Big| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \sqrt{f(t)}$$

folgt, dass

$$\left|f'(t)\right| \leq 2\Big(\cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| + (n-1)\Big)\sqrt{f(t)}\sqrt{f(t)} =$$

$$= 2\Big(\sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| + (n-1)\Big) f(t).$$

Also folgt $f(t) = 0, t \in I$, und somit ist auch $x(t) = 0, t \in I$. □

**Korollar 14.3.14** *Der Vektorraum* $\ker P(\partial)$ *aller Lösungen von (H) ist n-dimensional, und die in 14.3.10 konstruierten Lösungen von (H) bilden eine Basis.*

**Beweis.** In 14.3.11 wurde gezeigt, dass die in 14.3.10 konstruierten Lösungen unabhängig sind. Da es sich um genau $n$ Lösungen handelt, ist $\dim \mathrm{kor} P(\partial) \geq n$.
Wir betrachten nun die lineare Abbildung (für festes $t_0 \in I$)

$$J : \ker P(\partial) \to \mathbb{C}^n, \; J(x) = \left(x^{(\nu)}(t_0)\right)_{0 \leq \nu \leq n-1}.$$

Nach 14.3.13 ist $J$ injektiv, also ist $\dim \ker P(\partial) \leq \dim \mathbb{C}^n = n$. Insgesamt folgt $\dim \ker P(\partial) = n$ und somit bilden die $n$ linear unabhängigen Lösungen eine Basis. □

**Korollar 14.3.15** *Es seien* $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$*,* $I$ *ein offenes Intervall und* $t_0 \in I$*. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdot + a_0 x(t) = 0, \\ &x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{aligned}$$

*eine eindeutige Lösung für jedes* $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$*.*

**Beweis.** Es sei wieder $J : \ker P(\partial) \to \mathbb{C}^n, J(x) = \left(x^{(\nu)}(t_0)\right)_{0 \leq \nu \leq n-1}$. Dann ist $J$ injektiv und wegen $\dim \ker P(\partial) = n$ auch surjektiv, also insgesamt bijektiv. □

**Beispiel 14.3.16** Wir wollen nun alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

bestimmen.
Im obigen Fall ist $p(z) = \omega^2 + z^2 = (z + i\omega)(z - i\omega)$.
Ist also $x_1(t) = e^{i\omega t}$, $x_2(t) = e^{-i\omega t}$, so liefert Korollar 14.3.14, dass jede Lösung $x$ obiger Differentialgleichung sich schreiben lässt als $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.
Außerdem ist für vorgegebenes $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ das zugehörige Anfangswertproblem nach 14.3.15 eindeutig auf jedem offenen Intervall $I$ und jedem $t_0 \in I$ lösbar.

**Bemerkung 14.3.17** (reelle Lösungen) Es seien nun die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ in (H) alle reell, und es sei wieder $P(z) := z^n + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$.

Zunächst bemerken wir, dass für jede komplexe Lösung $x : I \to \mathbb{C}$ sowohl $\operatorname{Re} x$ als auch $\operatorname{Im} x$ reelle Lösungen von (H) sind.

Eine reelle $k$-fache Nullstelle $\lambda$ von $P$ liefert die linear unabhängigen Lösungen $t \mapsto e^{\lambda t}, \ldots, t \mapsto t^{k-1} e^{\lambda t}$. Die nicht reellen Nullstellen treten in Paaren $\lambda = \alpha + i\beta$ und $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ auf (denn ist $P(\lambda) = 0$, so gilt auch

$$P(\overline{\lambda}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \overline{\lambda}^\nu + \overline{\lambda}^n = \overline{\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \lambda^\nu + \lambda^n} = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0).$$

Das Paar $(\lambda, \overline{\lambda})$ liefert die $2k$ linear unabhängigen Lösungen

$$t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t}, \ldots, t^{k-1} e^{(\alpha+i\beta)t}$$
$$t \mapsto e^{(\alpha-i\beta)t}, \ldots, t^{k-1} e^{(\alpha-i\beta)t},$$

wenn $\lambda$ eine nicht-reelle Nullstelle der Ordnung $k$ ist.
Da nun sowohl Real- als auch Imaginärteile dieser Funktionen ebenfalls Lösungen sind, erhalten wir die $2k$ reellen Lösungen

$$t \mapsto e^{\alpha t} \cos \beta t, \ldots, t \mapsto t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t,$$
$$t \mapsto e^{\alpha t} \sin \beta t, \ldots, t \mapsto t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Nach diesem Verfahren erhält man insgesamt $n$ reelle Lösungen. Diese sind linear unabhängig, da die ursprünglichen komplexen Lösungen im Spann der reellen liegen. Analog wie im komplexen Fall sieht man, das der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Lösungen die Dimension $n$ hat, die angegebenen reellen Lösungen ihn aufspannen und die entsprechenden reellen Anfangswertprobleme eindeutig lösbar sind.

**Beispiel 14.3.18** (gedämpfte Schwingungen, siehe 14.1.1)
Wir betrachten die Differentialgleichung (mit $d \geq 0, k > 0$)

$$x''(t) + 2dx'(t) + kx(t) = 0.$$

Das zugehörige Polynom ist also $P(z) = z^2 + 2dz + k$, welches die Nullstellen

(1) $\lambda_{1,2} = -d \pm i\omega$ mit $\omega = \sqrt{k - d^2}$, falls $d^2 < k$
(schwache Dämpfung)

(2) $\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}$ falls $d^2 > k$
(starke Dämpfung)

(3) $\lambda = -d$ falls $d^2 = k$
(kritische Dämpfung)

Im Fall (3) liegt eine doppelte Nullstelle vor.

Zu (1) Wir erhalten als allgemeine komplexe Lösung

$$x(t) = e^{-\alpha t}(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{C})$$

und als allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Zu (2) Wir erhalten als allgemeine komplexe Lösung

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{C})$$

und als allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Zu (3) Wir erhalten als allgemeine komplexe Lösung

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-dt} \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{C})$$

und als allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-dt} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

## 14.4 Lösungstheorie für allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

und verallgemeinern später die gewonnenen Resultate mit Hilfe von 14.2.4 auf Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= f\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \\ x^{(\nu)}t_0) &= x_\nu,\ 0 \leq \nu \leq n-1. \end{aligned}$$

Es sei wieder $(X, \|\cdot\|_X)$ ein vollständiger normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Definition 14.4.1** Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X^n$. Die Abbildung $f : U \to X, (t, x) \mapsto f(t, x)$, heißt Lipschitz-stetig bezüglich $x$ (oder in $x$), wenn sie stetig ist und es eine Konstante $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\|_X \leq L\|x-y\|_{X^n}$$

für alle $(t, x), (t, y) \in U$.
$f$ heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$, falls zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ eine Umgebung $V$ von $(t_0, x_0)$ existiert, so dass $f|_V$ Lipschitz-stetig bezüglich $x$ ist.

**Satz 14.4.2** *Es sei $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ stetig, so dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existieren und stetig auf $U$ sind. Dann existiert zu jedem kompakten Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und zu jeder kompakten konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $J \times K \subset U$ ein $L \geq 0$ mit*

$$\big|f(t,x) - f(t,y)\big| \leq L|x-y|, t \in J, x, y \in K.$$

*Insbesondere ist $f$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$.*

**Beweis.** Es sei $g_t(x) := f(t,x)$. Dann gilt $dg_t(x)(r) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x) r_\nu$.
Wir erhalten mit dem HDI für $t \in J, x, y \in K$, dass

$$
\begin{aligned}
\big|f(t,x) - f(t,y)\big| &= \big|g_t(x) - g_t(y)\big| \\
&= \Big|\int_0^1 dg_t\big(x + s(y-x)\big)(y-x)ds\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\big(t, x + s(y-x)\big)(y_\nu - x_\nu)ds\Big| \\
&\le \sup_{\substack{\xi\in[x,y]\\ \tau\in J\\ 1\le\nu\le n}} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\tau,\xi)\Big| \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu - x_\nu| \\
&\le \sup|\ldots| \cdot \sqrt{n}|y-x|.
\end{aligned}
$$

□

Wir zeigen nun eine Integralversion der Differentialgleichung.

**Lemma 14.4.3** *Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X$ offen und $f : U \to X$ stetig. Eine stetige Funktion $x : I \to X$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\big(t, x(t)\big) \in U, t \in I$, löst genau dann das Anfangswertproblem*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f\big(x, x(t)\big) \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned}
$$

*auf $I$, wenn*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) \text{ für alle } t \in I$$

*gilt.*

**Beweis.** Beide Aussagen implizieren, dass $x$ stetig differenzierbar ist, wir dürfen also in beiden Richtungen den HDI anwenden.

1. Es löse $x$ das Anfangswertproblem. Dann gilt

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big),$$

also mit dem HDI

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(t)dt = \int_{t_0}^{t} f\big(t, x(t)\big)dt.$$

Wegen $x(t_0) = x_0$ folgt die Formel für $x$.

2. Es sei $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds$. Dann gilt $x(t_0) = x_0$ und der HDI ergibt

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big).$$

□

Wir benötigen insbesondere für die Eindeutigkeit der Lösung das folgende nützliche Ergebnis.

**Lemma 14.4.4** *(Gronwall-Lemma) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I, f : I \to [0, \infty)$ stetig. Existieren Konstanten $A, B \geq 0$, so dass*

$$f(t) \leq A\Big|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\Big| + B$$

*für alle $t \in I$, so gilt schon*

$$f(t) \leq Be^{-A|t-t_0|}, \ t \in I.$$

**Beweis.** Es sei $F(t) := A\int_{t_0}^{t} f(s)ds + B$.
Dann gilt für $t > t_0$, dass

$$\begin{aligned} F'(t) &= Af(t) \leq A \cdot \Big(A\int_{t_0}^{t} f(s)ds + B\Big) \\ &= AF(t). \end{aligned}$$

Wir argumentieren nun ähnlich wie im Beweis von 14.3.12:
Ist $H(t) := F(t)e^{-A(t-t_0)}$, so gilt

$$\begin{aligned} H'(t) &= F'(t)e^{-A(t-t_0)} - AF(t)e^{-A(t-t_0)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

und somit ist $H(t) \leq H(t_0) = B$ für $t > t_0$, also

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{A}\bigl(Af(t)\bigr) \leq \frac{1}{A}\bigl(AF(t)\bigr) \\ &= F(t) = H(t)e^{A(t-t_0)} \leq H(t_0)e^{A(t-t_0)} \\ &= Be^{A(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Um die Behauptung für $t < t_0$ zu zeigen, setze

$$F(t) := A\int\limits_t^{t_0} f(s)ds + B$$

und

$$H(t) = F(t)e^{A(t-t_0)}$$

und verfahre analog. □

Der folgende Satz verallgemeinert 14.3.13 (auch wenn dies nicht sofort erkennbar ist).

**Satz 14.4.5** *(Eindeutigkeitssatz) Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X$ offen und $f : U \to X$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$.*
*Sind $x_1, x_2 : I \to X$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$x'(t) = f\bigl(t, x(t)\bigr)$$

*und gilt $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ für einen Punkt $t_0 \in I$, so gilt*

$$x_1 = x_2$$

*auf ganz $I$.*

**Beweis.** Es sei

$$I' = \bigl\{t \in I : x_1(t) = x_2(t)\bigr\} = (x_1 - x_2)^{-1}\bigl(\{0\}\bigr).$$

Da $x_1 - x_2$ stetig ist, ist $I'$ abgeschlossen in $I$, und wegen $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ ist $t_0 \in I$. Da $I$ zusammenhängend ist, bleibt zu zeigen, dass $I'$ offen in $I$ ist. (Bei zusammenhängenden Mengen gibt es nur eine nicht leere, gleichzeitig offene und abgeschlossene Teilmenge, nämlich die Menge selbst, siehe 4.3.2 ii).)

Es sei also $t_1 \in I'$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $t_1$ ein innerer Punkt ist, also ein in $\mathbb{R}$ offenes Intervall $J$ finden mit $t_1 \in J \cap I \subset I'$. Es sei dazu $t_1 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $V \subset X$ offen mit $(x_2(t_1) =)x_1(t_1) \in V$, so dass $f$ Lipschitz-stetig bezüglich $x$ auf $J \times V$ ist.
Es existiert also $L$ mit

$$\big\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big\|_X \leq L\|y_1 - y_2\|_X, t \in J, y_1, y_2 \in V.$$

Es folgt mit der Integralversion der Differentialgleichung für $t \in J \cap I$, dass

$$\begin{aligned} \big\|(x_1 - x_2)(t)\big\|_X &= \Big\|(x_1 - x_2)(t_1) + \int_{t_1}^{t} f\big(s, x_1(s)\big) - f\big(s, x_2(s)\big)ds\Big\|_X \\ &\leq \Big|\int_{t_1}^{t} \big\|f\big(s, x_1(s)\big) - f\big(s, x_2(s)\big)\big\|_X ds\Big| \\ &\leq L\Big|\int_{t_1}^{t} \big\|(x_1 - x_2)(s)\big\|_X ds\Big|. \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma, anwendet auf

$$h(t) = \big\|(x_1 - x_2)(t)\big\|_X,$$

liefert nun (mit $B = 0$ und $A = L$), dass

$$\big|(x_1 - x_2)(t)\big\|_X = 0,\ t \in J \cap I,$$

also

$$x_1(t) = x_2(t),\ t \in J \cap I,$$

und somit ist $J \cap I \subset I'$, $I'$ also offen in $I$. □

**Beispiel 14.4.6** Es sei die Differentialgleichung

$$x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$$

aus 14.3.2 i) vorgelegt. Hier ist $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t, x) = \sqrt{|x|}$ und diese Funktion ist nicht lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$. Wie wir in 14.3.2 i) gesehen haben, kann von einer Eindeutigkeit der Lösung nicht die Rede sein.

Die lokale Lipschitz-Stetigkeit bezüglich $x$ garantiert nicht nur die Eindeutigkeit, sondern sogar die lokale eindeutige Lösbarkeit:

**Satz 14.4.7** *(lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf)*
*Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X$ offen, $f : U \to X$ sei lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$ auf $U$. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein offenes Intervall $I$ mit $t_0 \in I$, auf dem das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

*genau eine Lösung besitzt. Genauer gilt: Wählt man $\varepsilon > 0, \gamma > 0$, mit*

$$\begin{aligned} W := W_{\varepsilon,\gamma}(t_0, x_0) &:= [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times B_\gamma(x_0) \\ &= \big\{(t, x) : |t - t_0| \le \varepsilon, \|x - x_0\|_X \le \gamma\big\} \subset U, \end{aligned}$$

*so dass*

*i) Es existiert $L > 0$ mit*

$$\big\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big\|_X \le L\|y_1 - y_2\|_X, \ (t, y_1), (t, y_2) \in W.$$

*ii) Es existiert $C > 0$ mit*

$$\|f\|_W := \sup_{(t,y)\in W} \big\|f(t, y)\big\|_X < C,$$

*und ist $0 < \delta < \min\big\{\varepsilon, \frac{1}{L}, \frac{\gamma}{C}\big\}$, so besitzt das obige Anfangswertproblem genau eine Lösung $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to X$. Diese Lösung verläuft in $B_\gamma(x_0) = \big\{x \in X : \|x - x_0\|_X \le \gamma\big\}$, d. h. es gilt $\|x(t) - x_0\|_X \le \gamma$ für alle $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

**Beweis.** Nach der Integralversion der Differentialgleichung genügt es, die Existenz einer (eindeutig bestimmten) stetigen Funktion $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to X$ zu zeigen, so dass

$\alpha$) $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds, |t - t_0| < \delta,$

$\beta$) $\|x(t) - x_0\|_X \le \gamma$, $|t - t_0| < \delta$, gilt. Hierzu wollen wir auf geschickte Weise den Banachschen Fixpunktsatz 4.2.25 anwenden. Nach 6.2.6 ist

$$CB\big((t_0-\delta,t_0+\delta),X\big)=\{\varphi:(t_0-\delta,t_0+\delta)\to X:\varphi \text{ stetig und beschränkt}\},$$
versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$,

welche durch

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{|t-t_0|<\delta}\|\varphi(t)\|_X$$

definiert ist, ein vollständiger normierter Raum. Die Teilmenge

$$M:=\Big\{\varphi\in CB\big((t_0-\delta,t_0+\delta),X\big):\|\varphi(t)-x_0\|_X\le\gamma \text{ für alle } |t-t_0|<\delta\Big\}$$

ist abgeschlossen, also ist $(M,d_M)$ nach 4.1.23 iii), versehen mit der induzierten Metrik $d_M : M\times M\to[0,\infty), d_M(\varphi,\psi):=\|\varphi-\psi\|_\infty$, ein vollständiger metrischer Raum.
Wir setzen nun

$$F:M\to M,\ F(\varphi)(t):=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,\varphi(s)\big)ds,\ t\in(t_0-\delta,t_0+\delta).$$

$F$ ist tatsächlich wohldefiniert:
Zunächst sieht man leicht, dass $F(\varphi)$ stetig ist. Weiter gilt

$$\big\|F(\varphi)(t)-x_0\big\|_X=\Big\|\int_{t_0}^{t} f\big(s,\varphi(s)\big)ds\Big\|_X$$

$$\le\Big|\int_{t_0}^{t}\big\|f(s,\varphi(s)\big\|_X ds\Big|<\delta C\le\gamma$$

für alle $|t-t_0|<\delta$. Also ist $F(\varphi)$ beschränkt und schließlich $F(\varphi)\in M$.

Wir weisen nun nach, dass $F : M \to M$ eine Kontraktion ist.
Dazu seien $\varphi, \psi \in M$ beliebig. Es gilt dann

$$d_M\big(F(\varphi), F(\psi)\big) = \sup_{|t-t_0|<\delta} \big\|F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)\big\|_X$$

$$= \sup_{|t-t_0|<\delta} \Big\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, \varphi(s)\big) - f\big(s, \psi(s)\big) ds \Big\|_X$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|<\delta} \Big| \int_{t_0}^{t} \big\|f\big(s, \varphi(s)\big) - f\big(s, \psi(s)\big)\big\|_X ds \Big|$$

$$\leq \sup_{|t-t_0|<\delta} \Big| \int_{t_0}^{t} L\big\|\varphi(s) - \psi(s)\big\|_X ds \Big\|$$

$$\leq \delta L \cdot \sup_{|s-t_0|<\delta} \big\|\varphi(s) - \psi(s)\big\|_X$$

$$= \delta L \cdot d_M(\varphi, \psi).$$

Wegen $\delta L < 1$ können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und erhalten genau ein $x \in M$ mit

$$F(x) = x, \text{ d.h. } x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to X$$

ist stetig und erfüllt $\alpha$) und $\beta$). $\square$

**Beispiel 14.4.8** Es sei $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und das Anfangswertproblem

$$x'(t) = tx(t)^2, \; x(0) = x_0,$$

vorgelegt, siehe 14.3.2 ii). Hier ist also

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(t, x) = tx^2.$$

Offensichtlich ist $f$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$.
Für $x_0 > 0$ erhielten wir als Lösungen

$$x : \Big( -\sqrt{\frac{2}{x_0}}, \sqrt{\frac{2}{x_0}} \Big) \to \mathbb{R},$$

$$x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2}.$$

Diese Lösungen sind an $-\sqrt{\frac{2}{x_0}}$ und an $\sqrt{\frac{2}{x_0}}$ unbeschränkt und können daher über diese Intervallgrenzen hinaus nicht zu Lösungen fortgesetzt werden. Dies zeigt, dass man unter der bloßen Voraussetzung lokaler Lipschitz-Stetigkeit in $x$ nur die Existenz lokaler Lösungen erwarten kann. Der obige Satz liefert uns (was wir vorher nicht wussten) die Eindeutigkeit der Lösungen.

Wir wollen nun zeigen, dass jedes Anfangswertproblem (mit $f$ lokal Lipschitz-stetig in $x$) eine (eindeutig bestimmte) maximale Lösung besitzt, d.h. eine Lösung besitzt, die sich nicht weiter fortsetzen lässt.

**Definition 14.4.9** Es sei $f : U \to X$ stetig und das Anfangswertproblem $x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(t_0) = x_0$, mit $(t_0, x_0) \in U$ vorgelegt. Eine Lösung $(x, I)$ (d.h. $x : I \to X$) dieses Anfangswertproblems heißt maximal, wenn für jede andere Lösung $(\tilde{x}, \tilde{I})$ dieses Anfangswertproblems schon gilt, dass $\tilde{I} \subset I$ und $\tilde{x} = x|_{\tilde{I}}$) (also $(\tilde{x}, \tilde{I}) \subset (x, I)$).

**Satz 14.4.10** *(Globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf) Ist $U \subset \mathbb{R} \times X$ offen, $(t_0, x_0) \in U$, $f : U \to X$ lokal Lipschitz-stetig in $x$, so besitzt das Anfangswertproblem $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$, $x(t_0) = x_0$, eine (und zwar genau eine) maximale Lösung.*

**Beweis.** Es sei M $:= \{(\tilde{x}, \tilde{I}) : (\tilde{x}, I)$ ist Lösung des Anfangswertproblems $\}$. Wir setzen

$$I := \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{I}) \in M} .$$

Ist $t \in I$, so sei $x(t) := \tilde{x}(t)$ für ein $(\tilde{x}, \tilde{I})$ mit $t \in \tilde{I}$. $x : I \to X$ ist wohldefiniert, da für $(\tilde{x}_1, \tilde{I}_1), (\tilde{x}_2, \tilde{I}_2) \in M$ aufgrund des Eindeutigkeitssatzes (beachte $t_0 \in \tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$)) gilt, dass $\tilde{x}_1\big|_{\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2} = \tilde{x}_2\big|_{\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2}$.
Somit ist $(x, I)$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems. $(x, I)$ ist wieder aufgrund des Eindeutigkeitssatzes eindeutig. $\square$

**Bemerkung 14.4.11** Wir können nun von *der* maximalen Lösung eines Anfangswertproblems sprechen, falls $f$ Lipschitz-stetig bezüglich $x$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen jede maximale Lösung die „beschränkten“ Mengen von $U$ verlässt.

**Definition 14.4.12** Es sei $U$ eine offene Teilmenge eines (vollständigen) normierten Raumes $E$ und $f : U \to X$ eine Abbildung in eine (vollständigen) normierten Raum $X$.

i) $V \subset U$ heißt beschränkt in $U$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\operatorname{dist}(V, \partial U) \geq \varepsilon$ (falls $\partial U \neq \emptyset$) und $V$ in $E$ beschränkt ist.

ii) $f$ heißt auf den beschränkten Mengen von $U$ beschränkt, falls für jedes $V \subset U$ beschränkt die Bildmenge $f(V)$ in $X$ beschränkt ist.

**Bemerkung 14.4.13** Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen. Dann ist eine Teilmenge von $U$ genau dann beschränkt in $U$, wenn sie relativ kompakt in $U$ ist.
Also ist jedes bezüglich $x$ lokal Lipschitz-stetige $f : U \to \mathbb{K}^n$ schon auf den beschränkten Mengen von $U$ beschränkt und Lipschitz-stetig.

**Satz 14.4.14** *Es sei $U$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times X, (t_0, x_0) \in U$ und es sei $f : U \to X$ auf den beschränkten Mengen von $U$ beschränkt und Lipschitz-stetig bezüglich $x$. Es sei weiter $x : (\alpha, \beta) \to X$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(t_0) = x_0$, und $V$ beschränkt in $U$.*
*Dann gibt es ein kompaktes Teilintervall $[\alpha', \beta']$ von $(\alpha, \beta)$, sodass $(t, x(t)) \notin V$ für alle $t \in (\alpha, \beta) \setminus [\alpha', \beta']$.*
*Mit anderen Worten: Die maximale Lösung verlässt die beschränkten Mengen von $U$.*

**Beweis.** Es sei $V \subset U$ beschränkt. Wir betrachten nur den rechten Randpunkt $\beta$, der linke Randpunkt $\alpha$ wird analog behandelt.
Ohne Einschränkung sei $\beta < +\infty$. Ist nämlich $\beta = +\infty$, so ist die Aussage trivial, da insbesondere $V$ in $\mathbb{R} \times X$ beschränkt ist.
Wir nehmen an, dass eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(t_0, \beta)$ existiert, welche gegen $\beta$ konvergiert, sodass $(t_n, x(t_n)) \in V,\ n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\varepsilon, \gamma > 0$, sodass auch noch

$$W := \bigcup_{(s,y) \in V} W_{(\varepsilon,\gamma)}(s, y)$$

in $U$ beschränkt ist. Aufgrund der Voraussetzung erhalten wir nach der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf ein $\delta > 0$, sodass für jedes $(s, y) \in V$ eine eindeutige Lösung $x_{s,y} : (s - \delta, s + \delta) \to X$ des Anfangswertproblems $x'(t) = f(t, x(t)),\ x(s) = y$, existiert (Wir beachten, dass $\delta$ unabhängig von $(s, y) \in V$ ist!).
Es sei nun $n$ so groß, dass $t_n + \delta > \beta$. Wir setzen $\tilde{x} : (\alpha, t_n + \delta) \to X$,

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & : t \leq t_n \\ x_{t_n, x(t_n)}(t) & : t \geq t_n \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich eine Lösung unserer Differentialgleichung, da aufgrund des Eindeutigkeitssatzes $x(t) = x_{s,x(t_n)}(t), t \in (\max\{\alpha, t_n - \delta\}, \beta)$, gilt. Sowohl $x$ wie auch $\tilde{x}$ lösen nämlich auf $(\max\{\alpha, t_n - \delta\}, \beta)$ das Anfangwertproblem $z'(t) = f(t, z(t)),\ z(t_n) = x(t_n)$. Wegen $\tilde{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$ löst $\tilde{x}$ auch das ursprüngliche Anfangswertproblem. Da $(\alpha, \beta)$ echt in $(\alpha, t_n + \delta)$ enthalten ist, ergibt sich ein Widerspruch zur Maximalität von $x$. □

Aus 14.4.14 und 14.4.13 erhalten wir sofort im Falle $X = \mathbb{K}^n$:

**Korollar 14.4.15** *Es sei $U$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n, (t_0, x_0) \in U$ und es sei $f : U \to \mathbb{K}^n$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$. Es sei weiter $x : (\alpha, \beta) \to X$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(t_0) = x_0$, und $K \subset U$ kompakt.*
*Dann gibt es ein kompaktes Teilintervall $[\alpha', \beta']$ von $(\alpha, \beta)$, sodass $(t, x(t)) \notin K$ für alle $t \in (\alpha, \beta) \setminus [\alpha', \beta']$.*
*Mit anderen Worten: Die maximale Lösung verlässt die kompakten Teilmengen von $U$.*

**Beispiel 14.4.16** Es sei wieder das Anfangswertproblem

$$x'(t) = tx(t)^2,\ x(0) = x_0 > 0$$

vorgelegt. Hier ist also $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t, y) = ty^2$. $f$ ist lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$ und beschränkt auf den beschränkten Mengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die maximale Lösung ist

$$x : \Big( -\sqrt{\frac{2}{x_0}}, \sqrt{\frac{2}{x_0}} \Big) \to \mathbb{R}, \qquad x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} - t^2}.$$

Obiger Satz liefert, dass $x$ unbeschränkt an $-\sqrt{\frac{2}{x_0}}$ und unbeschränkt an $\sqrt{\frac{2}{x_0}}$, was ja auch tatsächlich der Fall ist.

Wir wollen nun die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf auf sogenannte linear beschränkte Differentialgleichungen anwenden.

**Definition 14.4.17** Eine Abbildung $f : I \times X^n \to X$ heißt linear beschränkt, falls es stetige Funktionen $g, h : I \to [0, \infty)$ gibt mit

$$\big\|f(t,y)\big\|_X \le g(t)\|y\|_{X^n} + h(t), \qquad t \in I.$$

**Bemerkung 14.4.18** Ist $f$ linear beschränkt, so ist $f$ beschränkt auf den beschränkten Mengen von $I \times X^n$.
Es sei dazu $V \subset I \times X^n$ beschränkt. Dann gibt es ein kompaktes Intervall $J \subset I$ und ein $C \ge 0$ mit $V \subset J \times CB_{X^n}$. Es folgt

$$\sup_{(t,y)\in V} \big\|f(t,y)\big\|_X \le \sup_{t\in J} \big|g(t)\big| \sup_{\|y\|_{X^n}\le C} \|y\|_{X^n} + \sup_{t\in J} \big|h(t)\big| < +\infty.$$

**Satz 14.4.19** *(globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Es sei $I$ ein offenes Intervall, $f : I \times X \to X$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$ sowie linear beschränkt, $t_0 \in I$ und $x_0 \in X$. Dann ist die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$, $x(t_0) = x_0$, auf ganz $I$ erklärt, insbesondere hat das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte globale Lösung $x : I \to X$.*

**Beweis.** Es sei $\big(x, (\alpha, \beta)\big)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Wir nehmen an, $\beta$ sei nicht der rechte Randpunkt von $I$. Ist $t_1 \in (\alpha, \beta)$ beliebig, so folgt aus

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,ds,$$

dass

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_X &\leq \|x(t_1)\|_X + \Big|\int_{t_1}^{t} \|f(s,x(s))\|_X ds\Big| \\ &\leq \|x(t_1)\|_X + \Big|\int_{t_1}^{t} g(s)\|x(s)\|_X + h(s)ds\Big| \\ &\leq \sup_{s\in[t_1,\beta]} g(s)\Big|\int_{t_1}^{t} \|x(s)\|_X ds\Big| \\ &\quad + \Big(\|x(t_1)\|_X + (\beta - t_1)\sup_{s\in[t_1,\beta]} h(s)\Big)\end{aligned}$$

für alle $t \in [t_1, \beta)$. Ist

$$A := \sup_{s\in[t_1,\beta]} g(s), \qquad B := \|x(t_1)\|_X + (\beta - t_1)\sup_{s\in[t_1,\beta]} h(s),$$

so folgt nach dem Gronwall-Lemma, dass

$$\|x(t)\|_X \leq Be^{A|t-t_1|}.$$

Insbesondere ist $x$ auf $[t_1, \beta)$ beschränkt.
Es existiert somit ein $W \subset X$ beschränkt mit $x(t) \in W, t \in [t_1, \beta)$. Dann ist $V := [t_1, \beta] \times W \subset I \times X$ beschränkt, und es gilt $\big(t, x(t)\big) \in V$ für alle $t \in [t_1, \beta)$. Nach dem Satz 14.4.14 existiert aber ein $\tilde{t} \in [t_1, \beta)$ mit $\big(\tilde{t}, x(\tilde{t})\big) \notin V$, Widerspruch.
Der Fall, dass $\alpha$ nicht linke Intervallgrenze von $I$ ist, wird analog auf einen Widerspruch geführt. □

Mit Hilfe von Satz 14.2.4 können wir unsere Ergebnisse sofort auf gewöhnliche Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung anwenden.

Es sei hierzu $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ offen und $f : U \to X$ stetig. Weiter sei $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in U$. In 14.2.4 haben wir gezeigt, dass $x : I \to X$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big),\ x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}t_0) = x_{n-1},$$

ist, genau dann, wenn $\tilde{x} : I \to X^n, \tilde{x}(t) := (x^{(\nu)}(t))_{0\leq\nu\leq n-1}$ das Anfangwertproblem $\tilde{x}'(t) = F\big(t, \tilde{x}(t)\big),\ \tilde{x}(t_0) = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ löst. Hierbei ist

$F : U \to X^n$,

$$F(t, y_1, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass $F$ genau dann Lipschitz-stetig bezüglich $x$ (beschränkt auf beschränkte Mengen, linear beschränkt), wenn dies für $f$ gilt. Somit erhalten wir beispielsweise sofort die folgenden Sätze.

**Satz 14.4.20** *Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ offen und $f : U \to X$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$. Sind $x_1, x_2 : I \to X$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$$

*und gilt $x_1^{(\nu)}(t_0) = x_2^{(\nu)}(t_0)$, $0 \le \nu \le n-1$, für ein $t_0 \in I$, so ist $x_1 \equiv x_2$.*

**Satz 14.4.21** *Es sei $U \subset \mathbb{R} \times X^n$ offen, $f : U \to X$ sei lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in U$ ein offenes Intervall $I$ mit $t_0 \in I$, auf dem das Anfangswertproblem $x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big)$, $x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu, 0 \le \nu \le n-1$, genau eine Lösung besitzt.*

**Satz 14.4.22** *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times X^n \to X$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$ und linear beschränkt, sowie $t_0 \in I$, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) = f\big(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\big) \\ &x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu, \ 0 \le \nu \le n-1, \end{aligned}$$

*genau eine Lösung $x : I \to X$.*

## 14.5 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten hier sogenannte lineare Differentialgleichungen: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A_\nu : I \to \mathscr{L}(X), 0 \le \nu \le n-1$, und $b : I \to X$ stetige Abbildungen. Gesucht sind Lösungen $x : I \to X$ der Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(t) x^{(\nu)}(t) + b(t)$$

und insbesondere Lösungen der entsprechenden Anfangswertprobleme mit $x^{(\nu)}(t_0) = x_0$, $0 \le \nu \le n-1$.

**Satz 14.5.1** *(Existenz und Eindeutigkeitssatz) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A_0, \ldots, A_{n-1} : I \to \mathscr{L}(X), b : I \to X$, stetig, $t_0 \in I$, $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(t)\big(x^{(\nu)}(t)\big) + b(t), \quad x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu,\ 0 \le \nu \le n-1$$

*genau eine Lösung $x : I \to X$.*

**Beweis.** Es sei $f : I \times X^n \to X,\ f(t, y_1, \ldots, y_n) := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(t)(y_{\nu+1}) + b(t)$.
$f$ ist lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$, da $f$ stetig und

$$\begin{aligned} &\big\|f(t, y_1, \ldots, y_n) - f(t, z_1, \ldots, z_n)\big\|_X \\ = &\ \Big\|\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(t)(y_{\nu+1} - z_{\nu+1})\Big\|_X \\ \le &\ n \sup_{0 \le \nu \le n-1} \big\|A_\nu(t)\big\|_{\mathscr{L}(X)} \cdot \|y - z\|_{X^n}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\big\|f(t, y_1, \ldots, y_n)\big\|_X \le \Big(\sum_{\nu=0}^{n-1} \big\|A_\nu(t)\big\|_{\mathscr{L}(X)}\Big)\|y\|_{X^n} + \big\|b(t)\big\|_X$$

ist $f$ auch linear beschränkt. Die Behauptung folgt mit 14.4.22. □

Wir müssen uns nun um wichtige Spezialfälle kümmern.

Betrachten wir zunächst den Fall $X = \mathbb{K}$. Wir erhalten dann

**Satz 14.5.2** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$, die Funktionen $b, a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ seien stetig und es seien $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) x^{(\nu)}(t) + b(t),\ x^{(\nu)}(t_0) = x_\nu,\ 0 \le \nu \le n-1,$$

*genau eine auf ganz $I$ definierte Lösung.*

**Bemerkung 14.5.3** Im Falle $b \equiv 0$ und $a_\nu$ konstant haben wir obiges Anfangswertproblem schon in 14.3.14 gelöst und auch eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung angegeben.
Auch hier erhalten wir, dass im Falle $b \equiv 0$ die Lösungsmenge der Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(t) x^{(\nu)}(t)$$

ein $n$-dimensionialer Untervektorraum von $C^n(I, \mathbb{K})$ ist.

Kommen wir nun zum Spezialfall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung im Fall $X = \mathbb{K}^n$, wir betrachten also das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \end{aligned}$$

wobei $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \in \mathbb{K}$. Ist $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{1 \le i,j \le n}$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, so lautet also das Anfangswertproblem: Gesucht sind (stetig) differenzierbare Funktionen $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

sowie mit $x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \ldots, x_n(t_0) = x_n^{(0)}$.

**Satz 14.5.4** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} \in \mathbb{K}$. Sind $a_{ij} : I \to \mathbb{K}, 1 \le i,j \le n, b_i : I \to \mathbb{K}, 1 \le i \le n$, stetige Funktionen, so hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j(t) + b_n(t) \end{aligned}$$

$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, x_2(t_0) = x_2^{(0)}, \ldots, x_n(t_0) = x_n^{(0)}$ *genau eine Lösung* $(x_1, \ldots, x_n) : I \to \mathbb{K}^n$.

**Beweis.** Es sei $X = \mathbb{K}^n, A : I \to \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ definiert durch

$$A(t)(y_1, \ldots, y_n) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & ,\ldots, & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & ,\ldots, & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

und

$$b : I \to \mathbb{K}^n,\ b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 14.5.1 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)\big(x(t)\big) + b(t) \\ x(t_0) &= (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \end{aligned}$$

genau eine auf ganz $I$ definierte Lösung $x : I \to \mathbb{K}^n$. $\square$

**Folgerung 14.5.5** Es sei $I$ ein offenes Intervall, $a_{ij} : I \to \mathbb{K}$ stetig.

i) Dann bildet die Menge aller Lösungen $(x_1, \ldots, x_n) : I \to \mathbb{K}^n$ des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t) x_j(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) x_j(t) \end{aligned}$$

einen $n$-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathscr{L}$.

ii) $n$ Lösungen $\varphi^\nu = (\varphi_1^\nu, \ldots, \varphi_n^\nu) : I \to \mathbb{K}^n, 1 \le \nu \le n$ bilden genau dann eine Basis von $\mathscr{L}$, wenn die Vektoren

$$\varphi^\nu(t) = \big(\varphi_1^\nu(t), \ldots, \varphi_n^\nu(t)\big)$$

für ein $t \in I$ (und dann für jedes $t \in I$) eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden.

**Beweis.**

i) Jede Linearkombination $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varphi^\nu$ von Lösungen ist wieder eine Lösung, also ist $\mathscr{L}$ ein Vektorraum.
Es sei $t_0 \in I$ beliebig. Der „Anfangswerthomomorphismus“

$$J_{t_0} : \mathscr{L} \to \mathbb{K}^n$$

$J_{t_0}(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big)$ ist linear. Aufgrund der Existenz der Lösung des Anfangswertproblems ist $J_{t_0}$ surjektiv, und aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems ist $J_{t_0}$ injektiv. Somit ist $J_{t_0}$ bijektiv und linear, also ein Isomorphismus.

ii) Da $J_{t_0}$ für jedes $t_0$ ein Isomorphismus ist, führt er Basen in Basen über.

$\square$

**Beispiel 14.5.6** Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(t) := A, b(t) := 0$. Es entsteht also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= A \cdot x(t), \quad \text{ausgeschrieben} \\ x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= \qquad\qquad\; x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\; x_3(t). \end{aligned}$$

Wir geben nun 3 Lösungen an (später werden wir sie sogar konstruieren).
Es sei

$$f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 2te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h(t) = \begin{pmatrix} (3t + 2t^2)e^t \\ 2te^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wir überprüfen, dass es sich hier tatsächlich um Lösungen handelt. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= (3 + 4t)e^t + (3t + 2t^2)e^t \\ h_2'(t) &= 2e^t + 2te^t \\ h_3'(t) &= e^t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&h_1(t) + 2h_2(t) + 3h_3(t) = (3t + 2t^2)e^t + 4te^t + 3e^t \\
&h_2(t) + 2h_3(t) = 2te^t + 2e^t \\
&h_3(t) = e^t.
\end{aligned}$$

Stimmt also, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist also eine Lösung.

Wir zeigen nun, dass $f, g, h$ linear unabhängig sind. Dafür müssen wir nur einen Punkt $t_0$ einsetzen (z.B. $t_0 = 0$) und überprüfen, ob $f(0), g(0), h(0)$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind.
Wegen $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist dies aber trivialerweise der Fall.
Wir erhalten, dass $f, g, h$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathscr{L}$ unserer Differentialgleichung bilden.
Für jede beliebige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ existieren also eindeutig bestimmte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha f_1(t) + \beta g_1(t) + \gamma h_1(t) \\ \alpha f_2(t) + \beta g_2(t) + \gamma h_2(t) \\ \alpha f_3(t) + \beta g_3(t) + \gamma h_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha e^t & + & \beta 2te^t & + & \gamma(3t + 2t^2)e^t \\ \alpha \cdot 0 & + & \beta e^t & + & \gamma 2te^t \\ \alpha \cdot 0 & + & \beta \cdot 0 & + & \gamma e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun das entsprechende Anfangswertproblem mit $t_0 = 0$ sowie $x_1 = 1, x_2 = 3$ und $x_3 = -1$ lösen, es muss also gelten $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten als Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) + \gamma h(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

und somit als Lösung unseres Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} e^t + 6te^t - (3t+2t^2)e^t \\ 3e^t - 2te^t \\ -e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+3t-2t^2)e^t \\ (3-2t)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 14.6 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir haben in den vorigen Kapiteln einige extrem starke Existenz- und Eindeutigkeitssätze bewiesen, waren aber nur in Spezialfällen in der Lage, diese Lösungen zu bestimmen. Im Falle linearer Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird sich das ändern. Wir benötigen zunächst einige Vorbereitungen.

Es sei $X$ ein vollständiger normierter Raum, $T \in \mathscr{L}(X,X) = \{S : X \to X : S \text{ stetig und linear}\}$.
Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} T^\nu$. Hierbei ist $T^0 := \mathrm{id}, T^\nu := \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\nu-mal}$.
Wegen $\|T^\nu\|_{\mathscr{L}(X,X)} \leq \|T\|^\nu_{\mathscr{L}(X,X)}$ konvergiert die Reihe absolut, und wir können setzen $\exp(T) := e^T := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} T^\nu \in \mathscr{L}(X,X)$.
Kommutieren $S$ und $T$ (d. h. $T \circ S = S \circ T$), so gilt

$$e^{S+T} = e^S \circ e^T,$$

Weiter ist $e^T$ immer invertierbar, und es gilt

$$(e^T)^{-1} = e^{-T},$$

siehe Übungen.
Für $t_0 \in \mathbb{K}, T \in \mathscr{L}(X,X)$ betrachten wir die Abbildung $\Phi : \mathbb{K} \to \mathscr{L}(X,X), t \mapsto \exp\big((t-t_0)T\big)$.
Da alle Funktionen

$$\Phi_n : \mathbb{K} \to \mathscr{L}(X,X),$$

$$\Phi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!} T^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \big((t-t_0)T\big)^\nu$$

stetig differenzierbar sind und

$$\begin{aligned}
&\sup_{|t|\le R} \big\|\Phi_n(t) - \Phi(t)\big\|_{\mathscr{L}(X,X)} \\
&\quad = \sup_{|t|\le R} \Big\| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!}\, T^\nu \Big\|_{\mathscr{L}(X,X)} \\
&\quad \le \sup_{|t|\le R} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|t-t_0|^\nu \|T\|^\nu}{\nu!} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\sup_{|t|\le R} \big\|\Phi_n'(t) - T \circ \Phi(t)\big\|_{\mathscr{L}(X,X)} \\
&\quad = \sup_{|t|\le R} \Big\| \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!}\, T^{\nu+1} \Big\|_{\mathscr{L}(X,X)} \\
&\quad \le \sup_{|t|\le R} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|t-t_0|^\nu \|T\|^{\nu+1}}{\nu!} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

für beliebiges $R \ge 0$ gilt, liefert Satz 9.5.2, dass auch $\Phi$ auf $\mathbb{K}$ stetig differenzierbar ist und $\Phi'(t) = T \circ \exp\big((t-t_0)T\big)$.

Im Falle einer so genannten homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten können wir zeigen

**Satz 14.6.1** *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I, x_0 \in X$ und $A \in \mathscr{L}(X,X)$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = A\big(x(t)\big),\ x(t_0) = x_0,$$

*die eindeutig bestimmte Lösung $x : I \to X$*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}(x_0).$$

*Insbesondere existiert also eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.*

**Beweis.** Es gilt $e^{(t_0-t_0)A}(x_0) = \mathrm{id}(x_0) = x_0$, also $x(t_0) = x_0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \lim_{s\to t} \frac{1}{s-t}\left(e^{(s-t_0)A}(x_0) - e^{(t-t_0)A}(x_0)\right) \\
&= \left(\lim_{s\to t} \frac{1}{s-t}\left(e^{(s-t_0)A} - e^{(t-t_0)A}\right)\right)(x_0) \\
&= \left(A \circ e^{(t-t_0)A}\right)(x_0) \\
&= A\big(e^{(t-t_0)A}(x_0)\big) = A\big(x(t)\big).
\end{aligned}$$

14.5.1 liefert, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist. □

**Bemerkung 14.6.2** i) Die Abbildung $L : C^1(\mathbb{R}, X) \to C(\mathbb{R}, X), \varphi \mapsto \varphi' - A \circ \varphi$, ist linear und ihr Kern ist gerade der Lösungsraum $\mathscr{L}$ der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(x(t))$. Insbesondere ist $\mathscr{L}$ ein Vektorraum. Nach obigem Satz ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ der lineare Anfangswerthomomorphismus $J_{t_0} : \mathscr{L} \to X,\ \varphi \mapsto \varphi(t_0)$, bijektiv, also ein Isomorphismus zwischen diesen Vektorräumen.
ii) Wir haben nun zwar eine konkrete Darstellung unserer Lösung, z. B. im Falle $X = \mathbb{K}^n$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = x'(t) = A \cdot x(t) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{pmatrix}$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wir müssen alle Potenzen $A^\nu = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\nu-\text{mal}}$ berechnen und dann die Matrix

$$e^{(t-t_0)A} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!} A^\nu$$

bilden. Dies ist nur im Trivialfall, dass $A$ eine Diagonalmatrix ist, einfach. Wir gehen einen etwas anderen Weg. Von nun an sei $X = \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, $t_0 \in \mathbb{R},\ x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = A \cdot x(t), \qquad x(t_0) = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Es sei $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ irgendeine Basis des Lösungsraumes $\mathscr{L}$ von $x'(t) = A \cdot x(t)$. Wir bilden die matrixwertige Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n \times n}, \quad \Phi(t) = \big(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\big)$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche Abbildung heißt Fundamentalmatrix von $x'(t) = A \cdot x(t)$.

**Satz 14.6.3** *Ist $\Phi$ eine Fundamentalmatrix zu $x'(t) = A \cdot x(t)$, so gibt es zu jeder Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems $x'(t) = A \cdot x(t), x(t_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ genau ein $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $x(t) = \Phi(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Dieses $c$ entsteht durch Lösen der Gleichung*

$$\Phi(t_0) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

*oder durch*

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_2 \end{pmatrix} := \Phi^{-1}(t_0) \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Die lineare Abbildung $c \mapsto \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi^\nu$ ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{K}^n$ und dem Lösungsraum $\mathscr{L}$ unserer Differentialgleichung und es gilt $\Phi(t) \cdot c = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi^\nu(t)$. $\square$

**Bemerkung 14.6.4** i) Ist $v_1, \ldots, v_n$ irgendeine Basis von $\mathbb{K}^n, t_0 \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ eine Basis von $\mathscr{L}$, falls man

$$\varphi^\nu(t) = e^{(t-t_0)A} v_\nu,$$

setzt, somit ist

$$t \mapsto \Phi(t) := \big(e^{(t-t_0)A} v_1, \ldots, e^{(t-t_0)A} v_n\big)$$

eine Fundamentalmatrix, insbesondere ist

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A} = \left(e^{(t-t_0)A}e_1, \dots, e^{(t-t_0)A}e_n\right)$$

eine Fundamentalmatrix.
Für $t_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man dazu wieder den Lösungshomomorphismus $J_{t_0} : \mathscr{L} \to \mathbb{K}^n, x \mapsto x(t_0)$. Dieser ist linear, und ist $L_{t_0} : \mathbb{K}^n \to \mathscr{L}, (y_1, \dots, y_n) \mapsto x$ mit $x(t) = e^{(t-t_0)A}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, so gilt $J_{t_0} \circ L_{t_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}, L_{t_0} \circ J_{t_0} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}}$, also ist $L_{t_0}$ ein Isomorphismus und Isomorphismen führen Basen in Basen über.

ii) Um Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = x'(t) = A \cdot x(t) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \dots, x_n(t_0) = x_n^{(0)}$$

zu erhalten, kann man folgendermaßen verfahren:
Zunächst bestimmt man eine Fundamentalmatrix $\Phi$, und setzt dann

$$x(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) \cdot x^{(0)}.$$

Genauso gut kann man natürlich eine Basis $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ des Lösungsraumes $\mathscr{L}$ betrachten, $x(t) := \sum_{\nu=1}^n \rho_\nu \varphi^\nu(t)$ setzen und dann die Koeffizienten aus $\sum_{\nu=1}^n \rho_\nu \varphi^\nu(t_0) = x^{(0)}$ berechnen.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn $A\,n$ linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, d.h. wenn $A$ über $\mathbb{C}^n$ diagonalisierbar ist.

**Satz 14.6.5** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $A$ linear unabängige Eigenvektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt.*
*Dann bilden die Funktionen*

$$\varphi^\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n,\ \varphi^\nu(t) = e^{\lambda_\nu t}v^{(\nu)},$$

$1 \le \nu \le n$, *ein Basis des Lösungsraumes $\mathscr{L}$ und somit ist*

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}v_1^{(1)} & e^{\lambda_2 t}v_1^{(2)} & & e^{\lambda_n t}v_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{\lambda_1 t}v_n^{(1)} & e^{\lambda_2 t}v_n^{(2)} & & e^{\lambda_n t}v_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

*eine Fundamentalmatrix zu $x'(t) = A \cdot x(t)$.*

**Beweis.** Es gilt $(\varphi^\nu)'(t) = \lambda_\nu e^{\lambda_\nu t} v^{(\nu)} = A \cdot (e^{\lambda_\nu t} v^{(\nu)}) = A\varphi^\nu(t)$, also sind die $\varphi^\nu$ Lösungen der Differentialgleichung. Wegen $\varphi^\nu(0) = v^{(\nu)}$ sind sie mit 14.5.5 linear unabhängig.. □

Ist $A$ nicht von obiger Form, so wird die Sache komplizierter, und wir müssen die verallgemeinerten Eigenvektoren, die so genannten Hauptvektoren, verwenden. Dazu sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix und

$$P(z) = \det(A - z \text{ id}) = \mu_0 \prod_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{\alpha_\nu}$$

ihr charakteristisches Polynom.
Hierbei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A$, wobei $\alpha_\nu \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit von $\lambda_\nu$ heißt.
Die geometrische Vielfachheit ist $\dim E_{\lambda_\nu}$, wobei

$$E_{\lambda_\nu} = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda_\nu x\} = \ker(A - \lambda_\nu \text{id})$$

der Eigenraum bezüglich $\lambda_\nu$ ist.

$$H_{\lambda_\nu} := \ker(A - \lambda_\nu \text{id})^{\alpha_\nu} = \{x \in \mathbb{C} : (A - \lambda_\nu \text{id})^{\alpha_\nu} x = 0\}$$

heißt der zu $\lambda_\nu$ zugehörige Hauptraum, seine von 0 verschiedenen Elemente heißen Hauptvektoren zum Eigenwert $\lambda_\nu$.
Aus der linearen Algebra ist der folgende Satz von der Hauptraumzerlegung bekannt.

**Satz 14.6.6** *Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann gilt*

*i)* $A(H_{\lambda_\nu}) \subset H_{\lambda_\nu},\ 1 \le \nu \le k$,

*ii)* $\mathbb{C}^n = H_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}$,

*iii)* $\dim H_{\lambda_\nu} = \alpha_\nu,\ 1 \le \nu \le k$.

*Insbesondere hat $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Hauptvektoren von $A$.*

Wir können nun folgende Anleitung zur Konstruktion einer Basis von $\mathscr{L}$, dem Lösungsraum von $x'(t) = A \cdot x(t)$ (und damit eine Fundamentalmatrix

zu $x'(t) = A \cdot x(t)$), angeben.
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben.
Man bestimme die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

1. Es sei nun $\lambda$ ein Eigenwert mit Vielfachheit $\alpha$. Man berechne $H_\lambda = \ker A - \lambda \mathrm{id})^\alpha = \{x \in \mathbb{C}^n : A - \lambda \mathrm{id})^\alpha x = 0\}$ und bestimme eine Basis $w^{(1)}, \ldots, w^{(\alpha)}$ von $H_\lambda$.
   Dann setze man für $1 \le \nu \le \alpha$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{w^{(\nu)}}(t) &:= e^{tA} w^{(\nu)} = e^{t\lambda E_n} e^{t(A - \lambda E_n)} w^{(\nu)} \\
&= e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda E_n)^k \cdot w^{(\nu)} \\
&= e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\alpha - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda E_n)^k \cdot w^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

2. Nach 1. bestimnme man zu jedem Eigenwert $\lambda_\nu, 1 \le \nu \le k, \alpha_\nu$ Lösungen.

Auf diese Weise erhält man $n$ Lösungen, und diese bilden eine Basis von $\mathscr{L}$ (wegen $H_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k} = \mathbb{C}^n$).

**Beispiel 14.6.7** i) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir wollen das Anfangswertproblem $x'(t) = A \cdot x(t)$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ lösen.
Offensichtlich ist 1 ein dreifacher Eigenwert von $A$, andere Eigenwerte gibt es nicht, somit gibt es nur einen Hauptraum, nämlich $H_1 = \mathbb{C}^3$.
Wir wählen eine Basis dieses Hauptraumes, z. B. $e_1, e_2, e_3$. Wir be-

rechnen

$$\begin{aligned}
&e^t \sum_{\nu=0}^{2} \frac{1}{\nu!}\, t^\nu (A - E_3)^\nu \\
&= e^t \big( E_3 + t(A - E_3) + \frac{t^2}{2}\,(A - E_3)^2 \big) \\
&= e^t \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (3t + 2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und wir erhalten als Basis des Lösungsraumes $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ mit

$$\varphi^k(t) = e^t \sum_{\nu=0}^{2} \frac{t^\nu}{\nu!}\,(A - E_3)^\nu \cdot e_k,$$

also

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^2(t) = \begin{pmatrix} 2te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\varphi^3(t) = \begin{pmatrix} (3t + 2t^2)e^t \\ 2te^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Um die Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ unseres Anfangswertproblemes zu bestimmen, müssen wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{3} \rho_\nu \varphi^\nu(0) \quad = \quad \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2 + \rho_3 e_3$$

lösen und erhalten $\rho_1 = 1, \rho_2 = 3$ und $\rho_3 = -1$. Setzen wir dies ein so gilt

$$x(t) = 1\varphi^1(t) + 3\varphi^2(t) - 1\varphi^3(t)$$

$$= \begin{pmatrix} (1+3t-2t^2)e^t \\ (3-2t)e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

ii) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 34 & 18 \\ -14 & -19 & -10 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen wieder eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad x(0) = (1, 0, 0).$$

Das charakteristische Polynom $P$ von $A$ ist

$$P(z) = -z^3 + 5z^2 - 7z + 3 = -(z-1)^2(z-3),$$

somit ist 1 ein Eigenwert mit Vielfachheit 2 und 3 ein einfacher Eigenwert.
Man berechnet als Basis von $\ker(A - 1E_3)^2$ z. B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und als Basis von $\ker(A - 3E_3)$ z. B.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist eine Basis des Lösungsraumes $\mathscr{L}$ unserer Differentialgleichung durch $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi^1(t) &= e^t\big(E_3 + t(A - E_3)\big)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1+24t & 34t & 18t \\ -14t & 1-20t & -10t \\ -4t & -6t & 1-2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= e^t \begin{pmatrix} 2+30t \\ -18t \\ -1-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+30t)e^t \\ -18te^t \\ (-1-6t)e^t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^2(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1+24t & 34t & 18t \\ -14t & 1-20t & -10t \\ -4t & -6t & 1-2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} 50t \\ 2-30t \\ -1-10t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50te^t \\ (2-30t)e^t \\ (-1-10t)e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\varphi^3(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7e^{3t} \\ 4e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir müssen, um unser Anfangswertproblem zu lösen, noch die Koeffizienten $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ mit

$$x(t) = \rho_1\varphi^1(t) + \rho_2\varphi^2(t) + \rho_3\varphi^3(t)$$

bestimmen. Wegen $x(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ muss also gelten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_1\varphi^1(0) + \rho_2\varphi^2(0) + \rho_3\varphi^3(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}.$$

Lösen dieses Systems liefert $\rho_1 = -3, \rho_2 = 2, \rho_3 = -1$, und wir erhalten als Lösung

$$x(t) = \begin{pmatrix} (-6+10t)e^t + 7e^{3t} \\ (4-6t)e^t - 4e^{3t} \\ (1-2t)e^t - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir noch ein Verfahren zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angeben.

**Satz 14.6.8** *(Variation der Konstanten) Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der Gleichung $x'(t) = A \cdot x(t)$. Dann ist $x_p(t) := \Phi(t) \cdot c(t)$ mit $c(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) ds$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung*

$$x'(t) = A \cdot x(t) + b(t).$$

*Für diese gilt $x_p(t_0) = 0$.*

**Beweis.**

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) \\ &= \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= A\Phi(t)c(t) + b(t) \\ &= Ax_p(t) + b(t). \end{aligned}$$

$\square$

Wie gewinnt man nun eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = A \cdot x(t) + b(t),\ x(t_0) = x^{(0)}\,?$$

Dazu berechne man zunächst wie oben die Lösung $x_p$ der Gleichung $x'(t) = A \cdot x(t) + b(t)$ und löse dann das Anfangswertproblem

$$\varphi'(t) = A \cdot \varphi(t), \quad \varphi(t_0) = x^{(0)}.$$

Dann setze man

$$x(t) := x_p(t) + \varphi(t).$$

# Kapitel 15

# Integration im $\mathbb{R}^n$ und auf Mannigfaltigkeiten

## 15.1 Maßtheorie

Wir stellen hier die benötigten Definitionen und Resultate aus der Maßtheorie zusammen, die in der parallelen Vorlesung bereitgestellt werden.

**Definition 15.1.1** Es sei $\Omega$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ (also ein Mengensystem auf $\Omega$) heißt $\sigma$-Algebra, falls

i) $\phi \in \mathscr{S}$,

ii) Ist $A \in \mathscr{S}$ dann ist auch $\Omega \backslash A \in \mathscr{S}$,

iii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathscr{S}$ dann ist auch die Vereinigung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S}$.

Die Elemente $A \in \mathscr{S}$ heißen messbare Mengen und $(\Omega, \mathscr{S})$ heißt Messraum.

**Bemerkung 15.1.2** Aus der Definition folgt leicht für einen Meßraum $(\Omega, \mathscr{S})$:

i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathscr{S}$, dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S}$,

ii) Sind $A, B \in \mathscr{S}$, dann ist auch $B\backslash A = B \cap (\Omega \setminus A) \in \mathscr{S}$.

iii) Ist $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren auf einer Menge $\Omega$, so ist auch

$$\bigcap_{\iota\in I} \mathscr{S}_\iota := \{A \subset \Omega : A \in \mathscr{S}_\iota \text{ für alle } \iota \in I\}$$

wieder eine $\sigma$-Algebra. Also kann man für $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ die von $\mathscr{T}$ erzeugte $\sigma$-Algebra

$$\sigma(\mathscr{T}) := \bigcap_{\mathscr{S}\supset\mathscr{T},\mathscr{S}\ \sigma-\text{Algebra}} \mathscr{S}$$

bilden. Sie ist die kleinste $\sigma$-Algebra, welche $\mathscr{T}$ enthält. Wir sagen, dass $\mathscr{T}$ die $\sigma$-Algebra $\mathscr{S}$ erzeugt, oder dass $\mathscr{T}$ ein Erzeuger von $\mathscr{S}$ ist, falls $\mathscr{S} = \sigma(\mathscr{T})$ gilt.

**Beispiel 15.1.3** i) Es sei $\Omega$ eine Menge. Dann sind $\{\phi, \Omega\}$ und $\mathscr{P}(\Omega)$ $\sigma$-Algebren auf $\Omega$.

ii) Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum (oder $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, für Experten), so sei

$$\mathscr{T} := \{A \subset X : A \,\text{ist offen}\}$$

das System der offenen Mengen und $\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathscr{T})$ die kleinste $\sigma$-Algebra, welche alle offenen Mengen enthält. Sie heißt die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $X$, ihre Elemente heißen Borelmengen oder borelmessbare Mengen. Insbesondere sind wegen Eigenschaft ii) alle abgeschlossenen Teilmengen von $X$ auch Borelmengen.
Wenn nichts anderes gesagt wird, statten wir ab jetzt jede Borelmenge $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ mit der $\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)$ aus. Es gilt $\mathscr{B}(\Omega) = \{A \cap \Omega : A \in \mathscr{B}(\mathbb{K}^n)\}$. Per Definition wird $\mathscr{B}(\Omega)$ durch das System der offenen Mengen erzeugt, ebenso aber im Falle $\Omega$ offen durch das System

$$\mathscr{H} := \{\prod_{\nu=1}^{n} I_\nu \subset \Omega : I_\nu \subset \mathbb{R} \text{ ein kompaktes Intervall}\}.$$

Man kann zeigen (mit Hilfe des so genannten Auswahlaxioms), dass $\mathscr{B}(\mathbb{K}^n) \neq \mathscr{P}(\mathbb{K}^n)$ gilt.

Wir wollen messbaren Mengen eine verallgemeinerte Länge zuordnen.

**Definition 15.1.4** Es sei $(\Omega, \mathscr{S})$ ein Maßraum. Eine (Mengen-)Funktion $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ heißt Maß auf $\Omega$ (genauer auf $(\Omega, \mathscr{S})$), falls gilt

i) $\mu(\phi) = 0$,

ii) $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$, falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}^{\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt.

$(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ heißt Maßraum.
Eine Teilmenge $A \in \mathscr{S}$ heißt Nullmenge (genauer $\mu$-Nullmenge), falls $\mu(A) = 0$.

**Bemerkung 15.1.5** i) Aus der zweiten Bedingung folgt leicht, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

ii) Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}^{\mathbb{N}}$ mit

$\alpha$) $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}.$$

$\beta$) $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, und $\mu(A_1) < +\infty$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

iii) Stimmen zwei Maße auf einem Erzeuger überein, welcher durchschnittsstabil ist und eine den Maßraum überdeckende Folge enthält, auf welcher eines der Maße endlich ist, so sind sie gleich.

**Beispiel 15.1.6** Es gibt genau ein Maß $\lambda^n$ auf $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$ mit

$$\lambda^n\Big(\prod_{\nu=1}^{n} I_\nu\Big) = \prod_{\nu=1}^{n} l(I_\nu)$$

für alle beschränkten Intervalle $I_\nu \subset \mathbb{R}$. Hierbei ist $l(I)$ die Länge des Intervalles $I$. Man setzt $\lambda := \lambda^1$. Ist $A \subset \mathbb{R}$ messbar, so heißt $\lambda(A)$ die verallgemeinerte Länge von $A$, ist $A \subset \mathbb{R}^2$ messbar, so heßt $\lambda^2(A)$ die Fläche von $A$ und ist $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n \geq 3$, so heißt $\lambda^n(A)$ das $(n-)$dimensionale Volumen von $A$.
$\lambda^n$ ist eindeutig bestimmt durch die beiden Eigenschaften

i) $\lambda^n(M + x) = \lambda(M)$, $M \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$ (hierbei ist $M + x = \{y + x : y \in M\}$) und

ii) $\lambda^n\big([0,1]^n\big) = 1$.

Weiter gilt (dies werden wir später noch zeigen) $\lambda^n\big(A(M)\big) = |\det A|\lambda^n(M),\ M \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear.
$\lambda^n$ heißt das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.
Wegen

$$\lambda^n\big(\{a\}\big) = \lambda^n\Big(\prod_{\nu=1}^{n}[a_\nu, a_\nu]\Big) = \prod_{\nu=1}^{n} 0,\ a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

haben alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ das Lebesguemaß 0. Insbesondere ist $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Es gibt aber auch überabzählbare Nullmengen in $\mathbb{R}$, z. B. hat die Cantormenge auch das Lebesguemaß 0.

Ein Grund für die Betrachtung von kleineren $\sigma$-Algebren (wie $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$) anstelle der Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ ist, dass es kein Maß $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ gibt mit

$$\mu\Big(\prod_{\nu=1}^{n} I_\nu\Big) = \prod_{\nu=1}^{n} l(I_\nu) \text{ für alle } I_\nu \subset \mathbb{R} \text{ beschränkte Intervalle.}$$

**Definition 15.1.7** Es sei $(\Omega, d)$ ein metrischer Raum (oder allgemeiner $(\Omega, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum). Ein Maß $\mu : \mathscr{B}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt reguläres Borelmaß auf $\Omega$, falls

i) $\mu(A) = \inf\{\mu(\mathscr{O}) : \mathscr{O} \supset A \text{ offen}\}$ für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$.

ii) $\mu(K) < +\infty$ für alle $K \subset \Omega$ kompakt und
$\mu(\mathscr{O}) = \sup\{\mu(K) : K \subset \mathscr{O} \text{ kompakt}\}$ für alle $\mathscr{O} \subset \Omega$ offen.

**Beispiel 15.1.8** $\lambda^n$ ist ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$.

**Definition 15.1.9** Es seien $(\Omega_1, \mathscr{S}_1), (\Omega_2, \mathscr{S}_2)$ Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt messbar, falls $f^{-1}(M_2) = \{x_1 \in \Omega_1 : f(x_1) \in M_2\} \in \mathscr{S}_1$ für alle $M_2 \in \mathscr{S}_2$. Mit anderen Worten: „Urbilder messbarer Mengen sind messbar.“
Wir setzen

$$\mathscr{M}(\Omega_1, \Omega_2) := \{f : \Omega_1 \to \Omega_2 : f \text{ ist messbar}\} \qquad \text{und}$$
$$\mathscr{M}(\Omega_1) := \mathscr{M}(\Omega_1, \mathbb{K}).$$

**Bemerkung 15.1.10** Es seien $(\Omega_1, \mathscr{S}_1), (\Omega_2, \mathscr{S}_2)$ Messräume.

i) Ist $\mathscr{S}_2 = \sigma(\mathscr{T}_2)$, so ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ messbar genau dann, wenn

$$f^{-1}(M_2) \in \mathscr{S}_1 \quad \text{für alle } M_2 \in \mathscr{T}_2.$$

Insbesondere sind stetige Abbildungen messbar bezüglich den Borelschen $\sigma$-Algebren, also ist $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ist $f$ borelmessbar.

ii) $\alpha$) $\mathscr{M}(\Omega_1, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $fg$ ist messbar für $f, g$ messbar, $\mathscr{M}(\Omega_1, \mathbb{K})$ ist also sogar eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra.

$\beta$) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Abbildungen $f_n : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, so sind $g$ und $h$, definiert durch

$$h(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & : & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < +\infty \\ 0 & : & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = +\infty, \end{array} \right)$$

$$g(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & : & \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > -\infty \\ 0 & : & \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = -\infty, \end{array} \right)$$

wieder messbar. Insbesondere sind das Maximum und das Minimum zweier reellwertiger messbarer Abbildungen wieder messbar. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{M}(\Omega_1, \mathbb{K})$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \Omega_1$ existiert, so ist auch $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ wieder messbar. $\mathbb{K}$ kann man hier durch einen beliebigen metrischen Raum ersetzen.

iii) Als Grundregel können Sie aufgrund der guten Stabilitätseigenschaften der Messbarkeit davon ausgehen, dass alle Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, welche Sie " konkret hinschreiben " können, messbar sind.

**Definition 15.1.11** Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum.
Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (positive) messbare Treppenfunktion, falls $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (\geq 0)$ in $\mathbb{R}$ existieren, so dass

$$f = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_{A_\nu}.$$

Hierbei ist

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in A \\ 0 & : \ x \in \Omega \backslash A. \end{cases}$$

**Bemerkung 15.1.12** Ist $f \in \mathscr{M}(\Omega), f \geq 0$, so existiert eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d. h. $f_{n+1} \geq f_n, n \in \mathbb{N}$) positiver messbarer Treppenfunktionen mit

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in \Omega.$$

In der Tat, man setzt zum Beispiel

$$f_n := \sum_{\nu=0}^{2^{2n}} \frac{\nu}{2^n} \chi_{\left\{x\in\Omega: f(x)\in\left[\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right)\right\}}.$$

Dies entspricht einer Zerlegung des Bildbereiches.

**Satz/Definition 15.1.13** Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum.

i) Ist $f = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_{A_\nu}$ eine positive messbare Treppenfunktion, so ist

$$\int f d\mu := \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \mu(A_\nu) \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$$

wohldefiniert.

ii) Ist $f \geq 0$ und messbar sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge positiver messbarer Treppenfunktionen mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, so ist

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = [0, \infty) \cup \{+\infty\}$$

wohldefiniert und heißt das Integral von $f$.

iii) Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so sei

$$f_+ := \max\{f, 0\}, \quad f_- := \max\{-f, 0\}.$$

Gilt $\int f_+ d\mu < +\infty, \int f_- d\mu < +\infty$, so heißt $f$ $\mu$-integrierbar ($f \in \mathscr{B}_1(\mu)$), und man setzt

$$\int f(x) d\mu(x) := \int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu.$$

iv) Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mu$-integrierbar, so auch $|f| = f_+ + f_-$.

v) Für $0 \leq g \leq f$ messbar gilt $\int g d\mu \leq \int f d\mu$.

vi) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt $\mu$-integrierbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ $\mu$-integrierbar. Man setzt dann

$$\int f(x)d\mu(x) := \int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu.$$

vii) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist $\mu$-integrierbar $\Leftrightarrow$ $f$ messbar und $|f|$ $\mu$-integrierbar.

viii) $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist $\mu$-integrierbar $\Leftrightarrow$ $g$ messbar, und es existiert $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mu$-integrierbar mit $|g| \leq f$.
Es gilt dann

$$\Big|\int g d\mu\Big| \leq \int f d\mu.$$

ix) Wir setzen $\mathscr{L}_1(\mu) := \mathscr{L}_1^{\mathbb{K}}(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f\ \mu - \text{integrierbar}\}$. Mit dieser Bezeichnung ist $\mathscr{L}_1^{\mathbb{K}}(\mu)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und die Abbildung

$$\mathscr{L}_1^{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K},\ f \mapsto \int f d\mu,$$

ist $\mathbb{K}$-linear.

**Bemerkung 15.1.14** Es seien $(\Omega_1, \mathscr{S}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume und es sei $\mathscr{S}_2 = \sigma(\mathscr{H}_2)$, wobei $\mathscr{H}_2$ durchschnittsstabil sei und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalte mit $\mu_2(A_n) < +\infty,\ n \in \mathbb{N}$, sowie $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega_2$. Sind $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $h : \Omega_1 \to [0, +\infty)$ messbar und gilt

$$\int (\chi_A \circ \Phi) h\, d\mu_1 = \int \chi_A\, d\mu_2$$

für alle $A \in \mathscr{H}_2$, so gilt, dass $f$ genau dann $\mu_2$-integrierbar ist, wenn $(f \circ \Phi)h$ $\mu_1$-integrierbar ist. Ist dies der Fall, so gilt

$$\int (f \circ \Phi) h\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2$$

für alle $f \in \mathscr{L}(\mu_2)$.
Sei dazu das Maß $\tilde{\mu}$ auf $\Omega_2$ definiert durch $\tilde{\mu}(A) := \int (\chi_A \circ \Phi) h\, d\mu_1$. Dann stimmen $\tilde{\mu}$ und $\mu_2$ auf $\mathscr{H}_2$ überein, also sind sie gleich.Verfolgen wir nun die Definition des Integrals, so ergibt sich die Aussage sukzessiv für positive messbare Treppenfunktionen, positive messbare Funktionen und dann für integrierbare Funktionen.

**Satz/Definition 15.1.15** Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum, $A \subset \Omega$ messbar, $\mathscr{S}|_A := \{A \cap M : M \in \mathscr{S}\}$ und

$$\mu|_A : \mathscr{S}|_A \to [0, +\infty) \cup +\infty, \ \mu|_A(S) := \mu(S).$$

Ein messbares $f : A \to \mathbb{K}$ heißt $\mu$-integrierbar auf $A$ (im Zeichen $f \in \mathscr{L}_1(A, \mu)$), falls $f \in \mathscr{L}(\mu|_A)$ Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{K}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in A \\ 0 & : \ x \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

$\mu$-integrierbar ist. Dann heißt

$$\int\limits_A f d\mu := \int \tilde{f} d\mu = \int f d\mu|_A$$

das Integral von $f$ über $A$.

**Bemerkung 15.1.16** i) Ist $A$ eine messbare Teilmenge eines metrischen Raumes $(\Omega, d)$, $f : A \to \mathbb{K}$ stetig und $\mu$ ein Borelmaß auf $\Omega$, so ist

$$\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{K}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in A \\ 0 & : \ x \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

messbar, und es gilt im Falle $\tilde{f} \in \mathscr{L}_1(\mu)$, dass

$$\int\limits_A f d\mu = \int \tilde{f} d\mu.$$

ii) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar, $f : A \to \mathbb{K}$ beschränkt und stetig (oder bloß messbar), so ist $f$ auf $A$ Lebesgue-integrierbar (d. h. $\lambda^n-$integrierbar).

Wir wollen nun den Zusammenhang zu unseren früheren Integralbegriffen herstellen.

**Satz 15.1.17** *i) Ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ regelintegrierbar, so ist $f$ auch Lebesgue-integrierbar (d. h. $\lambda$-integrierbar), und es gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda.$$

*ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{K}$ regelintegrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von $I$, so ist $f$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich integrierbar (im Sinne von 11.1.1) ist. Auch in diesem Falle stimmen beide Integrale überein.*

**Bemerkung 15.1.18** Auch im $\mathbb{R}^n$ kann man Regelfunktionen und ein Regelintegral völlig analog zum eindimensionalen Fall definieren. Die Menge dieser Regelfunktionen (im Falle $\mathbb{R}^2$) enthält allerdings noch nicht einmal die charakteristische Funktion eines beliebigen Dreiecks. Daher ist sie für unsere Zwecke zu eng und wir betrachten besser das Lebegueintegral.

Wir kommen nun zu den so genannten Konvergenzsätzen, mit denen man tatsächlich eine Menge Integrale ausrechnen kann. Mit dem gleich folgenden Satz von Beppo-Levi zeigt man übrigens 15.1.17 ii).

**Satz 15.1.19** *(Lemma von Fatou) Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{R})$, so dass ein $h \in \mathscr{L}_1(\mu)$ existiert mit $|f_n| \le h, n \in \mathbb{N}$. Dann sind $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ (definiert durch $\big(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n\big)(x) := \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) und $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ (definiert durch $\big(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n\big)(x) := \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) wieder $\mu$-integrierbar, und es gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

**Korollar 15.1.20** *(Lebesguescher Grenzwertsatz) Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{K})$, so dass ein $h \in \mathscr{L}_1(\mu)$ existiert mit $|f_n| \le h$, $n \in \mathbb{N}$. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x$ außerhalb einer $\mu$-Nullmenge $N$ („$\lim$ existiert $\mu$-fast überall“) , dann sei $f : \Omega \to \mathbb{K}$,*

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & : \ \lim \textit{ existiert} \\ 0 \textit{ sonst.} & \end{cases}$$

*Dann ist $f$ $\mu$-integrierbar und es gilt*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**Satz 15.1.21** *(von Beppo-Levi)* *Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge in* $\mathscr{L}^1(\mu)$*, so dass* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < +\infty$*. Dann existiert eine* $\mu$*-Nullmenge* $N$*, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in \Omega\backslash N$ *existiert („*$\lim$ *existiert fast überall“). Ist*

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & : \ x \in \Omega\backslash N \\ 0 & : \ \textit{sonst}, \end{cases}$$

*so gilt*

$$\int f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**Beispiel 15.1.22** Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & : \ x \geq 1 \\ 0 & : \ x < 1. \end{cases}$$

Wir wollen $f$ auf Lebesgue-Integrierbarkeit untersuchen ohne uneigentliche Integrale zu verwenden.

1. Es sei $\alpha > 1$. Setze

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & : \ x \in [1, n] \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_n$ integrierbar, $f_n \leq f_{n+1}$ und weiter

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_1^n f_n(x) dx$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left( \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right) = \frac{1}{\alpha - 1} < +\infty.$$

Also ist mit Beppo-Levi $f$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int f d\lambda = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. Es sei $\alpha = 1$. Wäre $f$ Lebesgue-integrierbar, so gilt mit den $f_n$ wie oben, dass $|f_n| \leq f$, also würde der Satz von Lebesgue liefern, dass

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f_n(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \log n < +\infty.$$

   Widerspruch.

3. Es sei $\alpha < 1$. Wegen $\frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{x}$ für $x \geq 1$ kann $f$ nicht Lebesgue-integrierbar sein.

**Satz 15.1.23** *(Parameterabhängige Integrale)*
*Es sei $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ ein Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

*i)* $x \mapsto f(x,t)$ *ist $\mu$-integrierbar für alle $t \in I$.*

*ii)* $t \mapsto f(x,t)$ *ist differenzierbar für alle $x \in \Omega$.*

*iii)* $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x)$ *für alle $t \in I, x \in \Omega$, mit einem $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.*

*Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(x,t)d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)d\mu(x).$$

**Beweis.** Es sei $t \in I$ und $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Nullfolge mit $t + h_k \in I,\ k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit

$$f_k(x) := \frac{1}{h_k}(f(x,t+h_k) - f(x,t)),$$

dass

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für alle $x \in \Omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$f_k(x) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t + \theta h_k),$$

also $|f_k(x)| = |\frac{\partial}{\partial t} f(x, t + \theta h_k)| \leq g(x),\ x \in \Omega$. Wir können also den Lebesgueschen Grenzwertsatz anwenden und erhalten mit der Linearität des Integrals, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{1}{h_k}\Big(\int f(x, t + h_k)d\mu(x) - \int f(x,t)d\mu(x)\Big) \\
= &\lim_{k\to\infty} \int \frac{1}{h_k}(f(x, t + h_k) - f(x,t))d\mu(x) \\
= &\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Da die Nullfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung. □

**Beispiel 15.1.24** Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R},\ f(x,t) := e^{xt}$, und

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(t) := \int_{[0,1]} f(x,t)d\lambda(x).$$

Da die Voraussetzungen obigen Satzes erfüllt sind, gilt

$$F'(t) = \int_{[0,1]} xe^{xt}d\lambda(x) = \int_0^1 xe^{xt}dx = \begin{cases} \dfrac{e^t}{t} + \dfrac{1}{t^2}(1 - e^t) & : \ t \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & : \ t = 0. \end{cases}$$

Wir beachten, dass $F'$ sogar stetig ist, mehr noch, eine iterative Anwendung obigen Satzes ergibt, dass $F$ beliebig oft differenzierbar ist.

Wir wollen nun einen Satz angeben, der es tatsächlich ermöglicht, Integrale im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ auszurechnen!
Wir beschränken uns hier auf eine Version für Lebesguemaße. Dazu müssen wir Funktionen integrieren, welche eventuell den Wert $+\infty$ annehmen. Es sei also $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine solche Funktion, so dass eine Lebesguenullmenge $N$ existiert mit $f(x) \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^k \setminus N$. Dann setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^k} f d\lambda^k := \int_{\mathbb{R}^k\setminus N} f d\lambda^k.$$

**Satz 15.1.25** *(Fubini)*
*Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ messbar. Dann sind äquivalent*

*i)* $f \in \mathscr{L}^1(\lambda^{n+m})$.

*ii)* *Es existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x_1 \in \mathbb{R}^n \backslash N$ das Integral*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, d\lambda^m(x_2)$$

*existiert, die Funktion*

$$x_1 \mapsto \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, d\lambda^m(x_2) & ,\ x_1 \in \mathbb{R}^n \backslash N \\ 0 & ,\ sonst \end{cases}$$

*ist messbar und*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x_1, x_2)| d\lambda^m(x_2) \Big)\, d\lambda^n(x_1) < +\infty.$$

*iii)* *Es existiert eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so dass für alle $x_2 \in \mathbb{R}^m \backslash N$ das Integral*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, d\lambda^n(x_1)$$

*existiert, die Funktion*

$$x_2 \mapsto \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, d\lambda^n(x_1) & ,\ x_1 \in \mathbb{R}^m \backslash N \\ 0 & ,\ sonst \end{cases}$$

*ist messbar und*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x_1, x_2)| d\lambda^n(x_2) \Big)\, d\lambda^m(x_1) < +\infty.$$

*Ist eine der drei Bedingungen erfüllt, so gilt*

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, d\lambda^{n+m}(x_1, x_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, d\lambda^m(x_2) \Big)\, d\lambda^n(x_1) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, d\lambda^n(x_1) \Big)\, d\lambda^m(x_2). \end{aligned}$$

**Bemerkung 15.1.26** Sind $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar, so kann man im obigen Satz $\mathbb{R}^n$ durch $A_1$ und $\mathbb{R}^m$ durch $A_2$ ersetzen. Dies folgt mit dem Übergang zu

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in A_1 \times A_2 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

**Beispiel 15.1.27** Es sei $A = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq x_1^3, 0 \leq x_1 \leq 1\big\}$. Dann ist $A = [0,1]^2 \cap h^{-1}\big([0,\infty)\big)$ mit

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x_1, x_2) = |x_1|^3 - x_2.$$

Da $h$ stetig, ist $h^{-1}\big([0,\infty)\big)$ abgeschlossen, also messbar.
Wegen $[0,1]^2$ abgeschlossen ist $[0,1]^2$ messbar, und somit ist schließlich $A$ als Schnitt messbarer Mengen messbar.
Es sei $f : A \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.
Wir wollen das Integral

$$\int\limits_A f d\lambda^2$$

berechnen.
Dazu setzen wir

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2 : x \in A \\ 0 \qquad\quad : \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x_1 - x_2 : 0 \leq x_2 < x_1^3,\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \qquad\quad : \ \text{sonst}, \end{cases}$$

also $g(x_1, x_2) = \chi_{[0,1]}(x_1) \cdot \chi_{[0,x_1^3]}(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$.

Wir erhalten mit Fubini ($g \in \mathscr{L}^1(\lambda^2)$ ist leicht nachzuweisen)

$$\int\limits_A (x_1 - x_2)\ d\lambda^2(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) d\lambda^2(x)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) d\lambda(x_2) d\lambda(x_1)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x_1) \cdot \chi_{[0,x_1^3]}(x_2)(x_1 - x_2) d\lambda(x_2) d\lambda(x_1)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x_1) \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[0,x_1^3]}(x_2)(x_1 - x_2) d\lambda(x_2) d\lambda(x_1)$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x_1^3} (x_1 - x_2) dx_2 dx_1$$

$$= \int\limits_0^1 \left( x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{x_1^3} \right) dx_1 = \int\limits_0^1 x_1^4 - \frac{x_1^6}{2}\, dx_1 =$$

$$= \frac{x_1^5}{5} - \frac{x_1^7}{14} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{14} = \frac{9}{70}.$$

**Satz 15.1.28** *(Cavalierisches Prinzip)*
*Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum. Für $x_n \in \mathbb{R}$ sei*

$$K_{x_n} := \big\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \ldots, x_n) \in K \big\}.$$

*Dann gilt $\lambda^n(K) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(K_{x_n}) d\lambda(x_n)$.*

**Beweis.** Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\lambda^n(K) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)\, d\lambda^n(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_K(x_1,\ldots,x_n)\, d\lambda^{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\, d\lambda(x_n) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{K_{x_n}}(x_1,\ldots,x_{n-1})\, d\lambda^{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) d\lambda(x_n) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(K_{x_n})\, d\lambda(x_n).
\end{aligned}$$

□

## 15.2 Die Transformationsregel

Wir erinnern uns an die Transformationsregel für regelintegrierbare Funktionen, siehe 9.6.1.
Es sei $a \le b$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Somit erhalten wir im Falle $\varphi' \ge 0$, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varphi([a,b])} f\ d\lambda &= \int\limits_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f\ d\lambda = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \\
&= \int\limits_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int\limits_{[a,b]} (f\circ\varphi)\varphi'\ d\lambda,
\end{aligned}$$

und im Falle $\varphi' \leq 0$, dass

$$\begin{aligned}\int_{\varphi([a,b])} f\ d\lambda &= \int_{[\varphi(b),\varphi(a)]} f\ d\lambda = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx \\ &= \int_{b}^{a} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)(-\varphi')\ d\lambda,\end{aligned}$$

also, falls $\varphi' \neq 0$ auf $[a,b]$ gilt, dass

$$\int_{\varphi([a,b])} f d\lambda = \int_{[a,b]} (f\circ\varphi)|\varphi'|d\lambda.$$

Wir beachten hierbei, dass das Lebesgue-Integral (im Gegensatz zum Regelintegral) keine Orientierung beachtet, daher die Modifikation mit $|\varphi'|$ anstelle von $\varphi'$!

Wir wollen nun (mit Hilfe des Satzes von Fubini) eine Verallgemeinerung obiger Transformationsregel auf höhere Dimensionen beweisen. Wir werden voraussetzen, dass die transformierte Abbildung $\Phi$ etwas bessere Eigenschaften hat als $\varphi$.

**Definition 15.2.1** Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus (zwischen $U$ und $V$), falls auch $\Phi^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist.

**Bemerkung 15.2.2** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung, $V := \Phi(U)$. Nach dem Umkehrsatz ist $\Phi : U \to V$ genau ein Diffeomorphismus zwischen $U$ und $V$, wenn die Ableitung $d\Phi(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Insbesondere ist $V$ dann offen. Die Invertierbarkeit von $d\Phi(x)$ bedeutet gerade, dass $\det d\Phi(x) \neq 0$. Ist $J_\Phi(x)$ die Jacobimatrix von $\Phi$ an $x$, so ist dies äquivalent (wegen $\det df(x) = \det J_f(x)$, da ja $J_f(x)$ eine darstellende Matrix für $df(x)$ ist) dazu, dass $\det J_\Phi(x) \neq 0$.

**Satz 15.2.3** *(Transformationsformel)*
*Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist*

$f \in \mathscr{L}^1(V, \lambda^n)$ *genau dann, wenn* $(f \circ \Phi) \cdot |\det J_\Phi| \in \mathscr{L}^1(U, \lambda^n)$, *und es gilt*

$$\int\limits_{V=\Phi(U)} f(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_U f\big(\Phi(x)\big) \big|\det J_\Phi(x)\big| d\lambda^n(x).$$

**Beweis.** (per Induktion über $n$)
Wegen Bemerkungen 15.1.14, 15.1.3 ii) gilt die Aussage des Satzes für alle $f$, wenn wir nur zeigen, dass

$$\int\limits_V \chi_I(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_U \chi_I\big(\Phi(x)\big) \big|\det J_\Phi(x)\big| d\lambda^n(x)$$

für alle $I = \prod\limits_{\nu=1}^n I_\nu \subset V$ mit $I_\nu \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall.

n = 1. Es sei $I = [a, b] \subset V = \Phi(U)$. Dann gilt

$$\int \chi_I(x) d\lambda(x) = \int \big(\chi_I \circ \Phi(x)\big) \big|\Phi'(x)\big| d\lambda(x)$$

nach der Substitutionsregel in einer Veränderlichen mit $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$ und $\varphi := \Phi|_{[a,b]}$, siehe die Vorbemerkung.

Es sei nun die Aussage des Satzes für alle $k \leq n - 1$ erfüllt.

1. Ist die Aussage des Satzes wahr für $\Phi$ und $\Psi$, so ist sie wahr für $\Psi \circ \Phi$. In der Tat, dies folgt aus $\big|\det J_{\Psi \circ \Phi}(x)\big| = \big|\det J_\Psi\big(\Phi(x)\big)\big| \big|\det J_\Phi(x)\big|$.

2. Ist $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation, so ist die Aussage des Satzes wahr für

$$\Phi : U \to \Phi(U) = V,\ x \mapsto \big(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}\big).$$

Es gilt nämlich für $I = \prod\limits_{\nu=1}^n I_\nu \subset V, I_\nu$ kompaktes Intervall, dass

$$\begin{aligned} \int \chi_I d\lambda^n &= \prod_{\nu=1}^n l(I_\nu) = \prod_{\nu=1}^n l(I_{\pi^{-1}(\nu)}) \\ &= \int \chi_{\Phi^{-1}(I)} d\lambda^n \\ &= \int \chi_I \circ \Phi d\lambda^n \\ &= \int \chi_I\big(\Phi(x)\big) \big|\det J_\Phi(x)\big| d\lambda^n(x). \end{aligned}$$

Hierzu beachten wir, dass die Determinante einer Permutationsmatrix immer den Betrag 1 hat.

3. (Hier benutzen wir zum ersten mal die Induktionsvoraussetzung) Die Aussage des Satzes ist wahr für jedes $\Phi$, welches eine Variable, z.B. die $j$-te, unverändert lässt. Ist $j \neq 1$, so betrachten wir $\Psi(x) := (x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ und $\tilde{\Phi} := \Psi \circ \Phi \circ \Psi$. Mit 1. und 2. müssen wir die Behauptung nur für $\tilde{\Phi}$ zeigen, können also annehmen, dass $\Phi$ die 1-te Variable unverändert lässt.
   Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und
   $$x = (x', x''),\ x' \in \mathbb{R},\ x'' \in \mathbb{R}^{n-1},$$
   somit $\Phi(x', x'') = \big(x', \hat{\Phi}(x', x'')\big)$.
   Wir berechnen, dass
   $$\begin{aligned} \det J_\Phi(x', x'') &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \dfrac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x''}(x', x'') & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \det \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x''}(x', x''). \end{aligned}$$
   Setzen wir also $\Phi_{x'}(x'') := \hat{\Phi}(x', x'')$, so gilt
   $$\det J_\Phi(x', x'') = \det J_{\Phi_{x'}}(x'').$$
   Es sei $U_{x'} := \{x'' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', x'') \in U\}$ und
   $$V_{x'} = \Phi(x', U_{x'}) = \Phi_{x'}(U_{x'}) \ \ (\subset \mathbb{R}^{n-1}.$$
   $V_{x'}$ ist offen nach dem Satz über die Umkehrfunktion. Mit Fubini und der Induktionsvoraussetzung für $\Phi_{x'}$ erhalten wir
   $$\begin{aligned} & \int_U \big(\chi_I \circ \Phi(x)\big) |\det J_\Phi(x)| d\lambda^n(x) \\ = & \int_{\mathbb{R}} \int_{U_{x'}} \chi_I\big(x', \Phi_{x'}(x'')\big) |\det J_{\Phi_{x'}}(x'')| d\lambda^{n-1}(x'') d\lambda(x') \\ = & \int_{\mathbb{R}} \int_{V_{x'}} \chi_I(x', x'') d\lambda^{n-1}(x'') d\lambda(x') = \int_V \chi_I d\lambda^n. \end{aligned}$$

4. Ist $\Phi$ fest, so existiert zu jedem Punkt $x^{(0)} \in U$ eine Umgebung $U_\varepsilon(x^{(0)})$ (mit $\varepsilon > 0$), so dass die Aussage des Satzes für $U_\varepsilon(x^{(0)})$ anstelle von $U$ wahr ist.
   Es sei also $x^{(0)} \in U$. Da $J_\Phi(x^{(0)})$ regulär ist, existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}(x^{(0)}) \neq 0$.
   Verwenden wir wieder 1. und 2., so können wir ohne Einschränkung $j = 1$ annehmen.
   Wir setzen nun $\tilde{\Phi}(x) = (\Phi_1(x), x_2, \ldots, x_n)$. Wegen

$$J_{\tilde{\Phi}}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

   ist $J_{\tilde{\Phi}}(x^{(0)})$ regulär, und der Satz über die Umkehrfunktion liefert die Existenz eines $\varepsilon > 0$, so dass

$$\tilde{\Phi} : U_\varepsilon(x^{(0)}) \to \tilde{\Phi}\big(U_\varepsilon(x^{(0)})\big)$$

   ein Diffeomorphismus ist. Wegen $n \geq 2$ lässt diese Abbildung die zweite Variable unverändert, und wir können 3. anwenden, die Aussage des Satzes gilt also für $\tilde{\Phi}$.
   Ist nun $\tilde{U} := U_\varepsilon(x^{(0)}), \tilde{V} := \tilde{\Phi}\big(U_\varepsilon(x^{(0)})\big), \tilde{W} := \Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{V})$, so lässt $\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1} : \tilde{V} \to \tilde{W}$ nach Definition von $\tilde{\Phi}$ die erste Variable unverändert $(x_1 = \tilde{\Phi}_1(\tilde{\Phi}^{-1}(x)) = \Phi_1(\tilde{\Phi}^{-1}(x)))$, die Aussage des Satzes gilt also nach 3. auch für $\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}$. Mit 1. gilt dann die Aussage des Satzes für $\Phi = (\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}) \circ \tilde{\Phi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$.

5. Um schließlich den Satz endgültig zu beweisen, sei $I = \prod_{\nu=1}^{n} I_\nu \subset V$ mit $I_\nu \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall.
   Da $I$ kompakt ist, existieren wegen 4. endlich viele offene $U_\nu \subset U, 1 \leq \nu \leq k$, mit $I \subset \bigcup_{1 \leq \nu \leq k} \Phi(U_\nu)$, so dass die Aussage des Satzes für

$$\Phi : U_\nu \to V_\nu := \Phi(U_\nu),$$

   $1 \leq \nu \leq k$, gilt. Es sei $f_1 := \chi_I \cdot \chi_{V_1} = \chi_{I \cap V_1}, f_\nu := \chi_I \cdot \chi_{V_\nu \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{\nu-1})} =$

$\chi_{I\cap(V_\nu\setminus(V_1\cup\ldots\cup V_{\nu-1}))}, 2 \le \nu \le k$. Da der Satz für $\Phi : U_\nu \to V_\nu$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_V f_\nu d\lambda^n &= \int\limits_{V_\nu} f_\nu d\lambda^n = \int\limits_{U_\nu} (f_\nu \circ \Phi)|\det J_\Phi| d\lambda^n \\ &= \int\limits_U (f_\nu \circ \Phi)|\det J_\Phi| d\lambda^n.\end{aligned}$$

Wegen $\chi_I = \sum\limits_{\nu=1}^{k} f_\nu$ folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_V \chi_I d\lambda^n &= \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_V f_\nu d\lambda^n = \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_U (f_\nu \circ \Phi)|\det J_\Phi| d\lambda^n \\ &= \int\limits_U (\chi_I \circ \Phi)|\det J_\Phi| d\lambda^n.\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 15.2.4** Wir werden die Transformationsregel häufig in folgender Situation anwenden:
Es sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset U$ kompakt und $f : \Phi(K) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_{\Phi(K)} f(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_K f\big(\Phi(x)\big)\big|\det J_\Phi(x)\big| d\lambda^n(x).$$

Diese Version zeigt man einfach mit dem Übergang zu $\tilde{f} : V \to \mathbb{C}, \tilde{f}(x) = f(x), x \in \Phi(K), \tilde{f}(x) = 0, x \in V \setminus \Phi(K)$.

**Korollar 15.2.5** *Es sei $A$ eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \Phi(x) = A \cdot x + b$. Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $f \in \mathscr{L}^1(\Phi(M), \lambda^n) \Leftrightarrow f \circ \Phi \in \mathscr{L}^1(M, \lambda^n)$. In diesem Fall ist*

$$\int\limits_{\Phi(M)} f(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_M f(Ax + b)|\det A|\, d\lambda^n(x).$$

*Mit $A = rE_n$ gilt also insbesondere $\lambda^n(rM + b) = r^n \lambda^n(M)$ für alle $r \ge 0$.*

**Beweis.** Sei $U = V = \mathbb{R}^n, g(x) = \begin{cases} f(x) & : \ x \in \Phi(M) \\ 0 & : \ x \notin \Phi(M). \end{cases}$

Dann gilt mit der Transformationsformel und $J_\Phi(x) = A$, dass

$$\int\limits_{\Phi(M)} f(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) d\lambda^n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(Ax+b) |\det A| \, d\lambda^n$$

$$= \int\limits_M f(Ax+b) |\det A| \, d\lambda^n(x).$$

Für den letzten Schritt beachte $g(Ax+b) = \begin{cases} f(Ax+b) & : \ x \in M \\ 0 & : \ x \notin M. \end{cases}$ □

**Beispiel 15.2.6** (Volumen der $n$-dimensionalen Kugeln)
Wir wollen das Volumen $\lambda^n\big(B_r(x_0)\big)$ der Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\} = B_r(x_0)$ bestimmen.
Wir erhalten sofort wegen $B_r(x_0) = rB_1(0) + x_0$ aus der Transformationsregel, dass

$$\lambda^n\big(B_r(x_0)\big) = r^n \lambda^n\big(B_1(0)\big).$$

Wir müssen also bloß das Volumen derEinheitskugel $B^{(n)} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ bestimmen. Es sei also

$$\tau_n := \lambda^n(B^{(n)}).$$

Wir gehen iterativ vor.
Wegen $\lambda\big(\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}\big) = \lambda\big([-1,1]\big)$ ist $\tau_1 = 2$.
Wir verwenden das Cavalierische Prinzip, um die Berechnung von $\tau_n$ auf $\tau_{n-1}$ zurückzuführen.
Es gilt

$$\begin{aligned} B^{(n)}_{x_n} &= \big\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2\big\} \\ &= \begin{cases} \sqrt{1-x_n^2} B^{(n-1)} & : \ |x_n| \leq 1 \\ \emptyset & : \ |x_n| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Also folgt mit Cavalieri, dass

$$\tau_n = \int_{[-1,1]} \sqrt{1-x_n^2}^{\,n-1} \lambda^{n-1}(B^{(n-1)})\, d\lambda(x_n)$$

$$= \tau_{n-1} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}^{\,n-1}\, dt.$$

Nun ist $2c_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
In 11.3.2 hatten wir gezeigt, dass $c_0 = \frac{\pi}{2}, c_1 = 1$, und $c_n = \frac{n-1}{2}\, c_{n-2}, n \geq 2$.
Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \tau_n &= \tau_{n-1}\, 2c_n = \tau_{n-2}\, 2c_{n-1}\, 2c_n \\ &= 4\tau_{n-2}\, c_{n-1}\, c_n. \end{aligned}$$

Im Beweis zu 11.3.2 hatten wir

$$c_{2m} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k}, \qquad c_{2m+1} = \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k+1},$$

berechnet. Dies ergibt für $n = 2m+1$, dass

$$\begin{aligned} \tau_n &= 4\tau_{n-2}\, \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \\ &= 2\pi\tau_{n-2}\, \frac{1}{2m+1} = \frac{2\pi}{n}\, \tau_{n-2}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man für gerades $n$, dass auch $\tau_n = \frac{2\pi}{n}\, \tau_{n-2}$ gilt.
Rekursiv erhält man also

$$\tau_{2m} = \frac{1}{m!}\, \pi^m \qquad \text{und}$$

$$\tau_{2m+1} = \frac{2^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}\, \pi^m.$$

**Übung: Volumen eines Ellipsoiden.**

Wir wiederholen die Definition der Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) = \int_{(0,\infty)} e^{-t}\, t^{x-1}\, d\lambda(t).$$

Aus den Identitäten für die Gammafunktion ($\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ werden wir noch zeigen!)

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= k! \\ \Gamma\Big(k+\frac{3}{2}\Big) &= \Big(k+\frac{1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(k+\frac{1}{2}\Big) \\ &= \cdots = \Big(\prod_{m=0}^{k}\frac{2m+1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \sqrt{\pi}\,\prod_{m=0}^{k}\frac{2m+1}{2} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

für alle $n \geq 1$.

**Beispiel 15.2.7** (Volumen von Rotationskörpern) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$K = \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2} \leq f(x_n),\ a \leq x_n \leq b\Big\}.$$

Dann gilt $\lambda^n(K) = \tau_{n-1}\int\limits_a^b f(x_n)^{n-1}dt$, hierbei ist $\tau_{n-1}$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$.

$$K_{x_n} = \begin{cases} f(x_n)\,B^{(n-1)} & : \ a \leq x_n \leq b \\ \emptyset & : \ \text{sonst,} \end{cases}$$

also mit Cavalieri

$$\begin{aligned} \lambda^n(K) &= \int\limits_a^b \lambda^{n-1}\big(f(x_n)B^{(n-1)}\big)\,dx_n \\ &= \tau_{n-1}\int\limits_a^b f(x_n)^{n-1}\,dx_n. \end{aligned}$$

**Korollar 15.2.8** *(Ebene Polarkoordinaten)*
*Es sei* $\Phi : [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$*. Dann ist ein borelmessbares* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn* $F : [0,\infty) \times [0,2\pi] \to F(r,\varphi) = rf\big(\Phi(r,\varphi)\big)$ *Lebesgue-integrierbar ist.*
*In diesem Fall gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 &= \int\limits_{[0,2\pi]} \int\limits_{[0,\infty)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\lambda(r) d\lambda(\varphi) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} \int\limits_{[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\lambda(\varphi) r d\lambda(r).\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei $U = (0,\infty) \times (0,2\pi), V = \mathbb{R}^2 \backslash \big([0,\infty) \times \{0\}\big)$.
Dann ist $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus mit

$$\begin{aligned}|\det J_\Phi(r,\varphi)| &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\right| \\ &= |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^2 \backslash V$ und $\big([0,\infty) \times [0,2\pi]\big) \backslash U$ Lebesgue-Nullmengen sind, erhalten wir aus der Transformationsregel, dass

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) d\lambda^2(x) &= \int\limits_V f(x) d\lambda^2(x) = \int\limits_U f\big(\Phi(r,\varphi)\big)\, r d\lambda^2(r,\varphi) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} f\big(\Phi(r,\varphi)\big)\, r d\lambda^2(r,\varphi).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt die Behauptung. □

**Korollar 15.2.9** *(Rotationssymmetrische Funktionen)*
*Es sei* $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *messbar,* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, g(x) = f\big(|x|\big)$*. Dann ist* $g \in \mathscr{L}^1(\lambda^2) \Leftrightarrow r \mapsto rf(r)$ *in* $\mathscr{L}^1\big([0,\infty), \lambda\big)$*.*
*In diesem Fall gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f\big(|x|\big)\, d\lambda^2(x) = 2\pi \int\limits_{[0,\infty)} rf(r) d\lambda(r).$$

**Beispiel 15.2.10** $\int\limits_{\{0<|x|\leq R\}} \frac{1}{|x|^\alpha}\, d\lambda^2(x)$ existiert genau dann, wenn

$$2\pi \int\limits_{(0,R]} \frac{r}{r^\alpha}\, dr = 2\pi \int\limits_{(0,R]} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha - 1 < 1$, also $\alpha < 2$.
Insbesondere existiert also $\int\limits_{\{0<|x|\leq R\}} \frac{1}{|x|}\, d\lambda^2(x)$.

**Beispiel 15.2.11** (Beta-Funktion)
Wir betrachten noch einmal die Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) = \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t}\, t^{x-1}\, d\lambda(t).$$

Eine andere spezielle Funktion (die auch in der Stochastik eine Rolle spielt) ist die so genannte Beta-Funktion

$$B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad B(x,y) = \int\limits_{(0,1)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, d\lambda(t).$$

Wir wollen nun die Formel

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0,$$

zeigen.
Wir benötigen einige Vorbereitungen. Es sei

$$\varphi : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1), \qquad \varphi(z) = \sin^2 z.$$

Dann ist $\varphi$ ein Diffeomorphismus mit $|\varphi'(z)| = 2\sin z \cos z$ und es folgt mit der Transformationsregel

1.

$$2 \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} (\sin z)^{2x-1} (\cos z)^{2y-1} \, d\lambda(z)$$

$$= \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} (\sin z)^{2(x-1)} (\cos z)^{2(y-1)} \, (2 \sin z \cos z) \, d\lambda(z)$$

$$= \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} \varphi(z)^{x-1} \left(1 - \varphi(z)\right)^{y-1} |\varphi'(z)| \, d\lambda(z)$$

$$= \int\limits_{(0,1)} t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, d\lambda(t) = B(x,y).$$

2. Es sei $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varphi(r) = r^2$.
Dann gilt wieder mit der Transformationsregel für $s > 0$

$$\int\limits_{(0,\infty)} r^{2s-1} \, e^{-r^2} \, d\lambda(r) =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{(0,\infty)} r^{2(s-1)} \, e^{-r^2} \, 2\, r \, d\lambda(r)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{(0,\infty)} \varphi(r)^{s-1} \, e^{-\varphi(r)} \big|\varphi'(r)\big| \, d\lambda(r)$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{(0,\infty)} t^{s-1} \, e^{-t} \, d\lambda(t) = \frac{1}{2} \, \Gamma(s),$$

es folgt also

$$\int\limits_{(0,\infty)} B(x,y) \, r^{2x+2y-1} \, e^{-r^2} \, d\lambda(r) = \frac{1}{2} \, B(x,y) \, \Gamma(x+y)$$

für alle $x, y > 0$.

Wir erhalten nun aus 1. und 2. mit Polarkoordinaten und Fubini:

$$\frac{1}{2}\, B(x,y)\,\Gamma(x+y)$$

$$\underset{2.}{=} \int\limits_{(0,\infty)} B(x,y)\, r^{2x+2y-1}\, e^{-r^2}\, d\lambda(r)$$

$$\underset{1.}{=} \int\limits_{(0,\infty)} 2 \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} (\sin z)^{2x-1}\,(\cos z)^{2y-1}\, d\lambda(z)\, r^{2x+2y-1}\, e^{-r^2}\, d\lambda(r)$$

$$= 2 \int\limits_{(0,\infty)} \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} (r\sin z)^{2x-1}\,(r\cos z)^{2y-1}\, e^{-r^2}\, r\, d\lambda(z) d\lambda(r)$$

$$\underset{\text{Polarkoordinaten}}{=} 2 \int\limits_{(0,\infty)\times(0,\infty)} t_1^{2x-1}\, t_2^{2y-1}\, e^{-(t_1^2+t_2^2)}\, d\lambda^2\,(t_1,t_2)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} 2 \int\limits_{(0,\infty)} t_1^{2x-1}\, e^{-t_1^2}\, d\lambda(t_1) \cdot \int\limits_{(0,\infty)} t_2^{2y-1}\, e^{-t_2^2}\, d\lambda(t_2)$$

$$\underset{2.}{=} \frac{1}{2}\,\Gamma(x)\,\Gamma(y).$$

Wir erhalten aus

$$B(x,y) = 2 \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} (\sin z)^{2x-1}\,(\cos z)^{2y-1}\, d\lambda(z),$$

dass

$$B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = 2 \int\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} 1\, d\lambda = \pi$$

und somit

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \pi,$$

also

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi},$$

was wir vorher schon verwendet haben. Mit 2. (setze $s = \frac{1}{2}$) ergibt dies übrigens auch

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t) = \sqrt{\pi}.$$

**Korollar 15.2.12** *(Räumliche Polarkoordinaten)*
*Es sei* $\Phi : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

*Dann ist ein borelmessbares* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ *genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn* $F : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi], F(r,\vartheta,\varphi) = r^2 \sin\vartheta f\big(\Phi(r,\vartheta,\varphi)\big)$ *Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda^3 = \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\pi]} \int_{[0,\infty)} f(r\sin\varphi\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta\, d\lambda(r)\, d\lambda(\vartheta)\, d\lambda(\varphi).$$

**Beweis.** Analog wie bei den ebenen Polarkoordinaten unter Beachtung

$$J_\Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\big|\det J_\Phi(r,\vartheta,\varphi)\big| = r^2\sin\vartheta.$$

$\square$

**Korollar 15.2.13** *(Rotationssymmetrische Funktionen)*
*Es sei* $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *borelmessbar,* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, $g(x) = f\big(|x|\big)$. *Dann ist* $g \in \mathscr{L}^1(\lambda^3) \Leftrightarrow r \mapsto r^2 f(r)$ *in* $\mathscr{L}^1\big([0,\infty),\lambda\big)$.
*In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\big(|x|\big)\, d\lambda^3(x) = 4\pi \int_{[0,\infty)} f(r)\, r^2\, d\lambda(r).$$

**Beweis.** $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} d\lambda(\varphi) = 2\pi, \qquad \int_{[0,\pi]} \sin\vartheta\, d\vartheta = -\cos t\Big|_0^\pi = 2.$ $\square$

## 15.3 Kurven

Wir haben in 12.2.5 stückweise stetig differenzierbare Kurven definiert:
Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Abbildung. $\gamma$ heißt stückweise stetig differenzierbare Kurve, falls $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ existieren, so dass

$$\gamma\big|_{[t_\nu, t_{\nu+1}]} : [t_\nu, t_{\nu+1}] \to U, \; 0 \le \nu \le n-1,$$

stetig differenzierbar ist. Wir wollen diese Definition nun verallgemeinern.

**Definition 15.3.1** Eine Kurve im $\mathbb{K}^n$ ist eine nichts anderes als eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I$ ein Intervall ist. $|\gamma| := \gamma(I)$ heißt die Spur von $\gamma$.

**Bemerkung 15.3.2** Eine Kurve ist die mathematische Abstraktion der Bewegung eines Teilchens im Raum, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ sei hier der Ort des Teilchens zum Zeitpunkt $t$. Beispiele von Kurven sind Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.
Beachte, dass man nicht $\gamma$ mit der Punktmenge $|\gamma|$ gleichsetzt!

**Beispiel 15.3.3** i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ hat als $|\gamma| = \{z \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, aber ebenso gilt mit $\tilde{\gamma} : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}, \tilde{\gamma}(t) = e^{-it}$, dass $|\tilde{\gamma}| = |\gamma|$, aber offensichtlich ist $\gamma \neq \tilde{\gamma}$.
$\gamma$ durchläuft den Kreis nur einmal, und zwar im so genannten positiven Sinn, $\tilde{\gamma}$ durchläuft den Kreis zweimal, und zwar im negativen Sinn.

ii) (Ellipse)
Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$ oder $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert.
Dann ist $|\gamma| = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\right\}$, also eine Ellipse.

iii) (Weilsche Parabel)
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^2, t^3)$.

iv) (Schraubenlinie)
Es sei $r, h > 0, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$.
Die Spur $|\gamma|$ liegt in dem Zylinder

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = r^2\right\},$$

$2\pi h$ heißt die Ganghöhe von $\gamma$.

**Definition 15.3.4** Es sei $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ eine differenzierbare Kurve (d. h. nichts anderes als eine differenzierbare Abbildung!). Dann heißt $\gamma'(t)$ der Tangentenvektor der Kurve zur Parameterstelle $t$ und $|\gamma'(t)|$ die Geschwindigkeit, im Falle $\gamma'(t) \neq 0$ heißt

$$T_\gamma(t) := \frac{1}{|\gamma'(t)|}\,\gamma'(t)$$

der Tangentialeinheitsvektor zur Parameterstelle $t$.

Wir wollen nun einer Kurve eine Länge zuordnen.
Sind $a, b \in \mathbb{K}^n$ und ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{K}^n,\ \gamma(t) = (1-t)a + tb$, so soll natürlich $\ell(\gamma) := |b-a|$ sein.
In diesem Fall erhält man

$$\ell(\gamma) = |b-a| = \sup_{0=t_0<t_1<\cdots t_k=1} \sum_{\nu=1}^{k} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big|,$$

wie man leicht ausrechnet.
Ist nun einen beliebige Kurve $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ gegeben, so approximiert man $\gamma$ durch Streckenstücke und definiert die Länge von $\gamma$ als das Supremum der Summen der Längen dieser Strecken. Betrachten wir Kurven als mathematische Abstraktion der Bewegung eines Teilchens im Raum so ist die Länge der Kurve gleich der Wegstrecke, die dieses Teilchen zurückgelegt hat.

**Definition 15.3.5** Es sei $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ eine Kurve, dann heißt

$$\ell(\gamma) := \sup\Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big| : \alpha < t_0 < \cdots < t_k < \beta,\ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

die Länge von $\gamma$. Hier ist $\alpha$ der linke Rankpunkt und $\beta$ der rechte Randpunkt von $I$.

**Satz 15.3.6** *Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt*

$$\ell(\gamma) = \int\limits_{[\alpha,\beta]} \big|\gamma'(t)\big| d\lambda(t) = \int\limits_{[\alpha,\beta]} \sqrt{\overline{\gamma'(t)}^{t}\gamma'(t)}\, d\lambda(t)$$

**Beweis.** Wir erhalten sofort aus Stetigkeitsgründen

$$\ell(\gamma) = \sup \Big\{ \sum_{\nu=1}^{k} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big| : \alpha = t_0 < \cdots < t_k = \beta,\ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

und können ohne Einschränkung annehmen, dass die Unstetigkeitsstellen von $\gamma'$ in den Stellen $\{t_0, \ldots, t_k\}$ enthalten sind, ansonsten fügen wir sie hinzu.

Wir erhalten sofort aus dem HDI, dass

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big| &= \sum_{\nu=1}^{k} \Big| \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \gamma'(t)\, dt \Big| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{k} \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \big|\gamma'(t)\big|\, dt = \int_{[\alpha,\beta]} \big|\gamma'(t)\big|\, d\lambda(t). \end{aligned}$$

Für die andere Ungleichung genügt es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\alpha = t_0 < \ldots < t_k = \beta$ existiert mit $\sum_{\nu=1}^{k} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big| \geq \int_{[\alpha,\beta]} \big|\gamma'(t)\big|\, d\lambda(t) - \varepsilon$.
Hierzu wähle man $\alpha = t_0 < \ldots < t_k = \beta$ und eine Treppenfunktion $\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \chi_{(t_{\nu-1},t_\nu)}$ mit

$$\big|x_\nu - \gamma'(t)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)},\ t \in (t_{\nu-1}, t_\nu),\ 1 \leq \nu \leq k.$$

Mit dem HDI folgt

$$\sum_{\nu=1}^{k} \left|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\right| = \sum_{\nu=1}^{k} \Big| \int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \gamma'(t)\, dt \Big|$$

$$\geq \sum_{\nu=1}^{k} \Big| \int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \sum_{l=1}^{k} x_l \chi_{(t_{l-1},t_l)}(t)\, dt \Big|$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} \Big| \int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \gamma'(t) - \sum_{l=1}^{k} x_l \chi_{(t_{l-1},t_l)}(t)\, dt \Big|$$

$$\geq \sum_{\nu=1}^{k} \int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \Big| \sum_{l=1}^{k} x_l \chi_{(t_{l-1},t_l)}(t) \Big|\, dt - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \sum_{\nu=1}^{k} \int\limits_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \left|\gamma'(t)\right| - \underbrace{\Big| \sum_{\ell=1}^{k} x_l \chi_{(t_{l-1},t_l)}(t) - \gamma'(t) \Big|}_{< \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}}\, dt$$

$$\geq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left|\gamma'(t)\right| dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Jetzt können wir tatsächlich ein paar Bogenlängen betrachten.

**Beispiel 15.3.7** i) Es sei $\gamma : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int\limits_0^{t_0} \left|\gamma'(t)\right| dt = \\ &= \int\limits_0^{t_0} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt \\ &= r t_0. \end{aligned}$$

Der Umfang des Kreises mit Radius $r$ sollte also $2\pi$ sein, dies werden wir später noch genauer betrachten.

ii) Es sei $a \geq b > 0, \gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\gamma'(t)\right| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \\ &= a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}, \end{aligned}$$

wenn $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. Das entstehende Integral ist nicht elementar berechenbar, es handelt sich um ein sogenanntes elliptisches Integral.
iii) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^{n-1}$ stetig differenzierbar und

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) = (t, f(t)).$$

Dann gilt wegen $\gamma'(t) = (1, f'(t))$, dass

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt.$$

**Übungen:** Schraubenlinie

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff der Umparametrisierung einer Kurve.

**Definition 15.3.8** Eine stetig differenzierbare Abbildung $\sigma : I \to J$ eines Intervalles $I$ auf ein Intervall $J$ heißt Parametertransformation, wenn $\sigma$ bijektiv und die Umkehrfunktion ebenfalls stetig differenzierbar ist. $\sigma$ heißt orientierungstreu, falls $\sigma' > 0$, und orientierungsumkehrend, falls $\sigma' < 0$. Ist $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ eine Kurve, so ist

$$\beta : J \to \mathbb{K}^n,\ \beta := \gamma \circ \sigma^{-1},$$

eine neue Kurve mit derselben Spur, sie heißt Umparametrisierung von $\gamma$ mittels $\sigma$.

**Satz 15.3.9** *Ist $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ eine Kurve und $\sigma : I \to J$ eine Parametertransformation, so gilt $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \sigma^{-1})$, die Bogenlänge ist also invariant unter Parametertransformationen.*

**Beweis.** Es habe $I$ die linke Grenze $\alpha$ und die rechte Grenze $\beta$ und $J$ habe die linke Grenze $\alpha'$ sowie die rechte Grenze $\beta'$. Da $\sigma$ streng monoton und stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \sup\Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} \big|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big| : \alpha < t_0 < \ldots < t_k < \beta,\, k \in \mathbb{N}\Big\} \\
&= \sup\Big\{ \sum_{\nu=1}^{n} \big|\gamma\big(\sigma^{-1}(s_\nu)\big) - \gamma\big(\sigma^{-1}(s_{\nu-1})\big)\big| : \alpha' < s_0 < \ldots < s_k < \beta'\Big\} \\
&= \ell(\gamma \circ \sigma^{-1}).
\end{aligned}$$

Im Falle, dass $\gamma$ stückweise stetig differenzierbar ist, können wir mit der Transformationsregel argumentieren:

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) = \int\limits_{(\alpha,\beta)} \big|\gamma'(t)\big|\, d\lambda(t) &= \int\limits_{(\alpha',\beta')} \big|\gamma'\big(\sigma^{-1}(t)\big)\big| \cdot \big|{\sigma^{-1}}'(t)\big|\, d\lambda(t) \\
&= \int\limits_{(\alpha',\beta')} \big|(\gamma \circ \sigma^{-1})'(t)\big|\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 15.3.10** i) In großen Teilen des obigen Abschnitts können wir $\mathbb{K}^n$ durch einen beliebigen vollständigen normierten $X$ ersetzen.
ii) Aufgrund der Invarianz unter Parametertransformationen können wir für eine (stückweise) stetig differenzierbare und injektive Kurve $\gamma : I \to \mathbb{K}^n$ die Länge der Spur definieren, wir setzen $s_1(|\gamma|) := \ell(\gamma)$. Damit erhalten wir, dass der Einheitskreis den Umfang $2\pi$ hat. Eine Verallgemeinerung wird sich im Kapitel über Integration aud Mannigfaltigkeiten finden, siehe auch den Rest dieser Bemerkung.
iii) In 12.3.12 hatten wir für eine stetige Abbildung $\omega : U \to \mathscr{L}(X, E)$ (eine so genannte Pfaffsche Form) und eine stückweise stetige differenzierbare Kurve

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to U \quad \text{das Kurvenintegral}$$

$$\int\limits_\gamma \omega := \int\limits_\alpha^\beta \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)\, dt$$

definiert. Dieses Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen: Ist also $\sigma : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$ mit $\sigma' > 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma\circ\sigma^{-1}} \omega &= \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \omega\big(\gamma(\sigma^{-1}(t))\big)\big((\gamma\circ\sigma^{-1})'(t)\big)\,dt \\
&= \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} (\sigma^{-1})'(t)\,\omega\big(\gamma(\sigma^{-1}(t))\big)\big(\gamma(\sigma^{-1}(t))\big)\,dt \\
&= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega\big(\gamma(s)\big)\big(\gamma'(s)\big)\,ds = \int\limits_{\gamma} \omega,
\end{aligned}$$

und ist $\sigma' < 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma\circ\sigma^{-1}} = \ldots &= \int\limits_{\beta}^{\alpha} \omega\big(\gamma(s)\big)\big(\gamma'(s)\big)\,ds \\
&= -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega\big(\gamma(s)\big)\big(\gamma'(s)\big)\,ds \\
&= -\int\limits_{\gamma} \omega.
\end{aligned}$$

Diese Kurvenintegrale finden Verallgemeinerungen im $\mathbb{R}^k$, die so genannten Integrale über $k$-Formen.

Wir wollen uns hier zunächst um Integrale kümmern, die orientierungsunabhängig sind! Insbesondere wollen wir den Umfang und die Oberfläche von geometrischen Gebilden im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ definieren und berechnen! Wir wollen hier geometrische Gebilde, so genannte Mannigfaltigkeiten, definieren, welche zum Beispiel Kugeloberflächen, Oberflächen von Ellipsoiden usw. enthalten.

## 15.4 Mannigfaltigkeiten

Der Rest dieser Vorlesung folgt der Struktur des Lehrbuches Forster, Analysis III.

**Definition 15.4.1** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x_0$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ gibt, mit

i) $M \cap U = \{u \in U : f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$,

ii) Rang $J_f(x_0) = n - k$, wobei $f : U \to \mathbb{R}^{n-k},\ f = (f_1, \ldots, f_{n-k})$.

Bedingung ii) bedeutet gerade, dass

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0) := J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_{n-k}(x_0) \end{pmatrix}$$

Höchstrang hat oder dass $\operatorname{grad} f_1(x_0), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(x_0)$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind.

Die $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $M$ heißen Hyperflächen, hier ist also $n - k = 1$, also gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in M$ eine Umgebung $U$ von $x_0$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $M \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ und mit $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$.

**Beispiel 15.4.2** Standardbeispiele für Hyperflächen sind für $n \geq 2$

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \quad \text{(die } (n-1)\text{-dimensionale Einheitskugel)},$$

also $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\},\ S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$.
Hier kann man $U = \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2) - 1$ wählen. Es gilt nämlich

$$\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = (2x_1^{(0)}, \ldots, 2x_n^{(0)}) \neq 0 \quad \text{für alle } x^{(0)} \in S^{n-1}.$$

Ein weiteres Beispiel ist die Oberfläche eines Ellipsoiden, also mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, r > 0$

$$M = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{\nu=1}^n \frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu^2} = r^2\Big\},$$

auch hier reicht wieder eine definierende Funktion, etwa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu^2}\Big) - r^2$, aus.
Es seien $g_{k+1}, \ldots, g_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Abbildungen, $g = (g_{k+1}, \ldots, g_n) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$.
Dann ist

$$M := \operatorname{graph}(g) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_\ell = g_\ell(x_1, \ldots, x_k), k+1 \leq \ell \leq n\}$$

eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Hierbei wähle man $f_\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_\ell(x) = g_\ell(x_1, \ldots, x_k) - x_\ell, k+1 \leq \ell \leq n$.
Wegen $\operatorname{grad} f_\ell\big(x^{(0)}\big) = \Big(\frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k}(x_0), 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0\Big)$ (mit der $-1$ an der $\ell$-ten Stelle) sind

$$\operatorname{grad} f_{k+1}(x^{(0)}), \ldots, \operatorname{grad} f_n(x^{(0)})$$

linear unabhängig.

Ist $\pi : \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation, $g_{\pi(k+1)}, \ldots, g_{\pi(n)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist auch

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\pi(\ell)} = g_{\pi(\ell)}(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}),\ k+1 \leq \ell \leq n\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, sie entsteht aus obigem $M$ durch Umnummerierung der Koordinaten.

Ein mehr konkretes Unterbeispiel ist das folgende

**Beispiel 15.4.3** Es sei $I$ ein offenes Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Dann sind

$$\big\{\big(x, g(x)\big) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\big\} \quad \text{und}$$
$$\big\{\big(g(x), x\big) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\big\}$$

eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Natürlich kann man nicht jede Mannigfaltigkeit als Graph einer Funktion darstellen, wie schon $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ zeigt.

Aber es gilt:

**Satz 15.4.4** *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Umkehrfunktion und $x \in M$. Dann gibt es nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen*

$$\begin{aligned}&U' \text{ von } (x_1, \ldots, x_k) =: x' \text{ in } \mathbb{R}^k \text{ und}\\ &U'' \text{ von } (x_{k+1}, \ldots, x_n) =: x'' \text{ in } \mathbb{R}^{n-k}\end{aligned}$$

*sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$ mit*

$$\begin{aligned}&M \cap (U' \times U'') = \big\{(y', y'') \in U' \times U'' : y'' = g(y')\big\}\\ &\big(y' = (y_1, \ldots, y_k),\ y'' = (y_{k+1}, \ldots, y_n)\big).\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei $x \in M, f = (f_{k+1}, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ wie aus der Definition der Untermannigfaltigkeit.
Dann hat $J_f(x)$ den Rang $n - k$, es gibt also $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k} \leq n$ mit $\frac{\partial(f_{k+1}, \ldots, f_n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})}(x)$ regulär.
Nach Umnummerierung können wir $i_1 = k + 1, i_2 = k + 2, \ldots, i_{n-k} = n$, annehmen.
Da $\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}$ stetig ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\frac{\partial(f_{k+1}, \ldots, f_n)}{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n)}(y)$ regulär für alle $y \in U$, ansonsten verkleinern wir $U$ entsprechend.
Mit dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir Umgebungen $U'$ von $x', U''$ von $x''$ mit

$$\begin{aligned} M \cap (U' \times U'') &= \big\{(y', y'') \in U' \times U'' : f(y', y'') = 0\big\}\\ &= \big\{(y', y'') \in U' \times U'' : y'' = g(y')\big\}\end{aligned}$$

mit einem $g : U' \to U''$ stetig differenzierbar. □

Wir wollen nun daran gehen zu zeigen, dass sich Mannigfaltigkeiten lokal wie Ebenen verhalten.

**Satz 15.4.5** *Es sei*

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\} = \big\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) : x_\nu \in \mathbb{R}\big\}$$

*($E_k$ ist eine $k$-dimensionale Koordinatenebene).*
*$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x$ und ein Diffeomorphismus $F : U \to V$ existiert mit*

$$\begin{aligned}&F(M \cap U) = E_k \cap V\\ &(\text{oder } M \cap U = F^{-1}(E_k \cap V)).\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und es sei $x \in M$. Nach obigem Satz existieren $U', U''$ und $g$ mit $M \cap (U' \times U'') = \big\{(y', y'') \in U' \times U'' : y'' = g(y')\big\}$.
Sei $U := U' \times U''$ und $F : U \to \mathbb{R}^n, F(y', y'') = (y', y'' - g(y'))$. $F$ ist injektiv, $J_F(y', y'')$ hat untere Dreiecksgestalt mit Einsen auf der Diagonale, also ist $J_F(y', y'')$ regulär. Mit dem Satz über die Umkehrfunktion ist also $F : U \to F(U) =: V$ ein Diffeomorphismus. Weiter gilt

$$\begin{aligned} F^{-1}(E_k \cap V) &= \big\{(y', y'') \in U : F(y', y'') \in E_k\big\} \\ &= \big\{(y', y'') \in U : y'' = g(y')\big\} = M \cap U. \end{aligned}$$

Ist andererseits $x \in M, U$ und $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to V$ wie angegeben. Dann gilt

$$M \cap U = F^{-1}(E_k \cap V) = \{x \in U : F_{k+1}(x) = \ldots = F_n(x) = 0\}.$$

Weil $\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$ Höchstrang hat, hat auch $\frac{\partial(F_{k+1},\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x)$ Höchstrang. □

Wir wollen nun eine noch einfachere lokale Darstellung von Untermannigfaltigkeiten beweisen, faktisch benötigt man nämlich, dass obiges $F$ gar nicht außerhalb $E_k \cong \mathbb{R}^k$ definiert ist.

**Definition 15.4.6** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Ein stetig differenzierbares $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$ heißt Immersion, falls $J_\varphi(x), x \in \Omega$, Höchstrang (also $= k$) hat.

**Lemma 15.4.7** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $\xi \in \Omega$ eine offene Umgebung $W$ von $\xi$, so dass $M := \varphi(W)$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : W \to M$ bijektiv, stetig und $\varphi^{-1} : M \to W$ ebenfalls stetig ist. Man sagt, $\varphi$ ist ein Homöomorphismus zwischen $W$ und $M$.*

**Beweis.** Da $J_\varphi(\xi)$ Höchstrang hat, können wir nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ annehmen, dass

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)}(\xi)$$

regulär ist, also existiert mit dem Satz über die Umkehrfunktion eine offene Umgebung $W$ von $\xi$ in $\mathbb{R}^k$, so dass $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : W \to V \subset \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus ist.
Es sei nun $\Phi : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k},\ \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, mit

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_k), \quad 1 \le \nu \le k \\ \Phi_\nu(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_k) + x_\nu, \quad k+1 \le \nu \le n. \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi$ ein Diffeomorphismus von $W \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ und

$$\Phi\big(E_k \cap (W \times \mathbb{R}^{n-k})\big) = \varphi(W) = M.$$

Somit ist $M$ nach Satz 15.4.5 eine Mannigfaltigkeit. □

**Beispiel 15.4.8** Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist $\varphi$ eine Immersion, $\varphi$ ist aber nicht injektiv! Ist allerdings $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist $\varphi(I)$ eine Mannigfaltigkeit.

**Satz 15.4.9** *(Parameterdarstellung)*
*$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in M$ eine in $M$ offene Umgebung $V \subset M$ von $x$, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : W \to V$ gibt mit $\varphi$ bijektiv, $\varphi^{-1}$ stetig.*

**Beweis.** Es sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n, x \in M$. Dann gibt es nach Satz 15.4.4 $U' \subset \mathbb{R}^n, U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $g : U' \to U''$ stetig differenzierbar, so dass (wie dort beschrieben) in einer Umgebung von $x$ gilt, dass

$$M \cap (U' \times U'') = \big\{(y', y'') \in U' \times U'' : y'' = g(y')\big\}.$$

Es sei $V := M \cap (U' \times U''), W := U'$. Dann ist $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(y) = \big(y, g(y)\big)$ eine Immersion, welche $W$ homöomorph auf $V$ abbildet. Die andere Richtung folgt aus obigem Lemma. □

**Bezeichnung 15.4.10** Der Homöomorphismus

$$\varphi : W \to V \text{ heißt Karte oder lokale Parameterdarstellung von } M.$$

**Satz 15.4.11** *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ offen,*

$$\varphi_j : \Omega_j \to V_j \subset M, \; j = 1, 2,$$

*zwei Karten mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$.*
*Dann sind $M_j := \varphi_j^{-1}(V) \subset \Omega_j$ offen, und $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : M_1 \to M_2$ ist ein Diffeomorphismus.*

**Beweis.** $V$ ist offen in $M$, also ist $M_j = \varphi^{-1}(V_j)$ als Urbild unter einer stetigen Abbildung wieder offen. Als Verknüpfung zweier injektiver Abbildungen ist $\tau$ injektiv und nach Definition von $M_j$ auch surjektiv.
Nach dem Umkehrsatz müssen wir nur noch nachrechnen, dass $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ stetig differenzierbar ist und $J_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1}(x)$ regulär ist für alle $x \in M_1$. Dazu sei $x \in M_1$. Analog wie im Beweis von 15.4.7 finden wir Umgebungen $\tilde{M}_1$ von $x$ in $\mathbb{R}^k$, $\tilde{M}_2$ von $\varphi_2^{-1}\big(\varphi_1(x)\big)$ in $\mathbb{R}^k$ und $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $\varphi_1(x)$ sowie Diffeomorphismen

$$\Phi_j : \tilde{M}_j \times \mathbb{R}^{n-k} \to \tilde{U}$$

mit

$$\Phi_j\big|_{\tilde{M}_j \times \{0\}} = \varphi_j\big|_{\tilde{M}_j}, \quad j = 1, 2.$$

Dann ist $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : \tilde{M}_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to \tilde{M}_2 \times \mathbb{R}^{n-k}$ ebenfalls ein Diffeomorphismus. Es gilt also, dass

$$J_{\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1}(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \overset{\text{siehe Definition von } \Phi_j}{=} \begin{pmatrix} J_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1}(x) & O \\ A & B \end{pmatrix}$$

regulär ist. Damit ist auch

$$J_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1}(x)$$

regulär. □

## 15.5 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Es sei $k \in (0,n]$ nicht notwendig eine natürliche Zahl. Für eine Borelmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ kann man definieren

$$s_k(B) := \tau_k \sup_{\delta>0} \inf \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2} \operatorname{diam} A_\nu\Big)^k : B \subset \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu,\ \operatorname{diam} A_\nu < \delta \Big\}.$$

Hierbei ist $\tau_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$ (im Falle $k \in \{1,\dots,n\}$ ist $\tau_k$ das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^k$) und $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} |x-y|$ der Durchmesser einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, dsss $s_k : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ tatsächlich ein Borelmaß ist, das so genannte Hausdorffmaß zur Dimension $k$. Dieses Maß hat folgende Eigenschaften:

$\alpha$) Es ist invariant unter Translationen, orthogonalen Transformationen (d.h. unter längentreuen linearen Abbildungen), also auch unter der Vertauschung von Koordinaten.

$\beta$) $s_k(\lambda B) = |\lambda|^k s_k(B),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

$\gamma$) Ist $\mathbb{R}^k$ mit $\big\{(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots) : x_\nu \in \mathbb{R}\big\} = E_k$ identifiziert, so gilt $\lambda^k(B) = s_k(B), B \subset \mathbb{R}^k$ borelmessbar.

$s_k(B)$ heißt $k$-dimensionale Fläche von $B$, im Fall $k=2$ spricht man einfach von Fläche, im Falle $k=3$ von Volumen.

$$\dim_h(B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s_k(B)=0 \text{ für alle } k>0 \\ \sup\{k>0 : s_k(B)>0\} & \text{falls ein } k>0 \text{ existiert mit } s_k(B)>0 \end{cases}$$

heißt übrigens die Hausdorffdimension von $B$.
Es gilt $\dim_h(B) = s \Rightarrow s_k(B) = +\infty$ für alle $k < s$.

Mehr oder weniger analog zur Transformationsformel kann man für eine injektive Immersion $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ ($W \subset \mathbb{R}^k$ offen) zeigen, dass

$$s_k\big(\varphi(W)\big) = \int_W \sqrt{\det J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}\, d\lambda^k(x)$$

oder allgemeiner

$$\int_{\varphi(W)} f\,ds_k = \int_W f\big(\varphi(x)\big) \sqrt{\det J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}\, d\lambda^k(x).$$

Wir beachten, dass im Falle $k = n$ wegen $s_k = \lambda^k$ und

$$\left|\det J_\varphi(x)\right| = \sqrt{\det J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}$$

wir gerade die Transformationsregel zurück erhalten. Man vergleiche auch die in 15.3.6 bewiesene Formel für die Kurvenlänge.

**Bezeichnung 15.5.1** $\det J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)$ heißt übrigens Gramsche Determinante von $\varphi$.

Wir wollen (um eine Diskussion des Hausdorffmaßes und den Beweis obiger Formel zu vermeiden) die rechten Seiten zur Definition der Fläche bzw. des Integrals über einer Mannigfaltigkeit $M$ verwenden.
Wir wollen nun das Integral über einer allgemeinen $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ erklären, die von endlich vielen Karten überdeckt wird. Dies werden wir ab jetzt voraussetzen. Wir gehen in zwei Schritten vor:

i) Es sei zunächst $\varphi : W \to V \subset M$ ($W \subset \mathbb{R}^k$ offen) eine Karte und $f : M \to \mathbb{C}$ messbar mit $f|_{M\setminus V} = 0$. Dann heißt $f$ integrierbar über $M$, falls
$$\int\limits_W f\big(\varphi(x)\big)\sqrt{J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}\, d\lambda^k(x)$$
existiert, und wir setzen
$$\int\limits_M f ds_k := \int\limits_M f(x) ds_k(x) := \int\limits_W f\big(\varphi(x)\big)\sqrt{J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}\, d\lambda^k(x).$$

Wir müssen noch zeigen, dass obige Setzung wohldefiniert ist, also dass die Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt.
Dazu sei $\tilde\varphi = \tilde W \to \tilde V \subset M$ eine weitere Karte mit $V \cap \tilde V \neq \emptyset$ und $f|_{M\setminus V\cap\tilde V} \equiv 0$. Indem wir zu $V \cap \tilde V$ übergehen, können wir $V = \tilde V$ annehmen.
Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\tau : \tilde W \to W$ mit $\tilde\varphi = \varphi \circ \tau$ (also $\tau = \varphi^{-1} \circ \tilde\varphi$).
Dann gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} J_{\tilde\varphi}(x)^t J_{\tilde\varphi}(x) &= J_{\varphi\circ\tau}(x)^t J_{\varphi\circ\tau}(x) \\ &= J_\tau(x)^t J_\varphi\big(\tau(x)\big)^t J_\varphi\big(\tau(x)\big) J_\tau(x), \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{\det J_{\tilde\varphi}(x)^t J_{\tilde\varphi}(x)} = \big|\det J_\tau(x)\big|\sqrt{\det J_\varphi\big(\tau(x)\big)^t J_\varphi\big(\tau(x)\big)},$$

und es folgt mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\tilde W} f\big(\tilde\varphi(x)\big)\sqrt{\det J_{\tilde\varphi}(x)^t J_{\tilde\varphi}(x)}\, d\lambda^k(x)\\
&= \int\limits_{\tilde W} f\big(\varphi\big(\tau(x)\big)\big)\sqrt{\det J_\varphi\big(\tau(x)\big)^t J_\varphi\big(\tau(x)\big)}\,\big|\det J_\tau(x)\big|\, d\lambda^k(x)\\
&= \int\limits_{W} f\big(\varphi(y)\big)\sqrt{\det J_\varphi(y)^t J_\varphi(y)}\, d\lambda^k(y).
\end{aligned}$$

ii) Wir betrachten nicht den allgemeinen Fall, sondern setzen voraus, dass es endlich viele Karten gebe, welche $M$ überdecken, diese seien $\varphi_j : W_j \to V_j \subset M,\ j = 1, \dots, m.$

Wir wählen messbare Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$\alpha$) $0 \le \alpha_j \le 1, \quad \alpha_j|_{M\setminus V_j} \equiv 0,$

$\beta$) $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \equiv 1.$

Beispielsweise kann man $\alpha_1 := \chi_{V_1},\ \alpha_j = \chi_{V_j\setminus(V_1\cup\ldots\cup V_{j-1})},\ j > 1$, setzen.
Dann heißt ein messbares $f : M \to \mathbb{C}$ integrierbar über $M$, falls $f\chi_{V_j},\ 1 \le j \le m$, über $M$ integrierbar ist (siehe i)).
Wir setzen dann

$$\int\limits_M f ds_k := \int\limits_M f(x) ds_k(x) := \sum_{j=1}^{m} \int\limits_M \alpha_j(x) f(x)\, ds_k(x).$$

Man zeigt leicht, dass die Definition unabhängig von der Wahl der $\alpha_j$ ist.

**Definition 15.5.2** Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ messbar, so sei

$$s_k(A) := \int\limits_A ds_k(x) := \int \chi_A(x)\, ds_k(x)$$

die $k$-dimensionale Fläche von $A$.
$A \subset M$ messbar heißt $k$-dimensionale Nullmenge falls $s_k(A) = 0$.

**Beispiel 15.5.3** i) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Kurve mit $\varphi'(t) \neq 0, t \in I$.
Dann ist $\varphi(I) =: M$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und es gilt

$$s_1(M) = \int\limits_I \sqrt{\det \varphi'(t)^t \varphi'(t)}\, dt = \ell\big(\varphi(I)\big).$$

ii) Es sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Wir betrachten zwei Karten $\varphi_1, \varphi_2$ von $S^1$, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: (0, 2\pi) \to S^1, \quad \varphi_1(t) = (\cos t, \sin t) \\ \varphi_2 &: (-\pi, \pi) \to S^1, \quad \varphi_2(t) = (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Diese Karten überdecken $S^1$. Für $x \in S^1$ sei

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} 1 & : \ x_1 < 0 \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} 1 & : \ x_1 \geq 0 \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$$

So gilt

$$\begin{aligned} s_1(S^1) &= \int\limits_{S^1} \alpha_1(x) + \alpha_2(x)\, ds_1(x) \\ &= \int\limits_{(0,2\pi)} \alpha_1\big(\varphi_1(t)\big) \sqrt{\det J_{\varphi_1}(t)^t J_{\varphi_1}(t)}\, d\lambda(t) \\ &\quad + \int\limits_{(-\pi,\pi)} \alpha_2\big(\varphi_2(t)\big) \sqrt{\det J_{\varphi_2}(t)^t J_{\varphi_2}(t)}\, d\lambda(t) \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 1\, dt + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Der Umfang oder die eindimensionale Fläche von $S^1$ ist also $2\pi$!
Man kann noch geschickter argumentieren.
Da $S^1 \backslash \varphi_1\big((0,2\pi)\big) = \big\{(1,0)\big\}$ eine eindimensionale Nullmenge ist, gilt

$$s_1(S^1) = \int\limits_{(0,2\pi)} \sqrt{\det J_{\varphi_1}(t)^t J_{\varphi_1}(t)}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

iii) (Rotationsflächen) Es sei $I$ ein offenes Intervall und $f : I \to (0,\infty)$ stetig differenzierbar. Die Menge $M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\big\}$ heißt die mit $f$ gebildete Rotationsfläche; sie ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, welche bis auf eine zweidimensionale Nullmenge durch die Karte

$$\Phi : I \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(t,\varphi) := \big(f(t)\cos\varphi, f(t)\sin\varphi, t\big)$$

dargestellt wird. Da

$$J_\Phi(t,\varphi) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\sqrt{J_\Phi(t,\varphi)^t J_\Phi(t,\varphi)} = f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}.$$

Daher berechnet sich ihre zweidimensionale Fläche mithilfe des Satzes von Fubini als

$$\begin{aligned} s_2(M) &= \int\limits_{(0,2\pi)} \int\limits_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\, d\lambda(t)\, d\lambda(\varphi) \\ &= 2\pi \int\limits_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\, d\lambda(t). \end{aligned}$$

iv) (Fläche von Graphen) Es sei $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F : W \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$M := \operatorname{graph}(F) = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in W \times \mathbb{R}^{n-1} : x_n = F(x_1,\dots,x_{n-1})\big\}$$

ist dann eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, also eine Hyperfläche mit der Parameterdarstellung

$$\Phi : W \to M, \quad (x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto \big(x_1,\dots,x_{n-1},\ F(x_1,\dots,x_{n-1})\big).$$

Wir berechnen

$$J_\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & O \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & O & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}(x) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \\ \\ b^t \end{pmatrix}$$

und

$$J_\Phi(x)^t J_\Phi(x) = (E_{n-1}, b^t) \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ b^t \end{pmatrix},$$

also mit dem unten angehängten Lemma

$$\sqrt{\det J_\Phi(x)^t J_\Phi(x)} = \sqrt{\det(E_{n-1} + bb^t)} = \sqrt{1 + b^t b} = \sqrt{1 + \left|\operatorname{grad} F(x)\right|^2},$$

somit

$$s_{n-1}(M) = \int\limits_W \sqrt{1 + \left|\operatorname{grad} F(x)\right|^2}\, d\lambda^{n-1}(x).$$

**Lemma 15.5.4** *Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\det(E_n + ab^t) = -\det \begin{pmatrix} -1 & b^t \\ a & E_n \end{pmatrix} = 1 + a^t b.$$

**Beweis.** Es sei $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.
Ist 0 der Nullvektor im $\mathbb{R}^n$, so gilt zunächst

$$\det(E_n + ab^t) = -\det \begin{pmatrix} -1 & b^t \\ 0 & E_n + ab^t \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & b^t \\ a & E_n \end{pmatrix}$$

wobei die letzte Identität dadurch entsteht, dass man in $\begin{pmatrix} -1 & b^t \\ a & E_n \end{pmatrix}$ das $\alpha_i$-fache der ersten Zeile zur $(i+1)$-ten, $i = 1, \dots, n$, hinzu addiert.

Der Entwicklungssatz von Laplace, angewendet auf die erste Zeile, liefert

$$\det\begin{pmatrix} -1 & b^t \\ a & E_n \end{pmatrix} = -1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, \beta_k \det(a, e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

$$= -1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, (-1)^k\, \beta_k \det(e_1, \ldots, e_{k-1}, a, e_{k+1}, \ldots, e_n),$$

und zu zeigen bleibt $\det(e_1, \ldots, e_{k-1}, a, e_{k+1}, \ldots, e_n) = \alpha_k$.
Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned} \det(e_1, \ldots, e_{k-1}, \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell, e_{k+1}, \ldots, e_n) &= \det(e_1, \ldots, e_{k-1}, \alpha_k e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &+ \det(e_1, \ldots, e_{k-1}, \sum_{\ell \neq k} \alpha_\ell e_\ell, e_{k+1}, \ldots, e_n) \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

□

**Satz 15.5.5** *Für $r > 0$ sei $H_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, H_r(x) = rx$. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $H_r(M)$ ebenfalls eine. Ein messbares $f : H_r(M) \to \mathbb{C}$ ist genau dann über $H_r(M)$ integrierbar, wenn $f \circ H_r$ über $M$ integrierbar ist.*
*In diesem Fall ist*

$$\int\limits_{H_r(M)} f(x)\, ds_k(x) = r^k \int\limits_{M} f(rx)\, ds_k(x).$$

*Insbesondere $s_k\big(H_r(A)\big) = r^k s_k(A)$, $A \subset M$ borelmessbar.*

**Beweis.** Ist $\varphi : W \to V \subset M$ eine Karte von $M$, so ist $\tilde{\varphi} : W \to H_r(V) \subset H_r(M)$, $\tilde{\varphi} := H_r \circ \varphi$, eine Karte von $H_r(M)$. Und umgekehrt, ist $\tilde{\varphi} : W \to V \subset H_r(M)$ eine Karte, so ist $\varphi := H_{\frac{1}{r}} \circ \tilde{\varphi}$ eine Karte von $M$. Es gilt

$$\sqrt{J_{\tilde{\varphi}}(x)^t J_{\tilde{\varphi}}(x)} = r^k \sqrt{J_\varphi(x)^t J_\varphi(x)}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung nach Definition des Integrals. □

**Satz 15.5.6** *Es sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar.*
*Dann existiert eine Nullmenge $N\subset[0,\infty)$, so dass für alle $r\in[0,\infty)\setminus N$ $f: rS^{n-1}\to\mathbb{C}$ integrierbar ist ($S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$, $rS^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=r\}$), und es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\lambda^n(x) = \int\limits_{[0,\infty)}\int\limits_{rS^{n-1}} f(\xi)\,ds_{n-1}(\xi)\,d\lambda(r)$$

$$= \int\limits_{[0,\infty)}\int\limits_{S^{n-1}} f(r\xi)\,ds_{n-1}(\xi)\,r^{n-1}\,d\lambda(r).$$

**Beweis.** Es sei $H_+=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\}$ und $H_-=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n<0\}$. Da

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\ d\lambda^n(x) = \int\limits_{H_+} f(x)\ d\lambda^n(x) + \int\limits_{H_-} f(x)\ d\lambda^n(x),$$

genügt es, die beiden rechts stehenden Integrale zu berechnen, wir tun dies mit dem linken der beiden, das andere behandelt man analog.
Es sei $U=\{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}:|\xi|<1\}$ und der Diffeomorphismus

$$\begin{aligned}&\Phi: U\times(0,\infty)\to H_+ \quad \text{gegeben durch}\\ &\Phi:(\xi_1,\dots,\xi_{n-1},r):=(r\xi_1,\dots,r\xi_{n-1},r\sqrt{1-|\xi|^2}).\end{aligned}$$

Dann gilt $\left|\det J_\Phi(\xi,r)\right| = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi|^2}}$ (Entwicklung nach der letzten Spalte), mit der Transformationsregel und Fubini folgt also:

$$\begin{aligned}\int\limits_{H_+} f(x)d\lambda^n(x) &= \int\limits_{U\times(0,\infty)} f\big(r\xi, r\sqrt{1-|\xi|^2}\big)\,\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\ d\lambda^n(\xi,r)\\ &= \int\limits_{[0,\infty)}\int\limits_{U} f\big(r\xi, r\sqrt{1-|\xi|^2}\big)\,\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\ d\lambda^{n-1}(\xi)\ d\lambda(r).\end{aligned}$$

Wegen des vorherigen Satzes genügt es zu zeigen, dass mit $M_+:=\{\xi\in S^{n-1}:\xi_n>0\}$ gilt

$$\int\limits_{M_+} f(r\xi)\ ds_{n-1}(\xi) = \int\limits_{U} f\big(r\xi, r\sqrt{1-|\xi|^2}\big)\,\frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\ d\lambda^{n-1}(\xi).$$

Wir setzen dazu $F:U\to\mathbb{R}$, $F(\xi)=\sqrt{1-|\xi|^2}$.
Dann gilt

$$M_+ = \operatorname{graph}(F) = \big\{\big(\xi,F(\xi)\big):\xi\in U\big\}$$

und erhalten

$$\int\limits_{M_+} f(r\xi)\, ds_{n-1}(\xi) = \int\limits_U f\bigl(r\bigl(\xi, F(\xi)\bigr)\bigr) \sqrt{1 + \bigl|\mathrm{grad} F(\xi)\bigr|^2}\, d\lambda^{n-1}(\xi)$$

$$= \int\limits_U f\bigl(r\xi, r\sqrt{1-|\xi|^2}\bigr) \sqrt{1 + \frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}}\, d\lambda^{n-1}(\xi)$$

$$= \int\limits_U f\bigl(r\xi, \sqrt{1-|\xi|^2}\bigr) \sqrt{\frac{1}{1-|\xi|^2}}\, d\lambda^{n-1}(\xi).$$

$\square$

Wir beachten, dass obiger Satz in gewisser Weise die Sätze über die Polarkoodinaten verallgemeinert.

**Satz 15.5.7** *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $\tau_n = \lambda^n(B^{(n)}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel. Dann gilt für die Fläche $\omega_n$ der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre, dass*

$$\omega_n := s_{n-1}(S^{n-1}) = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

*Also ist die $(n-1)$-dimensionale Fläche von*

$$rS^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$$

*gleich*

$$r^{n-1}\, \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

**Beweis.** Mit obigen Satz gilt

$$\begin{aligned}\tau_n &= \int\limits_{B^{(n)}} d\lambda^n(x) = \int\limits_{[0,1]} \int\limits_{S^{n-1}} ds_{n-1}(\xi) r^{n-1}\, d\lambda(r) \\ &= \int\limits_{[0,1]} s_{n-1}(S^{n-1})\, r^{n-1}\, d\lambda(r) = \frac{1}{n}\,\omega_n.\end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 15.5.8** *(Rotationssymmetrische Funktionen)*
*Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ messbar, so dass $r \mapsto f(r)\, r^{n-1}$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\big(|x|\big)\ d\lambda^n(x) = \omega_n \int_{[0,\infty)} f(r)\, r^{n-1}\ d\lambda(r).$$

## 15.6 Der Gaußsche Integralsatz

Wir beweisen in diesem Kapitel den Gaußschen Integralsatz, ein $n$-dimensionales Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir benötigen einige Vorbereitungen.

**Definition 15.6.1** Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $x \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an $M$ in $x$, falls eine stetig differenzierbare Kurve $\Psi : I \to M$ und $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ existieren mit $\Psi(t_0) = x$ und $\Psi'(t_0) = v$.
$T_xM := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } x\}$ heißt der Tangentialraum von $M$ in $x$.

**Bemerkung 15.6.2** i) In der Definition kann man sich nach Umparametrisieren immer auf $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $t_0 = 0$ zurückziehen.
Geometrisch betrachtet sieht die Mannigfaltigkeit $M$ in der Nähe von $x \in M$ wie $x + T_xM$ aus.

**Satz 15.6.3** *Es sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $x \in M$. Dann gilt*

*i) $T_xM$ ist $k$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

*ii) Ist $\varphi : W \to V \subset M$ eine Karte von $M$ mit $\varphi(\xi) = x \in V$. Dann sind die Vektoren*
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\ (\xi), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\ (\xi)$$
*eine Basis von $T_xM$.*

*iii) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $x$ und gilt*

$$M \cap U = \{y \in U : f_1(y) = \ldots = f_{n-k}(y) = 0\}$$

*mit stetig differenzierbaren Funktionen* $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$, *so dass*

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)$$

*Höchstrang hat, so ist*

$$\begin{aligned} T_xM &= \{v \in \mathbb{R}^n :< v,\ \operatorname{grad} f_j(x) >= 0, 1 \leq j \leq n-k\} \\ &= \operatorname{span}\{\operatorname{grad} f_j(x) : 1 \leq j \leq n-k\}^{\perp}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei

$$T_1 = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\ (\xi), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\ (\xi)\right\} \quad \text{und}$$
$$T_2 = \operatorname{span}\Big\{\operatorname{grad} f_1(x), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(x)\Big\}^{\perp}.$$

Wir zeigen $T_1 \subset T_xM \subset T_2$. Da $T_1, T_2$ beide $k$-dimensional sind, folgt $T_1 = T_xM = T_2$.

$\alpha$) "$T_1 \subset T_xM$". Es sei

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\ (\xi) \in T_1.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $(\xi_1 + \lambda_2 t, \ldots, \xi_k + \lambda_k t) \in W, |t| < \varepsilon$. Dann sei

$$\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \Psi(t) = \varphi(\xi_1 + \lambda_1 t, \ldots, \xi_k + \lambda_k t).$$

$\Psi$ ist stetig differenzierbar, und es gilt $\Psi(0) = \varphi(\xi) = x$ und $\Psi'(0) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\ (\xi) = v$ nach der Kettenregel.

$\beta$) "$T_xM \subset T_2$". Es sei $\Psi : I \to M$ eine Kurve mit $\Psi(t_0) = x$. Wir müssen zeigen $\Psi'(t_0) \in T_2$. Da $\Psi(I) \subset M$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\Psi\big((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\big) \subset M \cap U, \quad \text{also}$$
$$f_j\big(\Psi(t)\big) = 0,\ 1 \leq j \leq n-k,\ |t - t_0| < \varepsilon.$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (f_j \circ \Psi)'(t_0) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}\ \big(\Psi(t_0)\big) \cdot \Psi'_\nu(t_0) \\ &= \ < \operatorname{grad} f_j(x), \Psi'(t_0) > \ , \text{ also } \Psi'(t_0) \in T_2. \end{aligned}$$

□

**Definition 15.6.4** Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir setzen für $x \in M$

$$N_xM := T_xM^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n :< v, w >= 0 \text{ für alle } v \in T_xM\}.$$

Die von 0 verschiedenen Elemente von $N_xM$ heißen Normalenvektoren an $x$.

**Bemerkung 15.6.5** Sind die $f_1, \dots, f_{n-k}$ wie im obigen Satz, so gilt wegen $U^{\perp\perp} = U$ für alle Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^n$, dass

$$\operatorname{grad} f_1(x), \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}(x)$$

eine Basis von $N_xM$ ist.

**Satz/Definition 15.6.6** Wir sagen, eine kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ haben glatten Rand, falls zu jedem Punkt $x \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein stetig differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ existiert mit

i) $A \cap U = \{y \in U : f(y) \leq 0\}$,

ii) $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$.

Dann gilt nach eventueller Verkleinerung von $U$, dass

iii) $\partial A \cap U = \{y \in U : f(y) = 0\}$,

insbesondere ist dann $\partial A$ eine Hyperfläche, also eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

**Beweis.** Wir verkleinern $U$, so dass $\operatorname{grad} f(y) \neq 0, y \in U$.

1. Es sei $y \in \partial A \cap U \subset A \cap U$, also $f(y) \leq 0$.
   Da $f$ stetig, ist $L := f^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Wäre also $f(y) < 0$, so wäre $L$ eine offene Umgebung von $y$, die ganz in $A$ enthalten ist, $y$ also innerer Punkt von $A$, im Widerspruch zu $y \in \partial A$.

2. Es sei $y \in U$ mit $f(y) = 0$. Zu zeigen ist $y \in \partial A$. Wir nehmen an, dass $y \in \overset{\circ}{A}$. Wegen $f(z) \leq 0$ in einer Umgebung von $y$ und $f(y) = 0$ ist $y$ lokale Maximalstelle von $f$, also $df(y) = 0$, d. h. $\text{grad } f(y) = 0$. Widerspruch.

$\square$

**Satz/Definition 15.6.7** Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist für alle $x \in \partial A$ der Vektorraum $N_x \partial A$ eindimensional, und es gibt genau ein $\nu(x) \in N_x \partial A$ mit $|\nu(x)| = 1$ und der Eigenschaft

$$\underset{\varepsilon > 0}{\exists} \quad \underset{0 < t < \varepsilon}{\forall} \quad x + t\nu(x) \notin A$$

$\nu(x)$ heißt äußerer Normaleneinheitsvektor von $A$ in $x$ und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \nu(x)$, ist stetig.

**Beweis.** $\partial A$ ist $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, also ist $\dim T_x \partial A = n - 1$ und somit $\dim N_x \partial A = 1$ mit Basis $\text{grad } f(x)$, wenn $f : U \to \mathbb{R}$ eine definierende Funktion wie in Satz/Definition 15.6.6 ist. Also muss $\nu(x) = \frac{1}{|\text{grad } f(x)|} \text{grad } f(x)$ oder $\nu(x) = -\frac{1}{|\text{grad } f(x)|} \text{grad } f(x)$ gelten. Wir zeigen, dass der erste Vektor die gewünschte Eigenschaft hat, der zweite jedoch nicht. Wegen $f(x) = 0$ gilt nach dem Satz von Taylor, dass

$$\frac{\big|f(y) - \text{grad } f(x) \cdot (y - x)\big|}{|y - x|} \longrightarrow 0 \ (y \longrightarrow x).$$

Setzen wir speziell $y = x + t\ \frac{1}{\big|\text{grad } f(x)\big|}$ grad $f(x)$ ein, so folgt

$$\frac{\big|f\big(x + \frac{t}{|\text{grad } f(x)|}\text{grad } f(x)\big) - t|\text{grad } f(x)|\big|}{t} \longrightarrow 0 \ (t \longrightarrow 0).$$

Hieraus folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$ mit

$$f\big(x + t\frac{1}{|\text{grad } f(x)|}\ \text{grad } f(x)\big) < 0, \quad t \in (-\varepsilon, 0) \qquad \text{und}$$

$$f\big(x + t\frac{1}{|\text{grad } f(x)|}\ \text{grad } f(x)\big) > 0, \quad t \in (0, \varepsilon).$$

Da $x \mapsto \frac{1}{|\text{grad } f(x)|}$ grad $f(x)$ auf $\partial A$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

Es sei $A$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $x \in \partial A$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine definierende Funktion (d. h. eine Funktion wie in Satz/Definition 15.6.6). Da $\partial A \cap U = \{y \in U : f(y) = 0\}$, können wir wegen Satz 15.4.4 nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass $U = U' \times I, U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\partial A \cap U = \partial A \cap (U' \times I) = \big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\big\}$ mit einem $g : U' \to I$ stetig differenzierbar. Es gilt dann $A \cap U = A \cap (U' \times I) = \big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\big\}$ oder $A \cap U = \big\{(x', x_n) : x_n \ge g(x')\big\}$, also ohne Einschränkung $f(x) = x_n - g(x')$ oder $f(x) = g(x') - x_n$.
Im ersten Fall erhalten wir (siehe den Beweis des vorherigen Satzes)

$$\nu(x) = \frac{\Big(-\frac{\partial g}{\partial x_1}(x'), \dots, -\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(x'), 1\Big)}{\sqrt{1 + |\text{grad}\, g(x')|^2}},$$

im zweiten Fall

$$\nu(x) = \frac{\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x'), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(x'), -1\Big)}{\sqrt{1 + |\text{grad}\, g(x')|^2}}.$$

**Lemma 15.6.8** *Es sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta)$ ein beschränktes Intervall, $g : U' \to I$ stetig differenzierbar sowie $U = U' \times I$ und*

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\big\}, \\ M &= \big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\big\}. \end{aligned}$$

*Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U$, dass*

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda^n(x) = \int_M f(x)\nu_i(x)\, ds_{n-1}(x),$$

*wobei $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)\big)$ der äußere Normaleneinheitsvektor von $A$ an $x$ sei. Dasselbe Resultat gilt für*

$$A = \big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \ge g(x')\big\}.$$

**Beweis.** Wir haben für $1 \le j \le n-1$, dass

$$\nu_j(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\text{grad}\, g(x')|^2}} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')$$

und

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x')|^2}}.$$

Wir bemerken zunächst, dass mit 15.5.3 iv)

$$\int_M f(x)\, \nu_j(x)\, ds_{n-1}(x) = \int_{U'} f\big(x', g(x')\big)\, \nu_j\big(x', g(x')\big) \cdot \sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x')|^2}\, d\lambda^{n-1}(x').$$

1. Es sei $1 \leq j \leq n-1$.
   Wir setzen $F : U' \times I \to \mathbb{R}$, $F(x', t) = \int\limits_\alpha^t f(x', x_n)\, dx_n$.
   Es gilt dann mit dem HDI und Differenzieren unter dem Integral

   $$\frac{\partial F}{\partial t}\,(x', t) = f(x', t) \quad \text{sowie}$$

   $$\frac{\partial F}{\partial x_j}\,(x', t) = \int_\alpha^t \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x', x_n)\; dx_n.$$

   Mit der Kettenregel gilt

   $$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n)\; dx_n = \frac{\partial}{\partial x_j}\, F\big(x', g(x')\big)$$

   $$= \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x', x_n)\; dx_n + f\big(x', g(x')\big)\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(x').$$

   Da $f : U' \times I$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U' \times I$ verschwindet, verschwindet

   $$x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n)\; dx_n$$

   ausserhalb einer kompakten Teilmenge von $U'$. Mit Fubini und dem HDI folgt

   $$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big( \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n)\; dx_n \Big)\; d\lambda^{n-1}(x') = 0.$$

Also erhalten wir mit Fubini

$$\int\limits_A \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x)\;d\lambda^n(x) = \int\limits_{U'}\int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x',x_n)\;dx_n\;d\lambda^{n-1}(x')$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \int\limits_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x',x_n)\;dx_n\Big)|d\lambda^{n-1}(x')$$

$$-\int\limits_{U'} f\big(x',g(x')\big)\,\frac{\partial g}{\partial x_j}\,(x')\;d\lambda^{n-1}(x')$$

$$= \int\limits_{U'} f\big(x',g(x')\big)\;\nu_j\big(x',g(x')\big)\;\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(x')|^2}\;d\lambda^{n-1}(x').$$

2. Mit Fubini und dem HDI gilt

$$\int\limits_A \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x)\;d\lambda^n(x) = \int\limits_{U'}\int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x',x_n)\;dx_n\;d\lambda^{n-1}(x')$$

$$= \int\limits_{U'} f\big(x',g(x')\big)\;d\lambda^{n-1}(x')$$

$$= \int\limits_{U'} f\big(x',g(x')\big)\;\nu_n\big(x',g(x')\big)\;\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(x')|^2}\;d\lambda^{n-1}(x').$$

$\square$

**Definition 15.6.9** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F = (F_1,\ldots,F_n) : U \to \mathbb{K}^n$ stetig differenzierbar. $F$ heißt stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$< \nabla, F > := \operatorname{div} F : U \to \mathbb{K}, \quad < \nabla, F(x) > := \operatorname{div} F(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\,(x)$$

heißt Divergenz von $F$.

**Satz 15.6.10** *(Gauß)* *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n, \nu(x)$ der äußere Normaleneinheitsvektor, $U \supset A$ offen, $F : U \to \mathbb{K}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int\limits_A < \nabla, F(x) > \ d\lambda^n(x) = \int\limits_{\partial A} < F(x), \nu(x) > \ ds_{n-1}(x).$$

**Beweis.** Nach Satz 15.4.4 ist $\partial A$ in der Umgebung jedes Punktes $x \in \partial A$ Graph einer Funktion von $(n-1)$-Variablen.
Daher gibt es eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in J}$ von offenen Teilmengen $U_\iota \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup\limits_{\iota \in J} U_\iota \supset A$, so dass für jedes $\iota \in J$ gilt: Entweder

(1) $U_\iota \subset \overset{\circ}{A}$ oder

(2) nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten ist $U_\iota = U'_\iota \times I_\iota, U'_\iota \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I_\iota \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, und es gibt $g : U'_\iota \to I_\iota$ stetig differenzierbar mit

$$U_\iota \cap A = \big\{(x', x_n) \in U'_\iota \times I_\iota : x_n \le g(x')\big\} \qquad \text{oder}$$
$$U_\iota \cap A = \big\{(x', x_n) \in U'_\iota \times I_\iota : x_n \ge g(x')\big\}.$$

Da $A$ kompakt ist, können wir $J = \{1, \ldots, \ell\}$ annehmen.
Wir wählen stetig differenzierbare Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ mit $\alpha_j : U_j \to [0,1], \alpha_j = 0$ außerhalb der kompakten Teilmenge von $U_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \alpha_j(x) = 1, x \in A$.
Dann gilt

$$\int\limits_A \text{div } F(x) \ d\lambda^n(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{U_j \cap A} \text{div}(\alpha_j F)(x) d\lambda^n(x)$$

sowie

$$\int\limits_{\partial A} < F(x), \nu(x) > \ ds_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{U_j \cap \partial A} < (\alpha_j F)(x), \nu(x) > \ ds_{n-1}(x).$$

Wir müssen also den Satz bloß für $\alpha_j F, \ 1 \le j \le n$, zeigen. Ist $U_j \cap \partial A \neq \emptyset$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Lemma. Ist $U_j \subset \overset{\circ}{A}$, so ist $U_j \cap \partial A = \emptyset$, und das Randintegral ist 0. In diesem Fall ist $\alpha_j F$ stetig differenzierbar auf

$\mathbb{R}^n$ und diese Funktion verschwindet außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U_j$, die Behauptung folgt daher mit Fubini und dem HDI:

$$\int\limits_{U_j} \text{div } (\alpha_j F)(x) \, d\lambda^n(x)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(\alpha_j F_\nu)}{\partial x_\nu} \, (x) \, d\lambda^n(x)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\alpha_j F_\nu)}{\partial x_\nu} \, (x_1, \ldots, x_n) \, d\lambda(x_\nu) \, d\lambda(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, x_n) = 0$$

□

Für ein zweimal stetig differenzierbares $f$ sei

$$\Delta h(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_\nu^2} \, (x).$$

$\Delta h$ heißt Laplace von $h$ und $\Delta$ der Laplaceoperator. Mit dieser Bezeichnung gilt

**Korollar 15.6.11** *(Greensche Formel)* *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Ist $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_{A} f\Delta g - g\Delta f \, d\lambda^n &= \int\limits_{\partial A} < f(x) \operatorname{grad} g(x) - g(x) \operatorname{grad} f(x), \nu(x) > ds_{n-1}(x) \\ &= \int\limits_{\partial A} f < \nabla g, \nu > -g < \nabla f, \nu > ds_{n-1}.\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei

$$F := f\nabla g - g\nabla f := \begin{pmatrix} f \, \dfrac{\partial g}{\partial x_1} - g \, \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ f \, \dfrac{\partial g}{\partial x_n} - g \, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\text{div } F(x) = < \nabla, F(x) > = f\Delta g - g\Delta f$$

und

$$< F(x), \nu(x) > \;\; =< f(x) \operatorname{grad} g(x) - g(x) \operatorname{grad} f(x), \nu(x) > .$$

□

Wir wollen nun eine einfache Version des Cauchyschen Integralsatzes beweisen, dieser Satz ist ein zentrales Resultat aus der Funktionentheorie. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen:
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Wir sagen, eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \partial A \subset \mathbb{C}$ mit $\gamma'(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$ ist positiv (bezüglich $A$) orientiert, falls $(\operatorname{Im} \gamma'(t), -\operatorname{Re} \gamma'(t))$ ein äußerer Normalenvektor ist. (Da $< (\operatorname{Im} \gamma'(t), -\operatorname{Re} \gamma'(t)), (\operatorname{Re} \gamma'(t), \operatorname{Im} \gamma'(t)) >= 0$ ist $(\operatorname{Im} \gamma'(t), -\operatorname{Re} \gamma(t))$ immer ein Normalenvektor.)
Andernfalls heißt $\gamma$ negativ orientiert.
Ist also $\gamma$ negativ orientiert, so ist $\tilde{\gamma} : [-\beta, -\alpha] \to \mathbb{C}, \; \tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ positiv orientiert.
Anschaulich: $\gamma$ ist positiv orientiert genau dann, wenn $\gamma$ so läuft, dass $\overset{\circ}{A}$ links liegt.

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Wir sagen, dass die stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_\nu : [\alpha_\nu, \beta_\nu] \to \partial A \subset \mathbb{C}, 1 \le \nu \le m$ den Rand von $A$ im positiven Sinne parametrisieren, falls

i) $\gamma_\nu$ ist positiv orientiert bezüglich $A, 1 \le \nu \le m$,

ii) $\partial A$ ist die disjunkte Vereinigung von $|\gamma_1|, \ldots, |\gamma_m|$,

iii) $\gamma_\nu|_{[\alpha_\nu, \beta_\nu)}$ ist injektiv,
$\gamma_\nu(\alpha_\nu) = \gamma_\nu(\beta_\nu), \gamma_\nu'(\alpha_\nu) = \gamma_\nu'(\beta_\nu), 1 \le \nu \le m.$

In diesem Fall gilt

$$\int\limits_{\partial A} f(x,y)\, ds_1(x,y) = \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} f\big(\gamma_\nu(t)\big)\, |\gamma_\nu'(t)|\, dt$$

(auch wenn i) nicht erfüllt ist!).

**Satz 15.6.12** *(Cauchyscher Integralsatz) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Weiter sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Abbildung,*

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(z), \;\; v(x,y) := \operatorname{Im} f(z), \;\; z = x + iy, \;\; z \in G.$$

*Sind $u, v : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und erfüllen sie die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

*auf $G$, so gilt für jedes Kompaktum $A \subset G$ mit glatten Rand, der durch die positiv orientierten Kurven $\gamma_\nu : [\alpha_\nu, \beta_\nu] \to \partial A \subset \mathbb{C}$ parametrisiert werde, dass*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} f\big(\gamma_\nu(t)\big) \cdot \gamma_\nu'(t)\, dt}_{=: \int_{\gamma_\nu} f(z)\, dz} = 0$$

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist

$$\nu_1(\operatorname{Re}\gamma_\nu(t), \operatorname{Im}\gamma_\nu(t)) = \frac{\operatorname{Im}\gamma_\nu'(t)}{|\gamma_\nu'(t)|} \text{ und } \nu_2(\operatorname{Re}\gamma_\nu(t), \operatorname{Im}\gamma_\nu(t)) = -\frac{\operatorname{Re}\gamma_\nu'(t)}{|\gamma_\nu'(t)|}.$$

Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt hiermit

$$\begin{aligned}
0 &= \int_A \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)\, d\lambda^2(x,y) \\
&= \int_{\partial A} \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)\, \nu_1(x,y) + \big(iu(x,y) - v(x,y)\big)\nu_2(x,y)\, ds_1(x,y) \\
&= \frac{1}{i} \int_{\partial A} (u+iv)(x,y)\big(-\nu_2(x,y) + i\nu_1(x,y)\big)\, ds_1(x,y) \\
&= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{i} \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} f\big(\gamma_\nu(t)\big)\, \frac{\operatorname{Re}\gamma_\nu'(t) + i\operatorname{Im}\gamma_\nu'(t)}{|\gamma_\nu'(t)|}\, \big|\gamma_\nu'(t)\big| dt \\
&= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{i} \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} f\big(\gamma_\nu(t)\big)\, \gamma_\nu'(t)\, dt.
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 15.6.13** Setzt man im obigen Satz

$$\omega_f : G \to \mathscr{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}),\ \omega_f(z)(w) := f(z)w,$$

so handelt es sich bei obigen Integralen tatsächlich um unsere Kurvenintegrale, die wir in 12.3.12 definiert hatten, siehe auch 15.3.10. Denn es gilt ja

$$\int\limits_{\gamma_\nu} \omega_f = \int\limits_{[\alpha_\nu,\beta_\nu]} \omega_f(\gamma_\nu(t))(\gamma_\nu'(t))dt = \int\limits_{[\alpha_\nu,\beta_\nu]} f(\gamma_\nu(t))\gamma_\nu'(t)dt.$$

In der Cauchyschen Integralformel (und damit im Gaußschen Integralsatz über die äußere Normale) werden also orientierungsabhängige Integrale verwendet! Tatsächlich kann man den Gaußschen Integralsatz mithilfe des Satzes von Stokes, einem Hauptresultat aus der Integrationstheorie für $k$-Formen, ableiten. Wie schon vorher erwähnt, sind $k-$Formen mehrdimensionale Verallgemeinerungen von Pfaffschen Formen. Sie haben gerade die Eigenschaft, dass das für sie definierte verallgemeinerte Kurvenintegral die Transformationsregel mit $\det J_\tau(x)$ anstelle von $|\det J_\tau(x)|$ (wie beim Lebesgueintegral über Mannigfaltigkeiten) respektiert.

# Kapitel 16

# Pfaffsche Formen, Kurvenintegrale und Stammfunktionen

## 16.1 Wiederholung aus der Analysis II

Wir wiederholen zunächst noch einmal die fundamentalen Definitionen der Ableitung, des Gradienten usw. aus der Analysis II.
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $f : U \to E$ heißt stetig differenzierbar, wenn für alle $x \in U$ und $r \in \mathbb{R}^n$

$$df(x)(r) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(f(x + tr) - f(x)\big)$$

existiert, die Abbildung $df(x) : \mathbb{R}^n \to E$ linear für alle $x \in U$ und $df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E) := \{T : \mathbb{R}^n \to E : T \text{ ist linear }\}, x \mapsto df(x)$, stetig ist. Wir haben gezeigt, dass dies äquivalent dazu ist, dass alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to E, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(f(x + te_j) - f(x)\big),$$

existieren und stetig sind für $1 \leq j \leq n$. Hierbei ist $e_j = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{j-\text{te} \\ \text{Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0)$ der $j$-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Ist dies der Fall, so gilt

$$df(x)(r) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) r_j$$

$$=: \big(\operatorname{grad} f(x)\big) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit}$$

$$\operatorname{grad} f(x) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right), \quad x \in U.$$

Eigentlich hätten wir oben $r_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ anstelle von $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) r_j$ schreiben sollen. Wir vereinbaren jedoch,

$$x\lambda := \lambda x$$

für einen Vektor $x \in E$ und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies ermöglicht zum Beispiel bei Potenzreihen mit Werten in $E$, diese wie im sklaren Fall zu schreiben.

**Beispiel 16.1.1** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, f(x, y) = e^{x+iy}$. Dann ist $f$ stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ie^{x+iy},$$

also

$$\begin{aligned} df(x, y)(r, s) &= e^{x+iy} r + ie^{x+iy} x \\ &= e^{x+iy}(r + is), \quad (r, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Definition 16.1.2** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ heißt Kurve in U, diese heißt geschlossen, falls $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Weiter heißt sie stückweise stetig differenzierbar, falls $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$ existieren, so dass

$$\gamma|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]} : [t_{\nu-1}, t_\nu] \to U, \quad 1 \leq \nu \leq m,$$

stetig differenzierbar ist.
Wir sagen $\gamma$ verbinde $a \in U$ mit $b \in U$, falls $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$. Die Menge $|\gamma| := \gamma([\alpha, \beta])$ heißt die Spur von $\gamma$.

**Bemerkung 16.1.3** i) Jeder Polygonzug ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve (Polygonzug: $\gamma$ stetig und $\gamma|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ affin linear).

ii) Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte $a, b \in U$ durch einen Polygonzug verbinden lassen.

iii) Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ stückweise stetig differenzierbar, so sei $\widehat{\gamma'} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{\gamma'}(t) := \begin{cases} \big(\gamma|_{[t_{\nu-1},t_\nu)}\big)'(t) : t \in [t_{\nu-1}, t_\nu), & 1 \le \nu \le n \\ \big(\gamma|_{[t_{n-1},t_n]}\big)'(t) : t = t_n = \beta \end{cases} .$$

Wir schreiben $\gamma'$ anstelle $\widehat{\gamma'}$.

Mit dem HDI erhalten wir

$$\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) = \int_\alpha^\beta \gamma'(t)dt.$$

**Satz 16.1.4** *(HDI-Version) Es sei $f : U \to E$ stetig differenzierbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, welche $a \in U$ mit $b \in U$ verbindet. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_\alpha^\beta df\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\big(\gamma(t)\big)\gamma_\nu'(t)dt. \end{aligned}$$

Wir beachten, dass *df* eine stetige Abbildung von $U$ nach $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ ist und definieren nun natürliche Verallgemeinerungen.

## 16.2 Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale

**Definition 16.2.1** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Abbildung $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ heißt Pfaffsche Form auf $U$ (mit Werten in $E$).

**Bemerkung 16.2.2** Die Stetigkeit bedeutet gerade, dass für alle $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\sup\limits_{\substack{|r|\leq 1\\ r\in\mathbb{R}^n}} \left\|\omega(y)(r) - \omega(x)(r)\right\|_E < \varepsilon$ für alle $|x-y| < \delta, y \in U$.
Setzt man für $1 \leq \nu \leq n$

$$dx_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K},\ (dx_\nu)(r) = r_\nu,$$

so erhalten wir

$$df(x)(r) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x) \cdot r_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)(dx_\nu)(r),\ \text{also kurz}$$

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu.$$

Allgemeiner gilt

**Satz 16.2.3** *Ist $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Abbildung, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $E$ vollständiger normierter Raum, so ist $\omega$ genau dann eine Pfaffsche Form, wenn es (dann eindeutig bestimmte) stetige Abbildungen $f_1, \ldots, f_n : U \to E$ gibt mit $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$. Mit anderen Worten*

$$\begin{aligned}\omega(x)(r) &= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x) r_\nu, \quad x \in U, r \in \mathbb{R}^n \\ &= \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Beweis.** Es sei $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form.
Wir setzen $f_\nu : U \to E, f_\nu(x) := \omega(x)(e_\nu), 1 \leq \nu \leq n, x \in U$.
Dann sind die $f_1, \ldots, f_n$ stetig, und es gilt auf Grund der Linearität von $\omega(x)$, dass

$$\omega(x)(r) = \omega(x)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu e_\nu\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x)(e_\nu) r_\nu,$$

also $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$.
Ist $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} g_\nu dx_\nu$, so gilt

$$0 = \omega(x)(e_\nu) - \omega(x)(e_\nu) = f_\nu(x) - g_\nu(x),\ 1 \leq \nu \leq n,$$

damit sind die $f_\nu$ eindeutig.
Sind andererseits $f_1, \dots, f_n : U \to E$ stetig, so sei

$$\omega(x)(r) := \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x) r_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)(dx_\nu)(r).$$

Auf jedem Fall ist dann $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to E$ linear.
Wähle zu $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\big\| f_\nu(y) - f_\nu(x) \big\|_E < \frac{\varepsilon}{n}$ für alle $|x - y| < \delta, y \in U$. Dann gilt für solche $y$, dass

$$\sup_{\substack{|r| \le 1 \\ r \in \mathbb{R}^n}} \big\| \omega(x)(r) - \omega(y)(r) \big\| \le \sum_{\nu=1}^{n} \big\| f_\nu(x) - f_\nu(y) \big\|_E < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

□

**Definition 16.2.4** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form, $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) dt$$

das Kurvenintegral von $\omega$ über $\gamma$.

**Bemerkung 16.2.5** i) Ist $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$, so gilt also

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$$

$$= \int_\alpha^\beta \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\big(\gamma(t)\big) \cdot (dx_\nu)(\gamma'(t)) dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int_\alpha^\beta f_\nu\big(\gamma(t)\big) \cdot \big(\gamma_\nu'(t) dt.$$

ii) Das Kurvenintegral ist linear:
Es seien $\omega_1, \omega_2 : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ Pfaffsche Form und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega_1 + \lambda\omega_2 &= \int_\alpha^\beta (\omega_1 + \lambda\omega_2)\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \omega_1\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) + \lambda\omega_2\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \omega_1\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt + \lambda \int_\alpha^\beta \omega_2\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\
&= \int_\gamma \omega_1 + \lambda \int_\gamma \omega_2.
\end{aligned}$$

iii) Hängt man zwei Kurven hintereinander so ist das Integral über die Gesamtkurve die Summe der Integrale: Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ und $\sigma : [\beta, \delta] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(\beta) = \sigma(\beta)$. Die Aneinanderhängung sei definiert als $\rho : [\alpha, \delta] \to U$ mit $\rho|_{[\alpha,\beta]} = \gamma$ und $\rho|_{[\beta,\delta]} = \sigma$. Ist $\omega$ eine Pfaffsche Form auf $U$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\rho \omega &= \int_\alpha^\delta \omega(\rho(t))(\rho'(t))dt \\
&= \int_\alpha^\beta \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt + \int_\beta^\delta \omega(\sigma(t))(\sigma'(t))dt \\
&= \int_\gamma \omega + \int_\sigma \omega.
\end{aligned}$$

iv) Es sei $\tau : [\alpha, \beta] \to [\alpha', \beta']$ stetig differenzierbar, surjektiv und $\tau'(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$.
Dann heißt $\sigma := \gamma \circ \tau^{-1}$ Umparametrisierung von $\gamma$. Im Falle $\tau'(t) > 0$ (also $\tau$ streng monoton wachsend) nennt man $\tau$ auch orientierungserhaltend, und im Falle $\tau'(t) < 0$ (also $\tau$ streng monoton fallend) heißt

$\tau$ orientierungsumkehrend. Es gilt für jede Pfaffsche Form $\omega$, dass

$$\int\limits_{\sigma} \omega = \int\limits_{\gamma} \omega, \text{ falls } \tau'(t) > 0, t \in [\alpha, \beta],$$

$$\int\limits_{\sigma} \omega = -\int\limits_{\gamma} \omega, \text{ falls } \tau'(t) < 0, t \in [\alpha, \beta].$$

Beweisen wir dies im Falle $\tau < 0$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\sigma=\gamma\circ\tau^{-1}} \omega &= \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \omega\big((\gamma \circ \tau^{-1})(t)\big)\big((\gamma \circ \tau^{-1})'(t)\big)dt \\
&= \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \omega\big((\gamma \circ \tau^{-1})(t)\big)\big(\gamma'(\tau^{-1}(t))\big) \cdot (\tau^{-1})'(t)dt \\
&\overset{\substack{\text{Substitutions}-\\ \text{regel}}}{=} \int\limits_{\beta}^{\alpha} \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\
&= -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt \\
&= -\int\limits_{\gamma} \omega.
\end{aligned}$$

## 16.3 Stammfunktionen

Wir interessieren uns nun für folgende Frage:
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend (man sagt, $U$ ist ein *Gebiet* in $\mathbb{R}^n$), $E$ ein vollständiger normierter Raum und $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form. Wann existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to E$ mit $dF = \omega$ ?
Nach 16.2.2 und 16.2.3 ist die Frage vollständig äquivalent zu: Gegeben $f_1, \ldots, f_n : U \to E$ stetig. Wann existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to E$ mit $\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = f_\nu, 1 \leq \nu \leq n$, (also $\operatorname{grad} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x), x \in U$)?

**Definition 16.3.1** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. eine offene und zusammenhängende Menge. Weiter sei $E$ ein vollständiger normierter Raum und $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form.
Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to E$ heißt Stammfunktion von $\omega$, falls $dF = \omega$.

**Bemerkung 16.3.2** i) Sind $f_1, \dots, f_n : U \to E$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) stetig, so sagen wir auch, dass $F : U \to E$ stetig differenzierbar eine Stammfunktion für $(f_1, \dots, f_n) : U \to E^n$ ist, wenn $\operatorname{grad} F = (f_1, \dots, f_n)$.
Dies wird durch folgendes gerechtfertigt, siehe 16.2.2 und 16.2.3:
$F$ ist genau dann eine Stammfunktion für $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$, wenn $\operatorname{grad} F = (f_1, \dots, f_n)$.

ii) Zwei Stammfunktionen $F_1, F_2$ auf einem Gebiet von $\omega$ unterscheiden sich nach 12.3.9 höchstens um eine Konstante, denn es gilt $0 = \omega - \omega = dF_1 - dF_2 = d(F_1 - F_2)$, also $F_1 - F_2 = c$, somit $F_1 = F_2 + c$ mit einem festen $c \in E$.
Ist also $F$ eine Stammfunktion von $\omega$, so ist $\{F + c : c \in E\}$ die Menge aller Stammfunktionen von $\omega$, da die Ableitungen konstanter Funktionen verschwinden.

iii) Ist $n = 1$, also $U = (\alpha, \beta)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}, E) \cong E$ eine Pfaffsche Form. Dann ist $\omega = f dx$, also $\omega(x)(r) = f(x) \cdot r$, so definiert mit einem festen $x_0 \in U$

$$F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$$

eine Stammfunktion $F$ von $\omega$, denn es gilt ja

$$dF(x)(r) = F'(x) \cdot r = f(x) \cdot r = \omega(x)(r).$$

**Satz 16.3.3** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form, welche eine Stammfunktion besitzt. Dann gilt*

*i) Für alle $a, b \in U$ und alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to U$, $\gamma_2 : [\alpha', \beta'] \to U$ welche mit a mit b verbinden, ist*

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega.$$

*ii) Für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ mit $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, ist $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$.*

**Beweis.**

i) Es sei $\omega = dF$. Dann folgt mit dem HDI

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_1} \omega &= F\big(\gamma_1(\beta)\big) - F\big(\gamma_1(\alpha)\big) = F(b) - F(a) \\ &= F\big(\gamma_2(\beta')\big) - F\big(\gamma_2(\alpha')\big) \\ &= \int\limits_{\gamma_2} \omega.\end{aligned}$$

ii) Analog gilt

$$\int\limits_{\gamma} \omega = F\big(\gamma(\beta)\big) - F\big(\gamma(\alpha)\big) = 0.$$

□

**Beispiel 16.3.4** Es sei $U = \mathbb{R}^{\backslash}\{0\}$, $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\omega = f dx + g dy$ mit $f(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $g(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, gegeben, also $\omega(x, y)(r, s) = \frac{-y}{x^2+y^2}\, r + \frac{x}{x^2+y^2}\, s$.
Wir zeigen, dass $\omega$ keine Stammfunktion besitzt, indem wir nachweisen, dass $\gamma : [0, 2\pi] \to U, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, gilt

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0.$$

In der Tat, wir erhalten $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, also

$$\begin{aligned}\omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) &= (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\ &= 1,\end{aligned}$$

also

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Wir haben in der Analysis II definiert, wenn eine Abbildung $\omega : U \to F$ stetig differenzierbar ist und festgestellt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $\omega$ stetig partiell differenzierbar ist. Für Pfaffsche Formen $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$ bedeutet dies gerade, dass die $f_\nu (1 \leq \nu \leq n)$ stetig differenzierbar sind, also dass $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} : U \to E$ für $1 \leq \nu \leq n$ existieren und stetig sind.

**Satz 16.3.5** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E), \omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu ds_\nu$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form, welche eine Stammfunktion besitzt. Dann gilt*

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu},\ 1 \leq \nu, \mu \leq n.$$

**Beweis.** Es sei $F : U \to E$ stetig differenzierbar mit $dF = \omega$, also $\operatorname{grad} F(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big), x \in U$, somit

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k,\ 1 \leq k \leq n,$$

und $F$ ist ergo zweimal stetig differenzierbar.
Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial F}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, \end{aligned}$$

$1 \leq \nu, \mu \leq n$, nach dem Satz von Schwarz. □

**Definition 16.3.6** Es sei $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$, $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu dx_\nu$, eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form. Gilt

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu},\ 1 \leq \nu, \mu \leq n,$$

so heißt $\omega$ geschlossen.

**Bemerkung 16.3.7** Ist $\omega$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form, für welche ine Stammfunktion existiert, so ist $\omega$ geschlossen. Dies ist bloß eine Umformulierung von Satz 16.3.5.

**Lemma 16.3.8** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [\alpha, \beta]$, ein Intervall,$E$ ein vollständiger normierter Raum und $f : I \times U \to E$ eine Abbildung, so dass*
*i) Für alle $t \in I$ ist $x \mapsto f(t,x)$ partiell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : I \times U \to E$ ist stetig, $1 \leq \nu \leq n$.*
*ii) Für alle $x \in U$ ist $t \mapsto f(t,x)$ eine Regelfunktion.*
*Dann ist $F : U \to E,\ x \mapsto \int_\alpha^\beta f(t,x)dt$, stetig differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int\limits_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x)dt,$$

*für $x \in U,\ 1 \leq \nu \leq n$.*

**Beweis.** Es sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ mit $K := \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \varepsilon\} \subset U$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ gleichmäßig stetig auf $I \times K$ und also ist

$$y \mapsto \int\limits_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,y)dt$$

stetig auf $K$. Es gilt mit dem HDI, dass

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\Big(F(x+se_\nu) - F(x)\Big) - \int\limits_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x)dt \\ = &\int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{s}\Big(f(x+se_\nu) - f(x)\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x)dt \\ = &\int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{s}\int\limits_0^s \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x+ue_\nu) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t,x)dudt \longrightarrow 0 \ (s \to 0), \end{aligned}$$

wiederum aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : I \times K \to E$.

$\square$

**Definition 16.3.9** Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bezüglich $a_0 \in U$, falls für ale $a \in U$ die Verbindungsstrecke $[a_0, a] := \big\{ta + (1-t)a_0 : t \in [0,1]\big\}$ in $U$ liegt.
Ein Gebiet heißt sternförmig, falls es bezüglich eines Punktes sternförmig ist.

**Bemerkung 16.3.10** Konvexe offene Mengen $U$ sind sternförmige Gebiete (bezüglich jedes Punktes $a_0 \in U$ ).

**Satz 16.3.11** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form.*

*i) Genau dann besitzt $\omega$ eine Stammfunktion, wenn $\int\limits_\gamma \omega = 0$ für alle stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven $\gamma$ in $U$.*

*ii) Ist $\omega$ stetig differenzierbar sowie $U$ zusätzlich sternförmig, so besitzt $\omega$ eine Stammfunktion genau dann, wenn $\omega$ geschlossen ist.*

*Mit anderen Worten: Wir charakterisieren genau die Tupel $(f_1, \ldots, f_n)$ stetiger Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \to E$ mit der Eigenschaft, dass ein $F : U \to E$ stetig differenzierbar existiert mit*

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = f_\nu, \qquad 1 \leq \nu \leq n.$$

*Die Bedingung in i) ist gerade $\int\limits_\gamma \sum\limits_{\nu=1}^n f_\nu\big(\gamma(t)\big)\gamma'_\nu(t)dt = 0$ für alle $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$, stückweise differenzierbare differenzierbare geschlossene Kurve.*
*Die Bedingung in ii) ist gerade $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, 1 \leq \nu \leq n$.*

**Beweis.**

1. Die Notwendigkeit von $\int\limits_\gamma \omega = 0$ haben wir schon in 16.3.3 gezeigt.

2. Es sei also $\int\limits_\rho \omega = 0$ für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\rho : [\alpha, \beta] \to U$ mit $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$.
   Sind $x, y \in U, \gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_i(0) = x, \gamma_i(1) = y, i = 1, 2$, so sei

$$\rho : [0, 2] \to U,\ \rho(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & : \ t \in [0, 1] \\ \gamma_2(2 - t) & : \ t \in [1, 2]. \end{cases}$$

   Dann gilt nach Voraussetzung wegen $\rho(0) = \rho(2)$, dass

$$0 = \int\limits_\rho \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega, \text{ also } \int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega.$$

Wir dürfen also $\int\limits_x^y \omega := \int\limits_\gamma \omega$ setzen, wenn $\gamma : [\alpha, \beta] = U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y$ ist.
Es gilt dann für $x, y, z \in U$, dass

$$\int\limits_x^z \omega = \int\limits_x^y \omega + \int\limits_y^z \omega.$$

Wir setzen $F(x) := \int\limits_{x_0}^x \omega$ mit einem festen $x_0 \in U$ und beweisen, dass $F : U \to E$ eine Stammfunktion von $\omega$ ist. Dazu schreiben wir $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^n f_\nu dx_\nu$ und müssen also $\frac{\partial F}{\partial x_\nu} = f_\nu, 1 \leq \nu \leq n$, zeigen.
Es sei $t \in \mathbb{R}, 0 < |t|$ genügend klein.
Dann gilt

$$F(x + te_\nu) = \int\limits_{x_0}^{x+te_\nu} \omega = \int\limits_{x_0}^{x} \omega + \int\limits_{x}^{x+te_\nu} \omega,$$

also

$$F(x + te_\nu) - F(x) = \int\limits_{x}^{x+te_\nu} \omega = \int\limits_\gamma \omega$$

mit $\gamma : [0, t] \to U, \quad \gamma(s) = x + se_\nu$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\big(F(x + te_\nu) - F(x)\big)\\
&= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega\big(\gamma(s)\big)\big(\gamma'(s)\big)\, ds\\
&= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \sum_{\mu=1}^n f_\mu\big(\gamma(s)\big) \cdot \gamma'_\mu(s)\, ds\\
&= \frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\nu(x + te_\nu)\, ds \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f_\nu(x),
\end{aligned}$$

also $\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = f_\nu(x), x \in U, 1 \leq \nu \leq n$.

3. Ohne Einschränkung sei $U$ sternförmig bezüglich 0.
   Ist $\omega = \sum\limits_{\mu=1}^{n} f_\mu dx_\mu$, so sei

$$F(x) := \int\limits_0^1 \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu f_\mu(sx)ds, \; x \in U.$$

   Dann gilt nach der Produktregel und der Vertauschung von Differentiation und Integration sowie der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_\nu} &= \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \Big( \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int\limits_0^1 f_\mu(sx)\, ds \Big) \\
&\quad = \sum_{\mu=1}^{n} \Big( \int\limits_0^1 f_\mu(sx)\, dx \Big) \cdot \underbrace{\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu}}_{=\delta_{\nu\mu}} \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \cdot \int\limits_0^1 \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(sx) \cdot s ds \\
&\quad + \int\limits_0^1 f_\nu(sx)\, ds \\
&= \int\limits_0^1 f_\nu(sx) + s \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(sx)\, ds \\
&= \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \big( s f_\nu(sx) \big)\, ds = f_\nu(x).
\end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung und Definition 16.3.12** Es sei $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ eine Pfaffsche Form auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$, welche der Bedingung i) des vorigen Satzes genügt. Weiter sei $x_0 \in U$ fest.
Ist $x \in U$ beliebig, so sei

$$\int\limits_{x_0}^{x} \omega := \int\limits_{\gamma} \omega,$$

wenn $\gamma$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $U$ ist, welche $x_0$ mit $x$ verbindet.
Wir haben gezeigt, dass $\int\limits_{x_0}^{x} \omega$ wohldefiniert ist (also nicht vom speziellen $x$ abhängt) und $x \mapsto \int\limits_{x_0}^{x} \omega$ eine Stammfunktion von $\omega$ ist.

**Beispiel 16.3.13** Es sei $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $\omega = fdx + gdy$ mit

$$f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \; g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Dann ist $\omega$ geschlossen, wie man leicht nachrechnet, aber $\omega$ besitzt wegen Beispiel 15.4.8 und Satz 16.3.11 keine Stammfunktion.
Ist $\tilde{U} := \mathbb{R}^2 \backslash \{x, 0) : x \leq 0\}$, so besitzt nach obigem Satz $\omega : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Wir wollen nun die Bedingung der Sternförmigkeit stark abschwächen und zeigen, dass der obige Satz ii) auch für allgemeinere Gebiete gilt. Dazu benötigen wir den Begriff der Homotopie

**Definition 16.3.14** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und es seien $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \to U$ Kurven, d.h. stetige Abbildungen mit $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) =: x$ und $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) =: y$. Die beiden Kurven heißen homotop in $U$, falls es eine stetige Abbildung $A : [0,1] \times [\alpha, \beta] \to U$ gibt mit

i) $A(0,t) = \gamma_0(t)$, $A(1,t) = \gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$,

ii) $\gamma_u : [\alpha, \beta] \to U$, $\gamma_u(t) := A(u,t)$, erfüllt $\gamma_u(\alpha) = x$, $\gamma_u(\beta) = y$ für alle $u \in [0,1]$.

In diesem Fall ist $\gamma_u : [\alpha, \beta] \to U$ aufgrund der Stetigkeit von $A$ ebenfalls eine Kurve. Man sieht leicht, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist. Homotopie bedeutet gerade, dass man die Kurve $\gamma_0$ mit der in gewisser Weise stetigen Schar $(\gamma_u)_{0 \leq u \leq 1}$ von Kurven in $\gamma_1$ überführen kann, und zwar so, dass $|\gamma_u| = \gamma_u\big([\alpha, \beta]\big) \subset U, u \in [0,1]$.

Wir zeigen nun, warum Homotopie für uns so wichtig ist.

**Satz 16.3.15** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Kurven, die zueinander in $U$ homotop seien. Dann gilt für jede stetig differenzierbare geschlossene Form $\omega : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$ mit Werten in einem vollständigen normierten Raum $E$, dass*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

**Beweis.** Es sei $A : [0,1] \times [\alpha, \beta] \to U$ eine Homotopie zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$. (wir beachten, dass $\gamma_u := A(u, \cdot)$ nicht stückweise stetig differenzierbar zu sein braucht)
Da $A\big([0,1] \times [\alpha, \beta]\big)$ kompakt in $U$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\operatorname{dist}\big(A(u,t), \partial U\big) \geq \varepsilon, \quad (u,t) \in [0,1] \times [\alpha, \beta].$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $A$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\big|A(u,t) - A(u',t')\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $(u,t), (u',t')$ mit $|u' - u| + |t' - t| < \delta$.
Sei jetzt $\alpha = t_0 < \ldots < t_m = \beta$ eine Unterteilung von $[\alpha, \beta]$ mit $|t_j - t_{j-1}| < \delta$.
Für $u \in [0,1]$ sei $\sigma_u$ der Polygonzug mit den Ecken $A(u, t_0), \ldots, A(u, t_m)$.
Wir zeigen

i) $\int\limits_{\gamma_0} \omega = \int\limits_{\sigma_0} \omega, \quad \int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\sigma_1} \omega,$

ii) $\int\limits_{\sigma_u} \omega = \int\limits_{\sigma_v} \omega$ für $|u - v| < \delta$.

Ad i) Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ sei

$$B_j := B_\varepsilon(a_j) \text{ mit } a_j = A(0, t_j) = \gamma_0(t_j) = \sigma_0(t_j).$$

$B_j$ ist ganz in $U$ enthalten, und es gilt

$$\gamma_0\big([t_{j-1}, t_j]\big) \subset B_j \text{ sowie } \sigma_0\big([t_{j-1}, t_j]\big) \subset B_j$$

(wegen $\big|A(0,t) - A(0,t')\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|t - t'| < \delta$).
In $B_j$ besitzt $\omega$ eine Stammfunktion $F_j : B_j \to E$.

$$\Longrightarrow \qquad \int\limits_{\gamma_0|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega = F_j(a_j) - F_j(a_{j-1}) = \int\limits_{\sigma_0|_{[t_{j-1}, t_j]}} \omega.$$

Aufsummieren ergibt
$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\sigma_0} \omega.$$
Analog zeigt man
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\sigma_1} \omega.$$

Ad ii) Es sei $u \in [0,1]$ fest.
Jetzt sei $B_j := B_\varepsilon(a_j)$ mit $a_j = A(u, t_j) = \sigma_u(t_j)$. Wieder gilt $B_j \subset U$. Sei $F_j$ eine Stammfunktion von $\omega$ mit $B_j$. Da $B_j \cap B_{j+1}$ zusammnehängend ist, gibt es $c_j \in E$ mit $F_{j+1} = F_j + c_j$ in $B_j \cap B_{j+1}$.
Sei jetzt $v$ mit $|u - v| < \delta$. Dann gilt
$$\sigma_v(t_j),\ \sigma_v(t_{j-1}) \in B_j \quad \text{wegen} \quad \bigl|A(u,t) - A(v,t')\bigr| < \frac{\varepsilon}{2}$$
für $|u - v| + |t - t'| < \delta$.
$$\Longrightarrow \qquad \int_{\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}} \omega = F_j\bigl(\sigma_v(t_j)\bigr) - F_j\bigl(\sigma_v(t_{j-1})\bigr).$$
Summieren über $1, \ldots, m$ ergibt
$$\begin{aligned}\int_{\sigma_v} \omega \quad &= \quad -F_1\bigl(\sigma_v(t_0)\bigr) + F_m\bigl(\sigma_v(t_m)\bigr)\\ &\qquad + \sum_{j=1}^{m-1} F_j\bigl(\sigma_v(t_j)\bigr) - F_{j+1}\bigl(\sigma_v(t_j)\bigr)\\ &\overset{F_{j+1}=F_j+C_j}{=} \quad F_m\bigl(\gamma_0(\beta)\bigr) - F_1\bigl(\gamma_0(\alpha)\bigr) - \sum_{j=1}^{m-1} c_j.\end{aligned}$$
Dieses ist aber unabhängig von der Wahl von $v \in (u - \delta, u + \delta)$, also gilt
$$\int_{\sigma_v} \omega = \int_{\sigma_u} \omega,\ |u - v| < \delta.$$

Wähle nun $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \delta$. Dann gilt
$$\int_{\sigma_{\frac{\mu-1}{m}}} \omega = \int_{\sigma_{\frac{\mu}{m}}} \omega$$

für alle $1 \leq \mu \leq m$. Also gilt

$$\int_{\sigma_0} \omega = \int_{\sigma_1} \omega$$

und daraus folgt mit i) die Behauptung. $\square$

Wir wollen nun Sternförmigkeit verallgemeinern:

**Definition 16.3.16** Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

a) Eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ heißt nullhomotop, wenn sie in $U$ homotop zur Punktkurve $\sigma : [\alpha, \beta] \to U,\ \sigma(t) := \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ist.

b) $U$ heißt einfach zusammenhängend, falls es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so dass jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ mit Anfangspunkt (und Endpunkt) $x_0$ nullhomotop ist.

**Bemerkung 16.3.17** i) Ist $U$ einfach zusammenhängend, so kann man beweisen, dass für **jeden** Punkt $x_0 \in U$ jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $x_0$ nullhomotop ist.

ii) In $\mathbb{R}^2$ ist ein Gebiet $U$ genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\mathbb{R}^2 \backslash U$ keine kompakte Zusammenhangenskomponente (siehe Übungen) hat, also grob gesprochen, $U$ „keine Löcher“ hat.
Der Beweis ist sehr kompliziert.

**Satz 16.3.18** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $x_0 \in U$. Dann ist $U$ einfach zusammenhängend.*

**Beweis.** Es sei $\gamma : [0, 1] \to U$ eine Kurve mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Setze

$$A : [0, 1]^2 \to U, \quad A(u, t) := ux_0 + (1 - u)\gamma(t),$$

so ist $A$ eine Homotopie zwischen $\gamma$ und $\sigma : [0, 1] \to U,\ \sigma(t) = x_0$. $\square$

**Bemerkung 16.3.19** Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, $\varphi : U \to \tilde{U}$ ein Homöomorphismus (d. h. stetig, bijektiv, $\varphi^{-1}$ stetig) auf die offene Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\tilde{U}$ einfach zusammenhängend.

**Beweis.** Übung. □

Das folgende Resultat ist eines der wichtigsten der Funktionentheorie:

**Satz 16.3.20** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\omega : U \to E$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form in $U$. Dann besitzt $\omega$ genau dann eine Stammfunktion, wenn $\omega$ geschlossen ist.*

**Beweis.** Die Notwendigkeit der Geschlossenheit haben wir schon gezeigt.
Es sei also $x_0 \in U$ ein Punkt, bezüglich dem alle stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven nullhomotop sind.
Es sei $\gamma : [0,1] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve, und es sei $x_1 := \gamma(0) = \gamma(1)$.
Ist $x_1 = x_0$, dann ist $\gamma$ zur Punktkurve $\sigma \equiv x_0$ homotop, nach Satz 16.3.15 ist also $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\sigma \omega = 0$, da das Integral über eine Punktkurve verschwindet ($\sigma' = 0$).
Gilt $x_1 \neq x_0$, so sei $\rho : [0,1] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\rho(0) = x_0, \rho(1) = x_1$.
Sei nun $\tilde{\gamma} : [0,3] \to U$

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \rho(t) & : \ t \in [0,1] \\ \gamma(t-1) & : \ t \in [1,2] \\ \rho(3-t) & : \ t \in [2,3]. \end{cases}$$

Dann ist nach Voraussetzung $\tilde{\gamma}$ nullhomotop, und mit Satz 16.3.11 folgt

$$0 = \int\limits_{\tilde{\gamma}} \omega = \int\limits_\rho \omega + \int\limits_\gamma \omega - \int\limits_\rho \omega = \int\limits_\gamma \omega.$$

□

Wir haben gezeigt, dass die Bedingung von Satz 16.3.11 erfüllt ist, also besitzt $\omega$ eine Stammfunktion.

**Bemerkung 16.3.21** Es sei $U \in \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend, $f_1, \dots, f_n : U \to E$ stetig differenzierbar.
Genau dann existiert also ein $F : U \to E$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{grad} F = (f_1, \dots, f_n)$, wenn $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$, $1 \leq \nu, \mu, \leq n$, gilt.

## 16.4 Pfaffsche Formen im $\mathbb{C}^n$

Es sei im Folgenden $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum über dem Körper $\mathbb{C}$. Wir betrachten hier offene Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$, wobei wir $\mathbb{R}^{2n}$ mit $(\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{C}^n$ via

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n) \mapsto \big((u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)\big) = (u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n)$$

als $\mathbb{R}$-Vektorräume identifizieren. Wir beachten, dass $u+iv := (u, v), u, v \in \mathbb{R}$ nur eine Bezeichnungsweise ist.

**Bemerkung 16.4.1** Es sei $T : \mathbb{C}^n \to E$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Da $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^n$ ist, existieren eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in E$ mit

$$T(u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n) = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \beta_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} (\alpha_\nu - i\beta_\nu)(u_\nu + iv_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} (\alpha_\nu + i\beta_\nu)(u_\nu - iv_\nu), \; u_\nu, v_\nu \in \mathbb{R},$$

also

$$T(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} (\alpha_\nu - i\beta_\nu) \, w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} (\alpha_\nu + i\beta_\nu) \, \overline{w}_\nu, \; w \in \mathbb{C}^n.$$

Also ist $T$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn

$$\frac{1}{2} (\alpha_\nu + i\beta_\nu) = 0, \qquad 1 \leq \nu \leq n.$$

Sind andererseits $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots \delta_n \in E$ gegeben, so ist $T : \mathbb{C}^n \to E$,

$$T(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \overline{w}_\nu$$

$\mathbb{R}$-linear. Die Darstellung einer $\mathbb{R}$-linearen Abildung $T : \mathbb{C}^n \to E$ durch $T(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \overline{w}_\nu$ ist eindeutig. Ein solches $T$ ist $\mathbb{C}$-linear genau

dann, wenn alle $\delta_\nu = 0, 1 \le \nu \le n$.
Es sei nun $U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ offen und

$$\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, E) := \{T : \mathbb{C}^n \to E : T\ \mathbb{R} - \text{linear}\}$$

eine Pfaffsche Form. Dann haben wir gezeigt, dass eindeutig bestimmte $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n : U \to E$ stetig existieren, so dass mit der Bezeichnung $w = (w_1, \ldots, w_n)$ und $w_\nu = u_\nu + iv_\nu$ gilt:

$$\begin{aligned}
\omega(z)(w) &= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(z)v_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f_\nu(z) - ig_\nu(z)\big)(u_\nu + iv_\nu) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f_\nu(z) + ig_\nu(z)\big)(u_\nu - iv_\nu) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f_\nu(z) - ig_\nu(z)\big)\, w_\nu \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f_\nu(z) + ig_\nu(z)\big)\, \overline{w}_\nu,\ z \in U, w \in \mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

Also ist $\omega(z)$ $\mathbb{C}$-linear für alle $z \in U$ (d. h. $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E)$) genau dann, wenn

$$\frac{1}{2}\big(f_\nu(z) + ig_\nu(z)\big) = 0,\ \ z \in U.$$

Sind andererseits $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n : U \to E$ stetig, so definiert $\omega(z)(w) := \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(z)w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(z)\overline{w}_\nu$ eine Pfaffsche Form $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, E)$. Wie oben ist die Darstellung eindeutig.

Es sei

$$dz_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (dz_\nu)(w) := w_\nu,$$

und

$$d\overline{z}_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (dz_\nu)(w) := \overline{w}_\nu.$$

Fassen wir obige Bemerkungen noch einmal zusammen:

**Satz 16.4.2** *Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, E)$ eine Abbildung. $\omega$ ist genau dann eine*

*Pfaffsche Form, wenn (dann eindeutig bestimmte)* $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_n : U \to E$ *stetig existieren mit*

$$\omega(z)(w) = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(z) w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(z) \overline{w}_\nu,$$

*also kurz* $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu \, dz_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu \, d\overline{z}_\nu$.
*Weiter ist* $\omega(z) : \mathbb{C}^n \to E$ $\mathbb{C}$*-linear,* $z \in U$*, genau dann, wenn* $G_1 = \ldots = G_n = 0$*, also kurz, wenn* $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} F_\nu \, dz_\nu$.

**Bemerkung 16.4.3** i) Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$, $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, E)$ eine Pfaffsche Form und $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ (Beachte: $\gamma_\nu(t) \in \mathbb{C}$).
Schreiben wir $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dz_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{n} g_\nu \, d\overline{z}_\nu$, also $\omega(z)(w) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu(z) \, w_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{n} g_\nu(z) \overline{\omega}_\nu$, so gilt

$$\int\limits_\gamma \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dz_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \, d\overline{z}_\nu = \int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\alpha^\beta \omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big) dt$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\big(\gamma(t)\big) \, \gamma_\nu'(t) + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\big(\gamma(t)\big) \, \overline{\gamma_\nu'(t)} \, dt.$$

Ist also $\omega$ $\mathbb{C}$-linear, so gilt mit $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dz_\nu$, dass

$$\int\limits_\gamma \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dz_\nu = \int\limits_\alpha^\beta \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, \big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma_\nu'(t) \, dt.$$

ii) Wir betrachten wieder $U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ offen und einen vollständigen normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum $E$.
$f : U \to E$ heißt stetig differenzierbar, falls $U$ als Teilmenge des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^n$ aufgefasst wurde, also wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t} \big(f(z + te_\nu) - f(z)\big), \; z \in U$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{1}{t}\big(f(z+ite_\nu) - f(z)\big),\ z \in U$$

existieren und $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : U \to E$, $\frac{\partial f}{\partial y_\nu} : U \to E$ stetig sind. Wir kommen später (im Falle $U \subset \mathbb{C}$) auf den Zusammenhang mit 9.1.1 zurück.

**Definition 16.4.4** Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f : U \to E$ stetig differenzierbar. Dann sei

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z)\Big) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(z) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z)\Big), \qquad 1 \le \nu \le n.$$

**Korollar 16.4.5** *Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dann gilt:*
*Ist $f : U \to E$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$df(z)(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z)\, w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}\, \overline{w}_\nu,\ z \in U, w \in \mathbb{C}^n$$

*also kurz*

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\, dz_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}\, d\overline{z}_\nu.$$

*$df(z)$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(z) = 0$, $1 \le \nu \le n$. Ist dies für alle $z \in U$ der Fall so gilt*

$$df(z)(w) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z)\, w_\nu, z \in U, w \in \mathbb{C}^n,$$

*also kurz*

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\, dz_\nu.$$

**Beweis.** Es ist mit $w = (w_1, \ldots, w_n) = (u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n)$ :

$$\begin{aligned} df(z)(w) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z) v_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) - i\,\frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z)\right)(u_\nu + iv_\nu) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) + i\,\frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z)\right)(u_\nu - iv_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(z) w_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}(z) \overline{w_\nu}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus obigem Satz. □

**Definition 16.4.6** Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to E$ heißt holomorph auf $U$, falls

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} = 0,\ 1 \leq \nu \leq n.$$

(Dies ist äquivalent (siehe oben) dann, dass für alle $z \in U$ die Ableitung $df(z) : \mathbb{C}^n \to E$ für alle $z \in U$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist.)

**Beispiel/Bemerkung 16.4.7** i) Für $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, f_\nu(z) = z_\nu = x_\nu + iy_\nu$.
Dann gilt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + ii1) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} + i\frac{\partial f\nu}{\partial y_\mu}\right) = \frac{1}{2}(0+0) = 0\ (\mu \neq \nu),$$

also ist $f_\nu$ holomorph.

ii) Summen und (im Falle $E = \mathbb{C}$) Produkte holomorpher Funktionen sind holomorph. Dies folgt aus

$$\frac{\partial f + g}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial fg}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} g + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} f.$$

**Satz 16.4.8** *Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E)$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form, die als $\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, dz_\nu$ geschrieben sei.*
*Dann ist $\omega$ genau dann geschlossen, wenn*

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial \overline{z}_\mu} = 0,\ 1 \le \nu, \mu \le n \quad \textit{(das heißt, die } f_\nu \textit{ sind alle holomorph) und}$$

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial z_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu},\ 1 \le \nu, \mu \le n.$$

*Ist $n = 1$, also $U \subset \mathbb{C}$, so ist die stetig differenzierbare Pfaffsche Form $\omega : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, E)$ mit $\omega = f dz$ genau dann geschlossen, wenn $f$ auf $U$ holomorph ist.*

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} \omega(z)(u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n) &= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)(u_\nu + iv_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\, u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} (if_\nu)(z)\, v_\nu. \end{aligned}$$

Damit ist $\omega$ genau dann geschlossen, wenn

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\mu} = \frac{\partial (if_\mu)}{\partial x_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (if_\nu)}{\partial y_\mu} = \frac{\partial (if_\mu)}{\partial y_\nu}, \quad 1 \le \nu, \mu \le n.$$

Mit den Beziehungen $\frac{\partial h}{\partial x_\mu} = \frac{\partial h}{\partial z_\mu} + \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_\mu}$ sowie $\frac{\partial h}{\partial y_\mu} = i\big(\frac{\partial h}{\partial z_\mu} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_\mu}\big)$ rechnet man leicht nach, dass dies zur angegebenen Bedingung äquivalent ist. □

Wir könnten nun jede Menge Korollare aus unserer Theorie ableiten, belassen wir es aber mit den beiden folgenden Resultaten. Das erste folgt leicht aus 16.3.29 und 16.3.20.

**Korollar 16.4.9** *Es sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f_1, \dots, f_n : U \to E$ stetig differenzierbaren Funktionen. Genau dann* *existiert eine holomorphe Funktion $F : U \to E$, so dass $\frac{\partial F}{\partial z_\nu} = f_\nu, 1 \leq \nu \leq n$, gilt, wenn alle $f_\nu$ holomorph sind und $\frac{\partial f_\nu}{\partial z_\mu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}, 1 \leq \nu, \mu \leq n$ gilt. Ist also insbesondere, $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und ist $f : U \to E$ holomorph, so existiert eine holomorphe Funktion $F : U \to E$ mit $\frac{\partial F}{\partial z} = f$.*

**Beispiel 16.4.10** Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f_1(z_1, z_2) = \frac{2z_1 z_2^3}{3}$, $f_2(z_1, z_2) = z_1^2 z_2^2$.
Dann sind $f_1, f_2$ nach 16.3.28 holomorph. Weiter gilt $\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z_1, z_2) = 2z_1 z_2^2 = \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z_1, z_2)$. Also existiert eine (holomorphe) Stammfunktion für $f_1 dz_1 + f_2 dz_2$, also $F : \mathbb{C}^2 \to C$ holomorph mit $\frac{\partial F}{\partial z_1} = f_1$, $\frac{\partial F}{\partial z_2} = f_2$.
Wir können ein $F$ sogar berechnen. Es gilt nach 16.3.12 dass $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $F(z_1, z_2) = \int\limits_{(0,0)}^{(z_1,z_2)} f_1\, dz_1 + f_2\, dz_2$ eine Stammfunktion ist.
Wählen wir für $(z_1, z_2)$ die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}^2$, $\gamma(z) = (tz_1, tz_2)$, so gilt

$$\int\limits_{(0,0)}^{(z_1,z_1)} f_1\, dz_1 + f_2\, dz_2 = \int\limits_0^1 f_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1'(t) + f_2\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2(tz_1)(tz_2)^3}{3} z_1 + (tz_1)^3(tz_2)^2\, z_2\, dt$$

$$= \left(\frac{2}{3}\, z_1^2\, z_2^3 + z_1^2 z_2^3\right) \int\limits_0^1 t^4\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\, z_1^2\, z_2^3.$$

Wir wollen hier die Theorie holomorpher Funktionen mehrerer Veränderlicher nicht weiter treiben, sondern uns stattdessen auf den Fall $n = 1$ konzentrieren.

# Kapitel 17

# Holomorphe Funktionen einer Veränderlichen

## 17.1 Elementare Eigenschaften

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$, und es sei $f : U \to E$ eine Abbildung. Wir wiederholen noch einmal:

i) $f$ ist stetig differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \to E,\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t}\big(f(z+t) - f(z)\big) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : U \to E,\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t}\big(f(z+it) - f(z)\big)$$

existieren und stetig sind.

ii) $f$ heißt holomorph, falls $f$ stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0.$$

iii) $f$ heißt stetig komplex differenzierbar (das war stetig differenzierbar im Sinne von 9.1.1!), falls

$$f' : U \to E,\ \ f'(z) := \lim_{\substack{w \to 0 \\ w \in \mathbb{C}}} \frac{1}{w}\big(f(z+w) - f(z)\big)$$

existiert und stetig ist.

**Bemerkung 17.1.1** Ist $f$ stetig komplex differenzierbar, so ist $f$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(z) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{1}{t}\big(f(z+t)-f(z)\big)\\ &= \lim_{\substack{w\to 0\\ w\in\mathbb{C}}} \frac{1}{w}\big(f(z+w)-f(z)\big)\\ &= f'(z)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(z) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{1}{t}\big(f(z+it)-f(z)\big)\\ &= \lim_{\substack{w\to 0\\ w\in\mathbb{C}}} \frac{1}{w}\big(f(z+iw)-f(z)\big)\\ &= i\lim_{\substack{w\to 0\\ w\in\mathbb{C}}} \frac{1}{iw}\big(f(z+iw)-f(z)\big)\\ &= i\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\to\mathbb{C}}} \frac{1}{\xi}\big(f(z+\xi)-f(\xi)\big)\\ &= i\,f'(z).\end{aligned}$$

Es folgt dann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}\,(f' - f') = 0,$$

also ist $f$ sogar holomorph und es gilt dann

$$df(z)(w) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)w = f'(z)w,\ \ z\in U,\ \ w\in\mathbb{C}.$$

Es gilt sogar

**Satz 17.1.2** *Es sei $U\subset\mathbb{C}$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dann sind für eine Abbildung $f: U\to E$ äquivalent:*

*i) $f$ ist stetig komplex differenzierbar,*

*ii) $f$ ist holomorph.*

**Beweis.** „i) $\Rightarrow$ ii)“ haben wir gerade gezeigt.
„ii) $\Rightarrow$ i)“. Da $f$ holomorph, ist

$$df : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, E)$$

stetig und $\mathbb{C}$-linear.
Ist $z \in U$, so existiert also ein $a_z \in E$ mit

$$df(z)(w) = a_z \cdot w.$$

Es folgt mit dem Satz 12.1.8, dass (für $w \neq 0$)

$$\left\| \frac{1}{w} \big( f(z+w) - f(z) \big) - a_z \right\|_E$$

$$\left\| \frac{1}{w} \big( f(z+w) - f(z) - df(z)(w) \right\|_E$$

$$= \frac{\|f(z+w) - f(z) - df(z)(w)\|_E}{|w|} \underset{w \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

also ist $f$ komplex differenzierbar (und $f'(z) = a_z$).
Da $df : U \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, E) \cong E$ stetig, ist auch $z \mapsto f'(z)$ stetig. □

**Bemerkung 17.1.3** Man kann sogar zeigen (mit Hilfe des so genannten Goursatschen Lemmas), dass folgendes gilt: Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$, $f : U \to E$ eine in jedem Punkt $z_0 \in U$ komplex differenzierbare Funktion. Dann ist $f$ holomorph.

**Definition 17.1.4** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über dem Körper $\mathbb{C}$. Dann sei

$$H(U, E) := \{f : U \to E : f \text{ holomorph}\}$$

der Raum der holomorphen Funktionen mit Werten in $E$ und

$$H(U) := H(U, \mathbb{C}) = \{f : u \to \mathbb{C} : f \text{ holomorph}\}.$$

Wir sagen, $f$ ist holomorph an $z_0 \in U$, falls eine offene Umgebung $V \subset U$ von $z_0$ existiert, so dass $f|V$ holomorph ist. (Damit ist $f$ holomorph auf $U$ genau dann, wenn $f$ an allen $z_0 \in U$ holomorph ist)

Wir erinnern uns nun an die in der Analysis II schon bewiesenen Aussagen.

**Satz 17.1.5** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, so dass für jedes $z_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0} \in C^{\mathbb{N}_0}$ (welche von $z_0$ abhängt) mit $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, |z - z_0| < \varepsilon$. Mit anderen Worten, $f$ ist an jedem Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar.*
*Dann ist $f$ beliebig oft komplex differenzierbar, also insbesondere holomorph.*

**Beweis.** Siehe 9.5.3, 10.2.2. □

**Bemerkung 17.1.6** Man kann im obigen Satz $f : U \subset \mathbb{C}$ durch $f : U \to E$ ersetzen, wobei $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ ist. (Die $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ sind dann aus $E^{\mathbb{N}_0}$)

**Beispiel 17.1.7** Aus obigen Satz erhalten wir sofort, dass jedes Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, P(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, holomorph ist.
Weiter folgt sofort, dass $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

Wir rufen noch einige Ableitungsregeln auf, siehe 9.2.1, bis auf die Formeln gelten sie auch für holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher.

**Satz 17.1.8** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $(E, \|\cdot\|_E)$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dann gilt*

*i) Sind $f, g : U \to E$ holomorph auf $U$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\lambda f + g$ holomorph auf $U$, und es gilt $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.*

*ii) Ist $f : U \to \mathbb{C},\ g : U \to E$ holomorph auf $U$, so ist auch $f \cdot g$ holomorph auf $U$, und es gilt $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.*

*iii) Sind $f : U \subset \mathbb{C}, g : U \to E$ holomorph und gilt $f(z) \neq 0, z \in U$, so ist auch $\frac{1}{f} g : U \to E$ holomorph, und es gilt $\left(\frac{1}{f} g\right)'(z) = \frac{1}{f(z)^2}\big(f(z)g'(z) - f'(z)g(z)\big)$ (ist $E = \mathbb{C}$, so schreibt man dies auch als $\left(\frac{g}{f}\right)'(z) = \frac{g'(z)f(z) - g(z)f'(z)}{f(z)^2}$).*

*iv) Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und ist $V$ eine offene Obermenge von $f(U)$, sowie $g : V \to E$ holomorph, so ist $g \circ f$ holomorph, und es gilt $(g \circ f)'(z) = f'(z)g\big(f(z)\big)$ (ist $E = \mathbb{C}$, so schreibt man $(g \circ f)'(z) = g\big(f(z)\big)f'(z)$).*

**Satz 17.1.9** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $f$ injektiv und $f'(u) \neq 0, u \in U$. Dann ist $f(U) =: V$ offen und $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls holomorph, und es gilt $(f^{-1})'(v) = \frac{1}{f'(f^{-1}(v))}, v \in V$.*

**Beweis.** Wir verwenden den Satz über die Umkehrfunktion 12.4.5 mit $X = Y = \mathbb{C}$, betrachtet als $\mathbb{R}$-Vektorräume.
Wegen $df(u)(w) = f'(u) \cdot w, u \in U, w \in \mathbb{C}$, und $f'(u) \neq 0$ ist $df(u)$ ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ (sogar ein $\mathbb{C}$-linearer!). Dann ist mit dem Umkehrsatz $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar, $V$ ist offen, und es gilt

$$\begin{aligned} df^{-1}(v)(w) &= df\big(f^{-1}(v)\big)^{-1}(w) \\ &= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(v)\big)} \cdot w. \end{aligned}$$

Dann ist $df^{-1}(v)$ ebenfalls $\mathbb{C}$-linear, $v \in V$, und $f^{-1}$ somit holomorph. Weiter folgt hieraus

$$(f^{-1})'(v) \cdot w = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(v)\big)} \cdot w, \ w \in \mathbb{C},$$

und dies liefert auch die Formel. □

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}, f : U \to E$ stetig, $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann war ja gerade (für die Pfaffsche Form $\omega = f dz$)

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt.$$

Wir schreiben ab jetzt dafür häufig

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

und verwenden anstelle von $z$ auch andere Buchstaben, wie $w, \zeta, \xi, \ldots$. Wir führen noch eine unglückliche aber gebräuchliche Bezeichnungsweise ein: Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$. Dann sei $\gamma_{z_0,\rho} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + \rho e^{it}$. Wir setzen

$$\int\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz := \int\limits_{\gamma_{z_0,\rho}} f(z)dz = \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) i\rho e^{it} dt.$$

Wir wiederholen:

**Satz 17.1.10** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to E$ eine holomorphe Funktion mit Werten in einem vollständigen normierten Raum über $\mathbb{C}$.*

*i) $f$ besitzt genau dann eine Stammfunktion $F : G \to E$ (d. h. $F' = f$), wenn*

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz = 0$$

*für alle stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven $\gamma$ in $G$. Ist dies der Fall, so ist mit einem festen $z_0 \in G$*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz := \int\limits_\gamma f(z)\, dz,$$

*wobei $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(\alpha) = z_0, \gamma(\beta) = z$, wohldefiniert, und $F : G \to E, F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ ist eine Stammfunktion für $f$ (d.h. $F' = f$).*

*ii) Ist $G$ einfach zusammenhängend, so besitzt $f$ eine Stammfunktion und es gilt die Bedingung aus i). Diese Aussage heißt Cauchyscher Integralsatz.*

**Beweis.** Nach 16.4.8 ist die Form $fdz$ geschlossen. Um 16.3.11 i) beziehungsweise 16.3.20 anwenden zu können, bemerken wir, dass für holomorphes $f$ die Form $fdz$ genau dann die Stammfunktion $F$ besitzt, wenn $F' = f$ gilt. Dazu verwenden wir die Darstellung der Ableitung aus 16.4.5.

Es besitze also $fdz$ die Stammfunktion $F$. Dann gilt $fdz = dF = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$ also $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = f$, was nichts anderes bedeutet, als dass $F$ holomorph ist und $F' = f$ gilt.

Gilt $F' = f$, so ist $F$ holomorph und somit $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = F' = f$. Also gilt $fdz = \frac{\partial F}{\partial z}dz = \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}d\overline{z} = dF$. □

**Beispiel 17.1.11** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \notin G$ und für ein $R > 0$ sei $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\} \subset G$. Ist $m \in \mathbb{Z}$, so sei $f_m : G \to \mathbb{C}$, $f_m(z) = (z - z_0)^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z - z_0}\, dz &= \int\limits_0^{2\pi} f_{-1}\big(z_0 + Re^{it}\big)\, iRe^{it}\, dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

Insbesondere besitzt also $f_{-1}$ **keine** Stammfunktion auf $G$.
Wir berechnen weiter, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} z^m\, dz = \begin{cases} 1 & : \ m = -1 \\ 0 & : \ m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}. \end{cases}$$

Es bleibt nun der Fall, $m \neq -1$ zu betrachten. Dort gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^m\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} (R \cdot e^{it})^m iRe^{it}\, dt \\ &= \frac{R^{m+1}}{2\pi i}\, i \int\limits_0^{2\pi} e^{it(m+1)}\, dt \\ &= \frac{R^{m+1}}{2\pi} \Big( \frac{1}{i(m+1)}\, e^{it(m+1)}\Big|_0^{2\pi} \Big) \\ &= \frac{R^{m+1}}{2\pi} \Big( \frac{1}{i(m+1)} - \frac{1}{i(m+1)} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Wir hätten die letzteren Integrale gar nicht berechnen müssen, denn für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ besitzt $f_m$ die Stammfunktion $F_m : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ F_m(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1}$. Die Anwendung obigen Satzes liefert sofort das Verschwinden der Integrale!

**Satz 17.1.12** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet und $g \in H(G)$ ohne Nullstelle auf $G$. Weiter sei $z_0 \in G$ und $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$. Dann gilt*

*i) Es existiert $f \in H(G)$ mit $f(z_0) = \log r_0 + i\varphi_0$ und*

$$e^{f(z)} = g(z),\ z \in G.$$

ii) *Ist $A \subset G$ zusammenhängend (also z. B. $A = G$)und $h : A \to \mathbb{C}$ stetig mit $e^{f(z)} = e^{h(z)}$ für alle $z \in A$, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit*

$$h(z) = f(z) + 2\pi ik, \ z \in A.$$

*Die Menge aller stetigen Funktionen $h$ mit $e^h = g$ ist also durch $\{f + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben.*

**Beweis.**

i) $\frac{g'}{g}$ ist holomorph in $G$. Da $G$ einfach zusammenhängend ist, existiert eine Stammfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ von $\frac{g'}{g}$ mit $f(z_0) = \log r_0 + i\varphi_0$. Es folgt

$$(e^f)' = e^f f' = e^f \frac{g'}{g}.$$

Dies impliziert, dass

$$(\frac{e^f}{g})' = \frac{(e^f)'g - e^f g'}{g^2} = 0 \text{ auf } G,$$

also ist $e^f = cg$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. Aus $g(z_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ und $f(z_0) = \log r_0 + i\varphi_0$ folgt $c = 1$.

ii) Ist $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = 1$, so ist $w \in 2\pi i\mathbb{Z}$, siehe 5.4.5. Wir setzen $\varphi : A \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) - h(z)$. Wegen $e^{\varphi(z)} = e^{f(z)-h(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{h(z)}} = 1$, gilt also $\varphi(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}, z \in A$.
Wähle $z_0 \in A$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(z_0) = 2\pi ik$. Wegen $\varphi(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}, z \in A$, gilt $\varphi^{-1}(\{2\pi ik\}) = \varphi^{-1}(\{2\pi ik + z : |z| < 1\})$ und wegen der Stetigkeit von $\varphi$, ist $\varphi^{-1}(\{2\pi ik\})$ abgeschlossen und offen. Da $A$ zusammenhängend ist, gilt $\varphi^{-1}(\{2\pi ik\}) = A$ somit $\varphi(z) = 2\pi ik, z \in A$.

□

**Bemerkung und Definition 17.1.13** Es sei $0 \notin G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z, z \in G$, heißt Logarithmus auf $G$. Wir beachten, dass nicht notwendigerweise folgt, dass auch $f(e^z) = z$ gilt! Dazu benötigt man folgendes: Es sei $H \subset \mathbb{C}$ ein einfach

zusammenhängendes Gebiet mit der Eigenschaft, dass $z - w \notin 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ für alle $z, w \in H$. Dann ist besitzt $\exp : H \to \exp(H) =: G$ eine Umkehrfunktion $f : G \to H$, d.h. $f(e^z) = z,\ z \in H$, und $e^{f(z)} = z,\ z \in G$.
i) Ist $1 \in G$, so existiert genau eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z, z \in G$, und $f(1) = 0$. Diese Funktion heißt dann der Hauptzweig des Logarithmus auf $G$ und wird mit log oder besser $\log^G$ bezeichnet.
Wir beachten, dass $\log^G$ stark von $G$ abhängt: Sei $0 \notin G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches einen Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ enthält. Es gibt dann **keine** holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z, z \in G$.
Nehmen wir die Existenz einer solchen Funktion $f$ an, so folgt durch Ableiten beider Seiten, dass $f'(z)e^{f(z)} = 1, z \in G$, also

$$f'(z) = e^{-f(z)} = \frac{1}{z},\ z \in G.$$

$f'$ wäre also eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $G$, im Widerspruch zu 17.1.11.
ii) Ist $0 \notin G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $(0,\infty) \subset G$, so liefert der obige Satz, dass $\log^G$ eine Fortsetzung unseres alten Logarithmus (der Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$) ist.

## 17.2 Die Cauchysche Integralformel für Kreise

**Lemma 17.2.1** *Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $R > 0$ sowie $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1 - z_0| < R$. Ist $0 < \varepsilon < R - |z_1 - z_0|$, so dass $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R,\ |z - z_1| \ge \varepsilon\} \subset G$. Für jede holomorphe Funktion $g : G \to E$ gilt dann*

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} g(z)\,dz = \int\limits_{|z-z_1|=\varepsilon} g(z)\,dz.$$

**Beweis.** Wegen 16.4.8 ist die Form $gdz$ geschlossen.
Da $A : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $A(u,t) = (1-u)(z_0 + Re^{it}) + u(z_1 + \varepsilon e^{it})$, eine Homotopie in $G$ ist (siehe Übungen), können wir 16.3.15 anwenden und erhalten die Behauptung. $\square$

**Satz 17.2.2** *(CIF für Kreise)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : G \to E$ eine holomorphe Funktion. Sind $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset G$ so gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

*für alle $z$ mit $|z - z_0| < R$.*

**Beweis.** Sei $|z - z_0| < R$. Nach obigem Lemma gilt für $0 < \varepsilon < R - |z - z_0|$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f(z). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 17.2.3** Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to E$ holomorph, $z \in G$ mit $\{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq \varepsilon\} \subset G$ für ein $\varepsilon > 0$.
Ist $\gamma : [0, 2\pi] \to G$ ein eine Kurve mit $0 \notin |\gamma|$, welche zu $\gamma_{z,\varepsilon} : [0, 2\pi] \to G, \gamma_{z,\varepsilon}(t) = z + \varepsilon e^{it}$, homotop in $G$ ist, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Dies folgt mit dem selben Argument wie im Satz vorher.
Eine andere Möglichkeit Cauchysche Integralformeln zu beweisen ist die sogenannte Aufschneidetechnik deren Idee man leicht hinzeichnen kann, welche aber in der Notation umständlich ist. Wir demonstrieren sie hier andeutungsweise am Beispiel eines Rechtecks:
Dazu seien $a, b > 0$ und $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}, \gamma|_{[0,1]}(t) = (1 - t)(a - ib) + t(a + ib)$, $\gamma|_{[1,2]}(t) = (2 - t)(a + ib) + (t - 1)(-a + ib)$, $\gamma|_{[2,3]}(t) = (3 - t)(-a + ib) +$

$(t-2)(-a-ib),\ \gamma|_{[3,4]}(t) = (4-t)(-a-ib)+(t-3)(a-ib)$. $\gamma$ parametrisiert also das Rechteck mit den Eckpunkten $a-ib, a+ib, -a+ib, -a-ib$ und zwar im sogenannten positiven Sinn. Wir wollen zeigen, dass für eine auf einer einfachzusammenhängenden offenen Umgebung $U$ von $K := \{z \in \mathbb{C} : |Rez| \leq a,\ |Imz| \leq b\}$ holomorphe Funktion $f$ gilt, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $|Rez| < a,\ |Imz| < b$. Dazu reicht es wieder nachzuweisen, dass mit $g(\xi) = \frac{f(\xi}{\xi - z}$

$$\int\limits_{\gamma} g(\xi)d\xi = \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} g(\xi)d\xi$$

für $0 < \varepsilon < \min\{|a|-|x|, |b|-|y|\}$ gilt. Man kann dies mit einem Homotopieargument zeigen, es ist aber schwer, eine Homotopie in zwischen den beiden Kurven anzugeben (Die Homotopie darf ja $z$ nicht treffen!). Wir deuten nun die Aufschneidetechnik an, dazu wählen wir folgende Kurven:
Es sei $\rho_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, \rho_1(t) = (1-t)(a-ib)+t(a+iy)$, das heißt $\rho_1$ parametrisiert die Strecke von $a-ib$ nach $a+iy$ in dieser Orientierung. Wir wählen nun weitere Kurven: $\rho_2$ parametrisiere die Strecke von $a+iy$ nach $x+\varepsilon+iy$. Es sei weiter $\rho_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, \rho_3(t) = z+\varepsilon e^{-i\pi t}$. $\rho_4$ parametrisiere die Strecke von $x-\varepsilon+iy$ nach $-a+iy$, $\rho_5$ die Strecke von $-a+iy$ nach $-a-ib$ und $\rho_6$ die Strecke von $-a-ib$ nach $a-ib$. Wir setzen die geschlossene Kurve $\rho := \rho_1, \rho_2 \cdots \rho_6$ als die Aneinanderhängung von $\rho_1$ bis $\rho_6$. Dann gilt nach dem CIS, dass

$$\int\limits_{\rho} g(\xi)d\xi = 0.$$

Analog definieren wir Kurven $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$: $\sigma_1$ parametrisiere die Strecke von $a+iy$ nach $a+ib$, $\sigma_2$ die Strecke von $a+ib$ nach $-a+ib$, $\sigma_3$ die Strecke von $-a+ib$ nach $-a+iy$, $\sigma_4$ die Strecke von $-a+iy$ nach $x-\varepsilon+iy$, $\sigma_5 : [0,1] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\sigma_5(t) := z+\varepsilon e^{i\pi(1-t)}$. Schließlich parametrisiere $\sigma_6$ die Strecke von $x+\varepsilon+iy$ nach $a+iy$. Wir setzen wieder $\sigma := \sigma_1 \cdots \sigma_6$ als die Aneinanderhängung von $\sigma_1$ bis $\sigma_6$. Analog zu oben ist auch

$$\int\limits_{\sigma} g(\xi)d\xi = 0.$$

Also gilt insgesamt

$$\sum_{\nu=1}^{6} \int\limits_{\rho_\nu} g(\xi)d\xi + \sum_{\nu=1}^{6} \int\limits_{\sigma_\nu} g(\xi)d\xi = 0.$$

Wir beachten, dass sich die Integrale über $\rho_2$ und $\sigma_6$ sowie die über $\rho_4$ und $\sigma_4$ jeweils aufheben. Summieren wir anders auf, so erhalten wird somit

$$\Big(\int\limits_{\rho_1} + \int\limits_{\sigma_1} + \int\limits_{\sigma_2} + \int\limits_{\sigma_3} + \int\limits_{\rho_5} + \int\limits_{\rho_6}\Big) + \Big(\int\limits_{\rho_3} + \int\limits_{\sigma_5}\Big) = 0.$$

In der linken Klammer steht $\int_\gamma g(\xi)d\xi$ und in der Rechten das Negative von $\int_{|\xi-z|=\varepsilon} g(\xi)d\xi$. Somit ist die Behauptung gezeigt.
Später werden wir eine einfachere Methode angeben, Cauchysche Integralformeln zu zeigen, und zwar mit Hilfe des sogenannten Indexes.

Man kann zeigen, dass für eine geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, welche auf $[\alpha, \beta)$ injektiv ist, $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ in zwei Gebiete $I(\gamma)$ und $A(\gamma)$ zerfällt, wobei $I(\gamma)$ beschränkt und $A(\gamma)$ unbeschränkt ist (Jordanscher Kurvensatz).
Ist $\gamma$ zusätzlich stückweise stetig differenzierbar, so existiert $\delta \in \{-1, 1\}$, so dass gilt:
Ist $f$ holomorph auf einer offenen Obermenge von $I(\gamma) \cup |\gamma|$, so ist

$$f(z) = \frac{\delta}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,\ \ z \in I(\gamma).$$

$$\begin{aligned} \delta &= \ \ 1 : \quad \gamma \text{ heißt positiv orientiert} \\ \delta &= -1 : \quad \gamma \text{ heißt negativ orientiert.} \end{aligned}$$

Die Beweise sind kompliziert und würden den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

**Lemma 17.2.4** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $I = [\alpha, \beta]$ ein Intervall, $E$ ein vollständiger normierter Raum und $K : I \times U \to E$ eine Abbildung mit*

*i) $z \mapsto K(t, z)$ ist holomorph für alle $t \in I$ und $\frac{\partial K}{\partial z} : I \times U \to E$ ist stetig.*

*ii) $t \mapsto K(t, z)$ ist eine Regelfunktion für alle $z \in U$.*

*Dann ist*

$$f : U \to E,\ \ f(z) := \int\limits_{\alpha}^{\beta} K(t, z)\ dt,$$

*holomorph, und es gilt*

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\,(z) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial K}{\partial z}\,(t,z)\,dt.$$

**Beweis.** Wegen $\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial K}{\partial z}$ und $\frac{\partial K}{\partial y} = i\Big(\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial \overline{z}}\Big) = i\,\frac{\partial K}{\partial z}$ sind die Voraussetzungen von 16.3.8 erfüllt.
Es folgt also, dass $f$ stetig differenzierbar ist und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,(z) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(z)\Big) \quad &= \quad \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial K}{\partial x}\,(t,z) + i\,\frac{\partial K}{\partial y}\,(t,z)\Big)\,dt \\ &= \quad \int\limits_{\alpha}^{\beta} 0dt = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,(x) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(z)\Big) =$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial K}{\partial x}\,(t,z) - i\,\frac{\partial K}{\partial y}\,(t,z)\Big)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial K}{\partial z}\,(t,z)\,dt.$$

□

**Satz 17.2.5** *(Analytizität Cauchyscher Integrale)*
*Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $g : |\gamma| \to E$ eine stetige Funktion und $f : \mathbb{C}\backslash|\gamma| \to E$ definiert durch*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

*Dann sind $f, f', f'', \ldots$ holomorph, und es gilt für $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\,d\xi, \quad z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|.$$

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $\gamma$ stetig differenzierbar, ansonsten zerlege $[\alpha, \beta]$. Sei $K : [\alpha, \beta] \times \mathbb{C} \backslash |\gamma| \to E$,

$$K(t, z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{g\big(\gamma(t)\big)}{\gamma(t) - z} \gamma'(t).$$

Die sukzessive Anwendung des obigen Lemmas liefert die Behauptung. □

**Korollar 17.2.6** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : G \to E$ holomorph. Sind $z_0 \in G$ und $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset G$, so gilt*

*i) $f$ ist beliebig oft (stetig) komplex differenzierbar und*

$$\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}} \, d\xi$$

*für alle $|z - z_0| < R$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$ (Der Fall $\nu = 0$ ist gerade die CIF für Kreise).*

*ii)*

$$\frac{\|f^{(\nu)}(z)\|_E}{\nu!} \leq \frac{R}{(R - |z - z_0|)^{\nu+1}} \sup_{|\xi - z_0| = R} \|f(\xi)\|_E$$

*für alle $|z - z_0| < R$ und $\nu \in \mathbb{N}_0$, also insbesondere $\frac{\|f^{(\nu)}(z_0)\|_E}{\nu!} \leq \frac{1}{R^\nu} \sup_{|\xi - z_0| = R} \|f(\xi)\|_E$ für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$. Die letzten Ungleichungen heißen Cauchy-Abschätzungen.*

**Beweis.**

i) Nach der Cauchyschen Integralformel für Kreise gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi, \quad |z - z_0| < R.$$

Aus der Analytizität Cauchyscher Integrale folgt dann i).

ii)
$$\frac{\|f^{(\nu)}(z)\|_E}{\nu!} = \Big\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\,d\xi\Big\|_E$$
$$= \Big\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})iRe^{it}}{(z_0+Re^{it}-z)^{\nu+1}}\,dt\Big\|_E$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big\|\frac{f(z_0+Re^{it})Re^{it}}{(z_0+Re^{it}-z)^{\nu+1}}\Big\|_E\,dt$$
$$\le \frac{R}{(R-|z-z_0|)^{\nu+1}} \sup_{t\in[0,2\pi]} \big\|f(z_0+Re^{it})\big\|_E.$$

□

**Bemerkung und Definition 17.2.7** Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $E$ ein vollständiger normierter Raum sowie $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $E$. Dann heißt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

eine Potenzreihe mit Werten in $E$ und Entwicklungspunkt $z_0$ und

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\|a_\nu\|_E}} \in [0,\infty]$$

ihr Konvergenzradius. Ganz analog wie in 2.2.26 und 6.3.4 zeigt man:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \text{ konvergent gleichmäßig auf } \{z : |z - z_0| \le r\}$$

für alle $r < R$, und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ divergiert für alle $|z - z_0| > R$.
Insbesondere ist $f : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \to E$, $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$, eine stetige Funktion.

Für $0 < r < R$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(\xi - z_0)^\nu}{\xi - z} \, d\xi$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{(\xi - z_0)^\nu}{\xi - z} \, d\xi$$

$$\overset{\substack{\text{Cauchy}-\\ \text{Integralformel}}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = f(z).$$

Die Analytizität Cauchyscher Integrale liefert nun, dass $f$ beliebig oft komplex differenzierbar ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{\xi - z_0)^\mu}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi}_{=\delta_{\nu\mu}} = a_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

**Satz 17.2.8** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : G \to E$ eine Funktion. Dann sind äquivalent*

*i) $f$ ist holomorph ($\Leftrightarrow$ stetig komplex differenzierbar).*

*ii) $f$ ist beliebig oft komplex differenzierbar.*

*iii) Für jedes $z_0 \in G$ existiert eine Umgebung $U$ von $z_0$ und eine Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, \quad z \in U.$$

*iv) Für jedes $z_0 \in G$ existiert eine Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit Konvergenzradius größer oder gleich $\operatorname{dist}(z_0, \partial G)$, so dass*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, \quad |z - z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial G).$$

*Im Falle iii) und iv) gilt* $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}, \nu \in \mathbb{N}_0$.

**Beweis.** ii) $\Rightarrow$ i), iv) $\Rightarrow$ iii) sind trivial, iii) $\Rightarrow$ ii) ist in obiger Bemerkung enthalten. Es bleibt also „i) $\Rightarrow$ iv)“ zu zeigen. Dazu sei $f$ holomorph auf $G$. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ sei $a_\nu := \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$. Sind $\operatorname{dist}(z_0, \partial G) > r' > r > 0$, so folgt aus 17.2.6 die Existenz eines $C > 0$ mit

$$\|a_\nu\|_E \leq \frac{C}{r'^\nu}, \nu \in \mathbb{N}_0,$$

somit konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| \leq r\}$.
Wir berechnen für $|z - z_0| < r$ unter zweimaliger Verwendung von 17.2.6, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} f(\xi) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

Also gilt iv).
Aus obiger Bemerkung folgt im Falle iii) und iv), dass

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

□

**Beispiel/Bemerkung 17.2.9** i) Wir bemerken, dass wir gerade mitbewiesen haben, dass durch Potenzreihen dargestellte Funktionen

$$f : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu,$$

beliebig oft komplex differenzierbar sind und zum Beispiel

$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1}(\nu+1)(z-z_0)^\nu, \ |z-z_0| < R,$$

gilt. Einen alternativen Beweis lieferte ja 9.5.2 bis 9.5.4. wo wir die Vertauschung von Summation und Differentiation behandelt haben.
ii) (Potenzreihe des Logarithmus)
Wir haben in 9.5.5 gezeigt, dass $\log x = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}(x-1)^\nu$ für $x \in (0,2)$ gilt. Hier war $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ als die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ definiert.
Ist nun $\mathbb{C}_- := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ und $\log^{\mathbb{C}_-}$ der Hauptzweig des Logarithmus' auf $\mathbb{C}_-$ (d.h. die eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ und $f(1) = 0$), so stimmen die beiden Definitionen auf $(0,+\infty)$ überein, wie wir oben gesehen haben. Da $\log^{\mathbb{C}_-}$ sich an der Stelle 1 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 entwickeln lässt, gilt somit $\log^{\mathbb{C}_-}(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\log^{\mathbb{C}_-})^{(\nu)}(1)}{\nu!}(z-1)^\nu$. Wegen $\log^{\mathbb{C}_-}(1) = 0, (\log^{\mathbb{C}_-})^{(\nu)}(z) = (\nu-1)!\,(-1)^{\nu+1}\,z^{-\nu}$, erhalten wir $\log^{\mathbb{C}_-}(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}(z-1)^\nu, \ |z-1| < 1.$

Mit der Analytizität Cauchyscher Integrale kann man folgendes nützliche Lemma folgern:

**Lemma 17.2.10** *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $I = [\alpha, \beta]$ ein Intervall, $E$ ein vollständiger normierter Raum und $K : I \times U \to E$ eine stetige Abbildung, so dass $z \mapsto K(t,z)$ holomorph ist für alle $t \in I$. Dann ist sind die Voraussetzungen von 17.2.4 erfüllt und somit ist*

$$f : U \to E, \ f(z) := \int\limits_{\alpha}^{\beta} K(t,z)\ dt,$$

*holomorph.*

**Beweis.** Die Bedingung ii) ist aufgrund der Stetigkeit von $K$ offensichtlich erfüllt, für die Bedingung i) müssen wir zeigen, dass $\frac{\partial K}{\partial z}$ an jedem Punkt $(t_0.z_0) \in I \times U$ stetig ist. Sei dazu $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset U$. Dann gilt mit

17.2.6, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial z}(t,z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi - z_0|=R}\frac{1}{(\xi - z)^2}K(t,\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{Re^{i\varphi}}{(z_0 + Re^{i\varphi} - z)^2}K(t, z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi\end{aligned}$$

für $(t,z) \in I \times B_{\frac{R}{2}}(z_0)$. Da der Integrand stetig auf $I \times B_{\frac{R}{2}}(z_0) \times [0,2\pi]$ ist, folgt mit 6.1.16, dass

$$\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\|\frac{Re^{i\varphi}}{(z_0 + Re^{i\varphi} - z)^2}K(t,z_0+Re^{i\varphi}) - \frac{Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi})^2}K(t_0,z_0+Re^{i\varphi})\right\|_E \to 0,\ \big((t,z)\to(t_0,z_0)\big).$$

Dies liefert die Stetigkeit von $\frac{\partial K}{\partial z}$ an $(t_0, z_0)$. □

**Definition 17.2.11** Ist $E$ ein vollständiger normierter Raum, so heißt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to E$ ganze Funktion (mit Werten in $E$).

Beispielsweise sind alle Polynome sowie exp, cos, sin, cosh, sinh, . . . ganze Funktionen. Eine Funktion ist genau dann ganz, wenn sie sich auf ganz $\mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe darstellen läßt.

**Satz 17.2.12** *(Liouville)* *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

**Beweis.** Es sei $f : \mathbb{C} \to E$ ganz mit $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\|f(z)\|_E < \infty$. Da $f$ ganz ist, gilt $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\,z^\nu,\ z \in \mathbb{C}$. Aus den Cauchyabschätzungen folgt für $\nu \in \mathbb{N}$, dass

$$\left\|\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}\right\|_E \le \frac{1}{R^\nu}\sup_{|z|=R}\|f(z)\|_E \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt $\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}$, und somit $f(z) = f(0),\ z \in \mathbb{C}$. □

Wir wollen nun den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra beweisen, welcher eine Darstellung von Polynomen durch ihre Nullstellen liefert. Dazu benötigen wir das folgende

**Lemma 17.2.13** *Es sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht konstantes Polynom. Dann hat $P$ eine Nullstelle.*

**Beweis.** Nehmen wir an, $P$ habe keine Nullstelle. Dann ist $f := \frac{1}{P}$ eine ganze Funktion. Wegen $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$ liefert der Satz von Liouville $f \equiv 0$, ein Widerspruch. □

**Satz 17.2.14** *(Fundamentalsatz der Algebra)*
*Es sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise disjunkt und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{k} n_\nu = n$, so dass*

$$P(z) = a_n \prod_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{n_\nu}, \; z \in \mathbb{C},$$

*wobei $a_n$ der Leitkoeffizient von $P$ ist.*

**Beweis.** (Per Induktion)
$n = 1 : P(z) = a_1 z + a_0 = a_1\left(z - \frac{a_0}{a_1}\right)$.
$n \mapsto n+1$ : Da $P$ nach obigem Lemma eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat, ergibt sich

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{n+1} \frac{P^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!} (z-\lambda)^\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{P^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!} (z-\lambda)^\nu = \left( \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P^{(\nu+1)}(\lambda)}{(\nu+1)!} (z-\lambda)^\nu \right) (z-\lambda). \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Induktionsvoraussetzung auf $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, Q(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{P^{(\nu+1)}(\lambda)}{(\nu+1)!} (z-\lambda)^\nu$, an, so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise disjunkt und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{\nu=1}^{k} n_\nu = n$, so dass $Q(z) = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} \prod\limits_{\nu=1}^{n} (z - \lambda_k)^{n_\nu}$. Wegen $\frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \frac{P^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} = \frac{P^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = a_{n+1}$ ergibt sich $P(z) = a_{n+1}(z - \lambda) \prod\limits_{\nu=1}^{k} (z - \lambda_\nu)^{n_\nu}$. Existiert ein $\nu \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\lambda = \lambda_\nu$, so erhöhe $n_\nu$ um 1, andernfalls erhöhe $k$ um 1 und setze $n_{k+1} := 1$ und $\lambda_{k+1} := \lambda$. □

**Bemerkung und Definition 17.2.15** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum, $f : G \to E$ holomorph. Dann heißt $z_0 \in G$ $m$-fache Nullstelle (wobei $m \in \mathbb{N}_0$) von $f$, falls

$$f^{(\nu)}(z_0) = 0,\ 0 \leq \nu \leq m-1,\ \text{und } f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Eine $0-$fache Nullstelle $z_0$ bedeutet gerade, dass $f(z_0) \neq 0$. Hat $f$ an $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ so wähle $\varepsilon > 0$ mit $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu, |z - z_0| < \varepsilon$. Ist $g : U_\varepsilon(z_0) \to E, g(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu+m)}(z_0)}{(\nu+m)!}(z - z_0)^\nu$, so ist $g$ holomorph auf $U_\varepsilon(z_0), g(z_0) \neq 0$, und es gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),\ z \in U_\varepsilon(z_0).$$

Nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > 0$ können wir aufgrund der Stetigkeit von $g$ annehmen, dass $g(z) \neq 0, z \in U_\varepsilon(z_0)$. Insbesondere besitzt dann $f$ **keine** Nullstelle in $U_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$.
Betrachten wir die Funktion

$$h : G \to E,\ h(z) = \begin{cases} g(z) & : z \in U_\varepsilon(z_0) \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m} & : z \in G \backslash \{0\}, \end{cases}$$

so ist $h$ wohldefiniert und holomorph auf $G$, und es gilt

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} & : z = z_0 \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m} & : z \in G \backslash \{z_0\} \end{cases}$$

Der Kürze halber schreiben wir

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{anstelle von} \quad h(z).$$

**Beispiel 17.2.16** Es sei $f : G \to E$ holomorph, $z \in G$.
Dann ist auch $\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ holomorph auf $G$ (eigentlich hätte man schreiben müssen

$$\xi \mapsto \begin{cases} f'(z) & : \xi = z \\ \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & : \xi \in G \backslash \{z\}\ ). \end{cases}$$

**Satz/Definition 17.2.17** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum und $f : G \to E$ holomorph und nicht identisch 0. Dann hat

$$N_f := \{z \in G : f(z) = 0\},$$

die Menge aller Nullstellen von $f$ in $G$, keinen Häufungspunkt in $G$.

**Beweis.** Per definitionem ist

$$H(N_f) = \{w \in G : \big(U_\varepsilon(w)\backslash\{w\}\big) \cap N_f \neq \emptyset \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

die Menge aller Häufungspunkte von $N_f$. Da $f$ stetig, gilt $H(N_f) \subset \overline{N}_f^{(G,d_{|\cdot|})} = N_f$, jedes $w_0 \in H(N_f)$ ist also auch eine Nullstelle von $f$.
Nach A 13.2 ist $H(N_f)$ abgeschlossen in $(G, d_{|\cdot|})$. Es sei $w_0 \in H(N_f)$. Nach obiger Bemerkung existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $f|_{U_\varepsilon(w_0)} \equiv 0$, also ist $U_\varepsilon(w_0) \subset H(N_f)$, also ist $H(N_f)$ auch offen in $(G, d|\cdot|)$. Da $G$ zusammenhängend ist, muss also $H(N_f) = \emptyset$ oder $H(N_f) = G$ gelten. Da $H(N_f) \subset N_f \subset G$, führt der zweite Fall zu $f \equiv 0$ auf $G$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $H(N_f) = \emptyset$, und dies ist die Behauptung. □

**Bemerkung 17.2.18** Wir beachten, dass im Falle $G \neq \mathbb{C}$ ein holomorphes und nicht konstantes $f : G \to E$ sehr wohl Häufungspunkte in $\mathbb{C}$ haben kann. Ein Beispiel ist $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Hier ist $N_f = \left\{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Korollar 17.2.19** *(Idenditätssatz)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum und $f, g : G \to E$ holomorphe Funktionen. Stimmen $f$ und $g$ auf einer Teilmenge $A$ von $G$ überein, welche einen Häufungspunkt in $G$ besitzt, so gilt $f = g$.*

**Beweis.** Betrachte $h = f - g$. Wir nehmen an, $h \not\equiv 0$. Nach obigem Satz hat $N_h$ keinen Häufungspunkt in $G$. Wegen $A \subset N_h$ ist $\emptyset \neq H(A) \subset H(N_h) = \emptyset$ und ist dies ein Widerspruch. □

**Satz 17.2.20** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von $f - f(z_0)$.*
*Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion $\varphi : U_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$, so dass $f(z) = f(z_0) + \varphi^m(z), z \in U_\varepsilon(z_0)$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $f(z_0) = 0$, ansonsten betrachte im Folgenden $f - f(z_0)$. Es sei $g := \frac{f}{(z-z_0)^m}$, dann ist nach 17.2.14 $g$ holomorph auf $G$ und es gilt $g(z_0) \neq 0$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $g$ keine Nullstelle in $U_\varepsilon(z_0)$ hat. Dann existiert eine holomorphe Funktion $h : U_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $e^{h(z)} = g(z),\ |z - z_0| < \varepsilon$. Es sei $\varphi : U_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C},\ \varphi(z) = (z - z_0)e^{\frac{h(z)}{m}}$.
Dann gilt

$$\varphi^m(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z),\ |z - z_0| < \varepsilon,$$

sowie $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) = e^{\frac{h(z_0)}{m}} \neq 0$. □

**Satz 17.2.21** *(Gebietstreue holomorpher Funktionen)*
*Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.*

**Beweis.** Da $f$ stetig und $G$ zusammenhängend ist, ist auch $f(G)$ zusammenhängend. Sei $z_0 \in G$, $w_0 := f(z_0)$ sowie $\varepsilon$ und $\varphi$ wie im obigen Satz (da $f$ nicht konstant, hat $f - w_0$ endliche Nullstellenordnung $m \in \mathbb{N}$ an $z_0$). Wegen $\varphi'(z_0) \neq 0$ können wir nach dem Satz über die Umkehrfunktion nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon$ annehmen, dass $\varphi$ bijektiv und $\varphi\big(U_\varepsilon(z_0)\big)$ offen ist. Wähle $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subset \varphi\big(U_\varepsilon(z_0)\big)$. Da $w \mapsto w^m$ von $U_\delta(0)$ nach $U_{\delta^m}(0)$ surjektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} U_{\delta^m}\big(f(z_0)\big) &\subset f(z_0) + \varphi^m\big(U_\varepsilon(z_0)\big) \\ &= f\big(U_\varepsilon(z_0)\big) \subset f(G). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 17.2.22** i) Nebenbei zeigt obiger Beweis: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, für welche $f - f(z_0)$

an $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ hat, so existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ (im obigen Beweis ist dies $\delta^m$), so dass $\{z \in U_\varepsilon(z_0) : f(z) = w\}$ für jedes $w \in U_\delta(f(z_0)) \setminus \{f(z_0)\}$ genau $m$ Elemente hat.
ii) Obiger Satz hat für (beliebig oft differenzierbare) reelle Funktionen kein Analogon, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, zeigt: Hier ist $\mathbb{R}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) aber $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ ist nicht offen.

**Satz 17.2.23** *(Maximumprinzip, negative Formulierung)*
*Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*
*Hat $|f|$ ein lokales Maximum in $G$, so ist $f$ konstant.*

**Beweis.** Es sei $z_0$ eine lokale Maximalstelle von $|f|$, wähle $\varepsilon > 0$ mit $\big|f(z_0)| \geq |f(z)\big|, z \in U_\varepsilon(z_0)$. Nehmen wir an, $f$ sei nicht konstant. Dann ist $\big|f(z_0)\big| \neq 0$ und $f\big(U_\varepsilon(z_0)\big)$ ein Gebiet, also insbesondere existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta\big(f(z_0)\big) \subset f\big(U_\varepsilon(z_0)\big)$. Also existiert ein $z_1 \in U_\varepsilon(z_0)$ mit $f(z_1) = f(z_0) + \frac{\delta}{2} \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|}$ $(\in U_\delta\big(f(z_0)\big)$.
Dann gilt $\big|f(z_1)\big| > \big|f(z_0)\big|$, Widerspruch. □

**Bemerkung 17.2.24** Der Satz gilt im Allgemeinen nicht, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen vollständigen normierten Raum über $\mathbb{C}$ ersetzt: Es sei $f : \mathbb{D} \to (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty), f(z) = (1, z)$. Dann ist $f$ offensichtlich nicht konstant, aber $\|f(z)\|_\infty = 1, z \in \mathbb{D}$.

**Satz 17.2.25** *(Maximumprinzip, positive Formulierung)*
*Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph.*
*Dann existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit $\big|f(z_0)\big| = \sup\limits_{z \in \overline{G}} |f(z)|$.*

**Beweis.** Da $\overline{G}$ kompakt und $|f|$ stetig, nimmt $|f|$ sein Maximum in $\overline{G}$ an, d. h. es existiert $z_0 \in \overline{G}$ mit $\big|f(z_0)\big| = \max\limits_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \sup\limits_{z \in \overline{G}} |f(z)|$.
Nach dem Maximumprinzip ist $z_0 \notin G$, also $z_0 \in \partial G$. □

# Kapitel 18

# Isolierte Singularitäten und der Residuensatz

## 18.1 Die CIF für Kreisringe

Wir benötigen eine Version der CIF für Gebiete der Form
$G = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ mit $0 < r < R$. Etwas allgemeiner zeigen wir:

**Satz 18.1.1** *(Die CIF für Kreisringe) Es seien $G$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum, weiter seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $R, r > 0$, mit $|z_1 - z_0| < R$ und $0 < r < R - |z_0 - z_1|$, so dass*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \geq r,\ |z - z_0| \leq R\} \subset G.$$

*Ist $f : G \to E$ holomorph, so gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_1| > r$ und $|z - z_0| < R$, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|\xi - z_0| = R\}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|\xi - z_1| = r\}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

**Beweis.** Es sei $g : G \to E$, $g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & : \xi \neq z \\ f'(z) & : \xi = z. \end{cases}$
Dann ist $g$ nach 17.2.15 holomorph und mit 17.2.1 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} g(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_1| = r} g(\xi)\, d\xi = 0.$$

Wegen $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(z)}{\xi - z}$ folgt also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_1| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\ = \; & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_1| = r} \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\xi \\ = \; & f(z) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi \; - \; 0 \\ = \; & f(z). \end{aligned}$$

□

**Satz 18.1.2** *Es seien* $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq r < \rho < R$, $E$ *ein vollständiger normierter Raum über* $\mathbb{C}$ *und* $f : \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \to E$ *holomorph. Ist für* $\nu \in \mathbb{Z}$

$$a_\nu := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}}\, d\xi,$$

*so gilt* $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, r < |z - z_0| < R$, *wobei für alle* $r < r' < R' < R$ *die Konvergenz auf* $\{z \in \mathbb{C} : r' \leq |z - z_0| \leq R'\}$ *gleichmäßig ist.*

**Beweis.** Es sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Da alle Kurven $[0, 2\pi] \to G, t \mapsto \rho e^{it}$ für $\rho \in (r, R)$ homotop in $G$ sind, sind die $a_\nu$ unabhängig von $\rho \in (r, R)$ definiert.
Für $r < \rho < R$ schätzen wir ab:

$$\|a_\nu\|_E \leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{\nu+1}}\, d\xi \right\|_E \leq \frac{1}{\rho^\nu} \sup_{|\xi| = \rho} \left\| f(\xi) \right\|_E.$$

Dies impliziert, dass $\limsup\limits_{\nu \to +\infty} \sqrt[\nu]{\|a_\nu\|_E} \leq \frac{1}{R}$ und $\limsup\limits_{\nu \to +\infty} \sqrt[\nu]{\|a_{-\nu}\|_E} \leq r$.
Dies liefert schon mal, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} z^\nu,$$

lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{r}\}$ konvergiert. Also konvergiert auch $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu$ lokal gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.
Mit der CIF für Kreisringe erhalten wir für $r < r' < |z| < R' < R$, dass

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Big(\frac{1}{z}\Big)^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R'} \frac{f(\xi)}{\xi^{\nu+1}}\, d\xi \right) z^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi^{1-\nu}}\, d\xi \right) \Big(\frac{1}{z}\Big)^\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R'} f(\xi) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\xi^{\nu+1}}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r'} f(\xi) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{\nu-1}}{z^\nu}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=R'} f(\xi)\, \frac{1}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r'} f(\xi)\, \frac{1}{z - \xi}\, d\xi$$

$$= f(z).$$

□

**Bemerkung 18.1.3** i) Obige Entwicklung von $f$ heißt Laurententwicklung, hierbei heißt $\sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu (z-z_0)^\nu$ der Hauptteil und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ der Nebenteil der Entwicklung.
Die Laurententwicklung ist eine Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung: Ist nämlich $f$ holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, so ist mit $0 < \rho < R$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{\nu+1}}\, d\xi = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

nach 17.2.6.
Wegen des CIS ist dann

$$a_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\rho} f(\xi)\xi^{\nu-1}\, d\xi = 0, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

und die Laurententwicklung fällt mit der Potenzreihenentwicklung zusammen.

ii) Die Laurententwicklung zeigt, dass es jeder holomorphen Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \to E$ holomorphe Funktionen $f_1 : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \to E$ und $f_2 : \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ (mit $\lim_{|z| \to \infty} f_2(z) = 0$), existieren, wobei $f_1$ durch den Nebenteil und $f_2$ durch den Hauptteil gegeben ist, so dass $f(z) = f_1(z) + f_2(z),\ r < |z - z_0| < R$.

iii) Man kann eine Laurententwicklung folgendermaßen berechnen: Es sei $f$ holomorph im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Man schreibe $f(z) = g(z - z_0) + h(\frac{1}{z-z_0})$ mit $g : \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \to E$ und $h : \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{r}\}$ holomorph und $h(0) = 0$. Dann entwickle man $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ und $h(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu$ an der Stelle 0 in Potenzreihen. Dann ist

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (z - z_0)^{-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

die Laurententwicklung von $f$ an $z_0$.

**Beispiel 18.1.4** Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} - 1$. Dann gilt $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\nu|!} z^\nu,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Mit Hilfe der Laurententwicklung können wir jetzt das folgende erstaunliche Ergebnis beweisen.

**Satz 18.1.5** *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
*Es sei $G$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \to E$ holomorph, so dass $f$ in einer Umgebung von $z_0$ beschränkt ist (d. h. $\limsup\limits_{z \to z_0} \|f(z)\|_E < +\infty$).*
*Dann ist $f$ die Einschränkung einer auf ganz $G$ holomorphen Abbildung.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$, und es sei $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \subset G$. Es folgt

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu z^\nu, \quad 0 < |z| < R.$$

Wegen $\|a_{-\nu}\|_E \leq \sup_{|\xi|=\varepsilon} \|f(\xi)\|_E \, \varepsilon^\nu \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ ist $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,\ 0 < |z| < R$, also ist $f$ die Einschränkung der holomorphen Funktion

$$g : G \to E, \quad g(z) = \begin{cases} f(z) & : z \in G \setminus \{0\} \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu & : |z| < R. \end{cases}$$

□

## 18.2 Isolierte Singularitäten

**Bemerkung und Definition 18.2.1** Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $E$ ein vollständiger normierter Raum. Ist $f : G\backslash\{z_0\} \to E$ holomorph, so heißt $z_0$ isolierte Singularität von $f$. Ist $R := \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, so hat $f$ in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$ eine Laurententwicklung $f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$. Dann heißt $z_0$

1. Hebbare Singularität, falls $a_{-\nu} = 0, \nu \in \mathbb{N}$,

2. Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_{-\nu} = 0$ für $\nu > p$, und

3. Wesentliche Singularität, falls $a_{-\nu} \neq 0$ für unendlich viele $\nu \in \mathbb{N}$.

**Bemerkung 18.2.2** i) Der Riemannsche Hebbarkeitssatz besagt gerade, dass die Beschränktheit in der Nähe von $z_0$ ausreicht zu garantieren, dass $z_0$ eine hebbare Singularität ist. Im Folgenden setzen wir im Falle einer hebbaren Singularität die Funktion einfach fort, d. h. wir identifizieren in diesem Fall $f : G \setminus \{z_0\} \to E$ mit der auf ganz $G$ holomorphen Funktion
$$F : G \to E,\ F(z) = \begin{cases} \lim\limits_{w \to z_0} f(w) & : z = z_0 \\ f(z) & : z \neq z_0. \end{cases}$$
ii) $f$ hat genau dann einen Pol an $z_0$, wenn ein Polynom $p : \mathbb{C} \to E$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to E$ (definiert auf einer Umgebung $U$ von $z_0$) existiert mit $f(z) = p(\frac{1}{z-z_0}) + g(z),\ z \in U$.

**Beispiel 18.2.3** a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Dann hat $f$ an 0 eine hebbare Singularität.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = e^z + \frac{1}{(1-z)^2}$. Dann hat $f$ an 1 einen Pol der Ordnung 2.

c) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Dann hat $f$ an 0 eine wesentliche Singularität.

Wir haben ja durch den Riemannschen Hebbarkeitssatz hebbare Singularitäten charaktiersiert, wir wollen Ähnliches auch für die anderen Typen finden.

**Satz 18.2.4** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : G\backslash\{z_0\} \to E$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

*i) $f$ hat an $z_0$ einen Pol der Ordnung $p$.*

*ii) Es existiert $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}, \quad z \in G\backslash\big(\{z_0\}\big).$$

*Ist $E = \mathbb{C}$, so ist ebenso äquivalent:*

*iii) $\frac{1}{f}$ ist auf einer geeigneten Umgebung $U$ von $z_0$ Einschränkung einer holomorphen Funktion $g$, welche an $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ hat.*

**Beweis.** i) $\Leftrightarrow$ ii) Es habe $f$ an $z_0$ einen Pol der Ordnung $p$. Wir setzen $\widetilde{g} : G\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{g}(z) = (z - z_0)^p f(z)$.
Ist $\sum\limits_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^p$ die Laurententwicklung von $f$ an $z_0$, so gilt also

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}(z - z_0)^\nu.$$

Somit kann $\widetilde{g}$ zu einer holomorphen Funktion $g$ mit den gewünschten Eigenschaften fortgesetzt werden.
Ist umgekehrt $g$ wie in ii), so hat wegen $g(z_0) \neq 0$ die Funktion $f$ an $z_0$ offensichtlich einen Pol der Ordnung $p$.
ii) $\Rightarrow$ iii) Es sei $U$ eine offene Umgebung von $z_0$, so dass das $g$ aus ii) keine Nullstelle in $U$ hat. Dann gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p \, \frac{1}{g(z)},$$

somit kann $\frac{1}{f}$ nach $z_0$ holomorph fortgesetzt werden, und diese Funktion hat an $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $p$.

iii) $\Rightarrow$ i) Ist $U$ eine Umgebung von $z_0$ und $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle in $U$ und $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^p}{g(z)}, z \in U \backslash \{z_0\}$, so gilt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, (z-z_0)^\nu$ die Potenzreihenentwicklung von $g$, so gilt $f(z) = \sum\limits_{\nu=-p}^{\infty} a_{\nu+p} \, (z-z_0)^\nu$, wegen $a_0 \neq 0$ hat also $f$ einen Pol der Ordnung $p$. $\square$

**Korollar 18.2.5** *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, so hat $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ an $z_0$ genau dann einen Pol, wenn $\lim\limits_{z-z_0} |f(z)| = +\infty$.*

**Beweis.** Hat $f$ an $z_0$ einen Pol der Ordnung $p$, so gilt mit $g(z) := (z - z_0)^p \, f(z)$, dass (siehe oben) $g$ holomorph nach ganz $G$ fortgesetzt werden kann und für die Fortsetzung gilt dann $g(z_0) \neq 0$.
Es folgt

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^p} \, |g(z)| = \infty,$$

ist umgekehrt $|f(z)| \to +\infty, (z \to z_0)$, so existiert eine offene Umgebung $U$ von $z_0$ mit $f(z) \neq 0, z \in U$, und daher $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Also ist mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz $z_0$ eine hebbare Singularität, und somit hat $\frac{1}{f}$ an $z_0$ eine Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$.
Mit Bedingung iii) aus obigem Satz folgt, dass $f$ selbst einen Pol der Ordnung $p$ hat. $\square$

**Beispiel 18.2.6** Es sei

$$\tan : \mathbb{C} \backslash (\mathbb{Z}\pi + \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{C},$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\cot : \mathbb{C} \backslash (\mathbb{Z}\pi) \to \mathbb{C},$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Die Nullstellen von tan sind gerade die Nullstellen von sin, diese sind alle einfach, und ergo hat $\cot = \frac{1}{\tan}$ Pole der Ordnung 1 an $z_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Analog gilt: Die Nullstellen von cot sind gerade die Nullstellen von sin, diese sind alle einfach, und ergo hat $\tan = \frac{1}{\cot}$ Pole der Ordnung 1 an $z_0 = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Wir charakterisieren nun das Verhalten in der Nähe von wesentlichen Singularitäten.

**Satz 18.2.7** *(Casorati-Weierstraß)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. $z_0 \in G$ und $f : G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:*

*i) $f$ hat eine wesentliche Singularität.*

*ii) Für alle offenen Umgebungen $U \subset G$ von $z_0$ gilt $\overline{f(U\backslash\{z_0\})} = \mathbb{C}$.*

*(Man kann zeigen, dass dies auch zu Folgenden äquivalent ist: Es existiert $w_0 \in \mathbb{C}$ so dass $f(U \setminus \{z_0\}) \supset \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ für alle Umgebungen $U$ von $z_0$. Dies ist der sogenannte große Satz von Picard.)*

**Beweis.** ii) $\Rightarrow$ i) Aus ii) folgt sofort, dass $z_0$ weder eine hebbare Singularität (verwende den Riemannschen Hebbarkeitssatz) noch einen Pol (verwende obiges Korollar) hat.
i) $\Rightarrow$ ii) Wir nehmen an, es existiert eine offene Umgebung $U$ von $z_0$ mit $\overline{f(U\backslash\{z_0\})} \neq \mathbb{C}$.
Dann existieren $w \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$ mit $|f(z) - w| \geq \delta, z \in U\backslash\{z_0\}$. Es sei $g : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C},\ g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$.
Damit hat $g$ eine hebbare Singularität, also ist $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Ist $g(z_0) = 0$, so gilt

$$|f(z) - w| = \frac{1}{|g(z)|} \to \infty \quad (z \to z_0),$$

also

$$\big|f(z)\big| \to \infty \quad (z \to z_0),$$

$z_0$ ist also Pol von $f$. Widerspruch.
Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ beschränkt in einer Umgebung von $z_0$,

also ist $z_0$ hebbare Singularität von $f$, auch ein Widerspruch. $\square$

Verwenden wir die Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$, so ergibt sich

**Satz 18.2.8** *Es sei $R > 0$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Laurententwicklung $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Dann gilt*

*i)* $\limsup\limits_{|z|\to\infty} \big|f(z)\big| < +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)$ *existiert,*

*ii)* $\lim\limits_{|z|\to\infty} \big|f(z)\big| = +\infty \Leftrightarrow \exists\,\text{Polynom } p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ mit } f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} a_\nu z^\nu + p(z)$,

*iii)* $\overline{f\big(\{z : |z| \geq \rho\}\big)} = \mathbb{C}$ *für alle* $\rho > R \Leftrightarrow$ *Es existieren unendlich viele* $\nu \in \mathbb{N}$ *mit* $a_\nu \neq 0$.

**Beispiel 18.2.9** $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh$ sind alle vom Typ iii)! Ist ein beliebiges $0 \neq w \in \mathbb{C}$ gegeben, so schreibe $w = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. und setze $z_n := \log r + i(\varphi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|z_n| \to \infty$ und $z_n = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist nicht zufällig so, der sogenannte große Satz von Picard sagt nämlich aus, dass im Falle iii) ein $w_0 \in \mathbb{C}$ existiert mit $f\big(\{z : |z| \geq \rho\}\big) \supset \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$.

## 18.3 Die allgemeine Cauchysche Integralformel

Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, und es sei $M \subset X$. Für $x \in M$ heißt

$$Z_M(x) := \bigcup \{A \subset M : A \text{ ist zusammenhängend und } x \in A\}$$

die Zusammenhangskomponente von $M$ bezüglich $x$.
Man sieht leicht, dass $Z_M(x)$ zusammenhängend, und für $x, y \in M$ gilt entweder $Z_M(x) = Z_M(y)$ oder $Z_M(x) \cap Z_M(y) = \emptyset$.
Damit ist $M$ die disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.
Ist $G \subset \mathbb{C}$ offen, so hat $G$ höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, und diese sind alle Gebiete.
Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so hat $K^c$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.
Für alle diese Aussagen siehe Übung 5.

**Beispiel 18.3.1** Es sei $K = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{8}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{8}\right\}$.
Dann zerfällt $K^c$ in vier Zusammenhangskomponenten

$$\{z : |z| > 2\},\ \left\{z : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{8}\right\},\ \left\{z : |z - \frac{i}{2}| < \frac{1}{8}\right\}$$

und

$$\left\{z : |z| < 1,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{8},\ |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{8}\right\}.$$

**Definition 18.3.2** Es seien $\gamma_\nu : [\alpha_\nu, \beta_\nu] \to \mathbb{C},\ 1 \leq \nu \leq n$, stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven.
Wir setzen $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma$ heißt dann Zykel. Weiter sei $|\gamma| := \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} |\gamma_\nu|$ und $f : |\gamma| \to E$ stetig, wobei $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ sei. Dann setzen wir

$$\int\limits_\gamma f(z)\, dz := \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\gamma_\nu} f(z)\, dz.$$

Ist $\gamma$ ein Zykel, so heißt $\operatorname{ind}_\gamma : \mathbb{C}\backslash|\gamma| \to \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$

der Index von $\gamma$.

**Bemerkung 18.3.3** i) Ist $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ein Zykel in $\mathbb{C}$, so gilt

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{ind}_{\gamma_\nu}(z),\ z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|,$$

und ist $\gamma^- = (\gamma_1^-, \ldots, \gamma_n^-)$ mit $\gamma_\nu^- : [\alpha_\nu, \beta_\nu] \to C, \gamma_\nu^-(t) = \gamma_\nu(\alpha_\nu + \beta_\nu - t)$, so gilt

$$\operatorname{ind}_{\gamma^-} = -\operatorname{ind}_\gamma.$$

ii) Mit der Analytizität Cauchyscher Integrale ist der Index holomorph auf $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$.
iii) Der Index von $\gamma$ an der Stelle $z$ gibt an wie häufig $\gamma$ im positiven Sinn um $z$ herumläuft.
Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$, und dass der Index konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ ist. Dazu benötigen wir

**Lemma 18.3.4** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstelle. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ mit $\gamma(\alpha) =: z_0, \gamma(\beta) =: z_1$*

$$f(z_1) = f(z_0) \exp\Big( \int\limits_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi \Big).$$

**Beweis.** Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ und eine Unterteilung $\alpha = t_0 < \ldots < t_m = \beta$ von $[\alpha, \beta]$, so dass

i) $U_\varepsilon\big(\gamma(t_\nu)\big) \subset G, 1 \le \nu \le m,$

ii) $\gamma\big([t_{\nu-1}, t_\nu]\big) \subset U_\varepsilon\big(\gamma(t_\nu)\big),$

siehe den Beweis von 16.3.15.
Dann besitzen die Funktionen $g_\nu : U_\varepsilon\big(\gamma(t_\nu)\big) \to \mathbb{C}, g_\nu(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, Stammfunktionen $f_\nu$ in $U_\varepsilon\big(\gamma(t_\nu)\big)$, für die $e^{f_\nu} = f|_{U_\varepsilon(\gamma(t_\nu))}$ gilt. Es folgt also

$$\begin{aligned}
\exp\Big( \int\limits_{\gamma|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \Big) &= \exp\Big( \int\limits_{\gamma|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}} g_\nu(z)\, dz \Big) \\
&= \exp\big( f_\nu\big(\gamma(t_\nu)\big)\big) - f_\nu\big(\gamma(t_{\nu-1})\big) = \frac{e^{f_\nu\left(\gamma(t_\nu)\right)}}{e^{f_\nu\left(\gamma(t_{\nu-1})\right)}} \\
&= \frac{f\big(\gamma(t_\nu)\big)}{f\big(\gamma(t_{\nu-1})\big)}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\exp\Big( \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \Big) = \exp\Big( \sum_{\nu=1}^m \int\limits_{\gamma|_{[t_\nu, t_{\nu-1}]}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \Big)$$

$$= \prod_{\nu=1}^m \exp\Big( \int\limits_{\gamma|_{[t_\nu, t_{\nu-1}]}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \Big) = \prod_{\nu=1}^m \frac{f\big(\gamma(t_\nu)\big)}{f\big(\gamma(t_{\nu-1})\big)} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}.$$

□

**Korollar 18.3.5** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstelle. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$, dass*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis.** nach dem obigen Lemma ist $\exp\Big(\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\Big) = \frac{f(\gamma(\alpha))}{f(\gamma(\alpha))} = 1$, also ist (siehe Satz 5.4.5) $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

**Satz 18.3.6** *Es sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ein Zykel in $\mathbb{C}$.*
*Dann ist* $\mathrm{ind}_\gamma$ *auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ konstant und nimmt nur Werte aus $\mathbb{Z}$ an. Auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ ist* $\mathrm{ind}_\gamma \equiv 0$.

**Beweis.** Wenden wir obiges Korollar auf $f(\xi) = (\xi - z)$ an, so folgt $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$.
Es sei $G$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ und $z_0 \in G$. Dann ist $\mathrm{ind}_\gamma : G \to \mathbb{C}$ stetig, also ist mit $k := \mathrm{ind}_\gamma(z_0)$

$$A := (\mathrm{ind}_\gamma)^{-1}(\{k\}) = (\mathrm{ind}_\gamma)^{-1}\big(\{k + z : |z| < 1\}\big)$$

nicht leer, abgeschlossen und offen in $G$. Da $G$ zusammenhängend, gilt $A = G$. Der letzte Teil folgt aus $\mathrm{ind}_\gamma(z) \to 0, |z| \to \infty$. □

**Bemerkung 18.3.7** Wir kommen auf das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ später zurück, es zählt nämlich unter gewissen Voraussetzungen die Nullstellen und Pole von $f$.

Wir benötigen noch ein Lemma (vergleiche 9.4.12 für den reellen Fall):

**Lemma 18.3.8** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : G \to E$ holomorph. Dann ist*

$$g : G \times G \to E, \quad g(w, z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & : \ w \neq z \\ f'(w) & : \ w = z \end{cases}$$

*stetig.*

**Beweis.** Sei dazu $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$.
Wähle $R > 0$ mit $U_R(z_0) \subset G$ und $\left\| f'(z) - f'(z_0) \right\|_E < \varepsilon, z \in U_R(z_0)$. Sind $z_1, z_2 \in U_R(z_0)$, so sei $\gamma(t) = (1-t)\, z_1 + t z_2$.
Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) &= \frac{f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))}{z_2 - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \frac{1}{z_2 - z_1} \int_0^1 f'(\gamma(t))(z_2 - z_1)dt = \int_0^1 f'(\gamma(t))dt, \end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned} &\left\| g(z_1, z_2) - g(z_0, z_0) \right\|_E \\ &= \left\| \int_0^1 f'\big(\gamma(t)\big) - f'(z_0)\, dt \right\|_E \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $g$ an allen $(z_0, z_0) \in G \times G$ stetig. Die Stetigkeit an allen anderen Punkten von $G \times G$ ist trivial. □

**Satz 18.3.9** *(Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma$ ein Zykel in $\mathbb{C}$ mit $|\gamma| \subset G$, $E \neq \{0\}$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

*i) Für alle $f : G \to E$ holomorph gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

*ii) Für alle $f : G \to E$ holomorph gilt*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in G \backslash |\gamma|,$$

*(der Fall $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ ist natürlich interessant!).*

*iii) Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash G$ ist* $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$.

**Beweis.** i) $\Rightarrow$ ii). Da $h(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$holomorph in $G$, gilt

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,dz - f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z), \quad z \in G\backslash|\gamma|.$$

ii) $\Rightarrow$ i). Es gelte ii) für ein festes $z \in G\backslash|\gamma|$. Dann gilt mit $h(\xi) = (\xi - z)f(\xi)$, dass

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{h(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\xi)\,d\xi.$$

i) $\Rightarrow$ iii) ist trivial, da für $a_0 \in E\backslash\{0\}$ und $z \in \mathbb{C}\backslash G$ die Abbildung

$$f : G \to E, \quad f(\xi) = \frac{a_0}{\xi - z}$$

holomorph ist und $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\xi)\,d\xi = a_0 \operatorname{ind}_\gamma(z)$ gilt.

Komplizierter ist „iii) $\Rightarrow$ ii)“ (nach Dixon).

Da zu bemerken wir zunächst, dass nach obigem Lemma die Funktion

$$g : G \times G \to E, \quad g(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & : \ w \neq z \\ f'(w) & : \ w = z \end{cases}$$

stetig in $G \times G$ ist. Also ist $h : G \to E, h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma g(\xi, z)\,d\xi$, definiert und mit 17.2.10 ist $h$ holomorph.

Es sei $\widetilde{G} := \{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| : \operatorname{ind}_\gamma(z) = 0\}$. Dann ist

$$\widetilde{h} : \widetilde{G} \to E, \quad \widetilde{h}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

holomorph als Cauchysches Integral und $\lim\limits_{|z|\to\infty} \widetilde{h}(z) = 0$.

Aufgrund der Voraussetzung ist $\widetilde{G} \cup G = \mathbb{C}$. Können wir also zeigen, dass $h$ mit $\widetilde{h}$ auf $G \cap \widetilde{G}$ übereinstimmt, so ist die anstehende Funktion mit Liouville identisch 0 und insbesondere $h = 0$. In der Tat, es gilt für $z \in G \cap \widetilde{G}$, dass

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

$$-f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{ind}_\gamma(z)=0}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \widetilde{h}(z).$$

Aus $h = 0$ in $G$ folgt nun für $z \in G \backslash |\gamma|$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - f(z) \operatorname{ind}_\gamma(z),$$

und das war zu zeigen. □

**Beispiel 18.3.10** Entscheidend für die Gültigkeit von Cauchyschen Integralformeln ist also der Index des Zykels $\gamma$.

i) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + \mathrm{Re}^{it}$. Dann ist

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0 & : |z - z_0| > R \\ 1 & : |z - z_0| < R. \end{cases}$$

In der Tat, auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$ von $|\gamma|^c$ gilt schon mal $\operatorname{ind}_\gamma = 0$ und auf der Zusammenhangskomponente $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ gilt

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{1}{\xi - z_0} d\xi = 1.$$

Somit erhalten wir unsere erste CIF für Kreise zurück.

ii) Es seien $a, b > 0$

$$\gamma : [0, 4] \to C, \;\; \gamma(t) = \begin{cases} (1-t)(a - ib) + t(a + ib) & : \; t \in [0, 1] \\ (2-t)(a + ib) + (-a + ib) & : \; t \in [1, 2] \\ (3-t)(-a + ib) + (t-2)(-a - ib) & : \; t \in [2, 3] \\ (4-t)(-a - ib) + (t-3)(a - ib) & : \; t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Dann gilt für $z \in R := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < a, |\mathrm{Im}\, z| < b\}$, der beschränkten Zusammenhangskomponente von $|\gamma|^c$, dass

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\xi} \, d\xi = 1,$$

siehe Aufgabe 9. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente $\mathbb{C} \setminus \overline{R}$ von $|\gamma|^c$ verschwindet $\operatorname{ind}_\gamma$.
Somit erhalten wir unsere Cauchysche Integralformel für Rechtecke zurück. Natürlich gilt dann die Cauchysche Integralformel auch für verschobene Rechtecke.

iii) Es sei $R > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_0(t) = z_0 + \mathrm{Re}^{it}$.
Sind $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_0}(z_\nu) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \qquad \text{und}$$
$$B_{\varepsilon_\nu}(z_\nu) \cap B_{\varepsilon_\mu}(z_\mu) = \emptyset, \quad \nu \neq \mu,$$

so setze $\gamma_\nu : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_\nu(t) = z_\nu + \varepsilon_\nu\, e^{-it}$.
Dann gilt

$$\mathrm{ind}_{\gamma_0}(z) = \begin{cases} 1 & : \ |z - z_0| < R \\ 0 & : \ |z - z_0| > r \end{cases}$$

$$\mathrm{ind}_{\gamma_\nu}(z) = \begin{cases} -1 & : \ |z - z_\nu| < \varepsilon_\nu \\ 0 & : \ |z - z_\nu| > \varepsilon_\nu. \end{cases}$$

Es folgt also mit $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{ind}_{\gamma_\nu}(z) = \begin{cases} 1 & : \ |z - z_0| < R \text{ und } |z - z_\nu| > \varepsilon_\nu, \text{ für alle } 1 \leq \nu \leq n \\ 0 & : \ |z - z_0| > R \text{ oder } |z - z_\nu| < \varepsilon_\nu, \text{ für ein } 1 \leq \nu \leq n. \end{cases}$$

Ist nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit

$$G \supset \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R, \ |z - z_\nu| \geq \varepsilon_\nu, \ 1 \leq \nu \leq n\}$$

und $f : G \to E$ holomorph, so gilt wegen $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0, z \in \mathbb{C} \backslash G$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

für alle $z$ mit $|z - z_0| < R$, $|z - z_\nu| > \varepsilon_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$.
Wir erhalten also als Spezialfall die CIF für Kreisringe zurück. Anstelle von Kreisen hätte man natürlich auch Rechtecke nehmen können.

iv) Für eine spätere Anwendung wollen wir zum Schluß noch die Cauchysche Integralformel für "Halbkreise" beweisen. Es sei dazu $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \ \gamma_1(t) = t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_2(t) = Re^{it}$ sowie $\gamma$ die Aneinanderhängung von $\gamma_1$ und $\gamma_2$. Um $\mathrm{ind}_\gamma$ zu berechnen sei zusätzlich $\sigma_1 := \gamma_1^-$ und $\sigma_2 : [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, \ \sigma_2(t) := Re^{it}$, sowie $\sigma$ als die Aneinanderhängung von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ definiert. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$, dass $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ auf $\{\xi \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(\xi) < \mathrm{Im}\,(z)\}$ holomorph ist und daher $\mathrm{ind}_\sigma(z) = 0$ nach dem CIS. Da sich die Integrale über $\gamma_1$ und $\sigma_1$ aufheben, folgt also

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_\gamma(z) &= \operatorname{ind}_\gamma(z) + \operatorname{ind}_\sigma(z)\\ &= \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z) + \operatorname{ind}_{\sigma_1}(z) + \operatorname{ind}_{\gamma_2}(z) + \operatorname{ind}_{\sigma_2}(z)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}\frac{1}{\xi - z}d\xi = 1.\end{aligned}$$

Da der Index auf der unbeschränkten Komponente von $|\gamma|^c$ verschwindet, gilt $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ oder $\operatorname{Im}(z) < 0$.

Wir wollen nun zeigen, dass es immer genügend "gute" Zykel gibt.

**Satz 18.3.11** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $K \subset G$ kompakt. Dann existiert ein Zykel $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ in $G \setminus K$ mit $ind_\gamma = 0$ auf $\mathbb{C} \setminus G$ und $ind_\gamma = 1$ auf $K$, insbesondere gilt also für alle holomorphen Funktionen $f : G \to E$ mit Werten in einem vollständigen normierten Raum über $\mathbb{C}$, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,\ \ z \in K.$$

**Beweis.** (in Form einer Märchenstunde) Es sei $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial G))(> 0)$. Legt man über $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleles Gitter aus kompakten Quadraten der Seitenlänge $d$ so, dass $0 < \sqrt{2}d < \delta$ gilt, so existieren aufgrund der Kompaktheit von $K$ nur endlich viele Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$, welche mit $K$ nichtleeren Schnitt haben. Nach Definition gilt also $K \subset \cup_{1\le\nu\le N} Q_\nu \subset G$, wobei die letzte Inklusion aus $Q_\nu \subset U_\delta(z) \subset G$ für $z \in K \cap Q_\nu$ folgt.
Wir betrachten nun die Strecken $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, die zum Rand $\partial Q_\nu$ *genau* eines Quadrates $Q_\nu$ gehören (und also nicht zwei verschiedene Quadrate treffen). Sind die Ränder $\partial Q_\nu$ der Quadrate positiv orientiert parametrisiert (siehe ii)), so ergibt sich damit eine Parametrisierung der $\gamma_j$. Wir setzen $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Nach Definition der $\gamma_j$ ist

$$|\gamma| \subset G \setminus K$$

(wäre nämlich $z \in K \cap |\gamma_j|$, so hätten an diese Strecke angrenzende Quadrate gemeinsame Punkte mit $K$, Widerspruch zur Definition der $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$).
Ist $z \in \mathbb{C} \setminus G$ so gilt (da jede Seite, die zum Rand zweier der Quadrate $Q_1, \ldots, Q_N$ gehört, entgegengesetzt durchlaufen wird),

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}_{\gamma_j}(z) = \sum_{\nu=1}^N \operatorname{ind}_{Q_\nu}(z) = 0.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{ind}_\gamma = 1$ auf $K$. Sei $1 \leq \nu_0 \leq N$ und es sei zunächst $z$ aus dem Inneren von $Q_{\nu_0}$. Dann gilt

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_{\gamma_j}(z) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{ind}_{Q_\nu}(z) = \mathrm{ind}_{Q_{\nu_0}} = 1.$$

Da $\mathrm{ind}_\gamma$ auf : $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ stetig ist, ergibt sich hiermit auch, dass $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ für alle $z \in Q_{\nu_0} \setminus |\gamma|$. Insgesamt folgt

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1,\ z \in \bigcup_{1 \leq \nu \leq N} Q_\nu \setminus |\gamma| \supset K.$$

$\square$

## 18.4 Residuensatz, Prinzip des Argumentes, Satz von Rouché

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f$ heißt meromorph auf $G$, falls eine Menge $A \subset G$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

i) $A$ hat keinen Häufungspunkt in $G$.

ii) $f : G \backslash A \to E$ ist definiert und holomorph.

iii) $f$ hat an jedem $z_0 \in A$ einen Pol.

**Bemerkung 18.4.1** i) Wir haben lax geschrieben, $f$ sei eine Funktion. Formal korrekt müsste man von Paaren $(f, A)$ sprechen, da ja $f$ nicht auf $A$ definiert ist.

ii) Hat $A \subset G$ keinen Häufungspunkt in $G$, so ist $A$ höchstens abzählbar, und für alle $a \in A$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \backslash \{a\} \subset G \backslash A$.

**Bemerkung und Definition 18.4.2** Es sei $f : U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to E$ holomorph und $f(z) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ sei die Laurententwicklung von $f$ an $z_0$. Dann heißt (für $0 < r < \varepsilon$)

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$$

das Residuum von $f$ an $z_0$.

**Satz 18.4.3** *(Residuensatz) Es sei $f$ eine auf dem Gebiet $G$ meromorphe Funktion mit Werten in dem vollständigen normierten Raum $E$. Sei $A \subset G$ die Menge der Polstellen von $f$.*
*Ist $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ein Zykel in $G \backslash A$ mit $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0, z \in \mathbb{C} \backslash G$, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{a \in A} \mathrm{ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f, a).$$

**Beweis.** Wir stellen zunächst fest, dass nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind: Weil $\widetilde{G} := \{z \in \mathbb{C} \backslash |\gamma| : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}$ und $B := \{z \in \mathbb{C} \backslash |\gamma| : \mathrm{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$ offen sind so folgt aus $B \subset G$, dass $\mathbb{C} \backslash \widetilde{G} = B \cup \big(\mathbb{C} \backslash |\gamma|\big)$ ein kompakte Teilmenge von $G$ ist. Also existieren nur endlich viele $a_1, \ldots, a_m \in A$ mit $\mathrm{ind}_\gamma(a_\nu) \neq 0$.
Es sei $\sum\limits_{k=-p_\nu}^{\infty} \alpha_k^{(\nu)} (z - a_\nu)^k$ die Laurententwicklung von $f$ an $a_\nu, 1 \leq \nu \leq m$.
Da $z \mapsto \sum\limits_{k \leq -2} \alpha_k^{(\nu)} (z - a_\nu)^k$ eine Stammfunktion auf $G \backslash \{a_\nu\}$ besitzt, verschwinden alle Integrale

$$\int_{\gamma_l} \sum_{k \leq -2} \alpha_k^{(\nu)} (z - a_\nu)^k \, dz, \; 1 \leq l \leq n, \; 1 \leq \nu \leq m$$

also auch

$$\int_\gamma \sum_{k \leq -2} \alpha_k^{(\nu)} (z - a_\nu)^k \, dz, \; 1 \leq \nu \leq m.$$

Daher gilt nach der CIF

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k \leq -1} \alpha_k^{(\nu)} (z - a_\nu)^k \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{-1}^{(\nu)} \frac{1}{(z - a_\nu)} \, dz = \sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{ind}_\gamma(a_\nu) \operatorname{Res}(f, a_\nu).$$

Da $z \mapsto f(z) - \sum\limits_{\nu=1}^{m} \sum\limits_{k=-p_\nu}^{-1} \alpha_k^{(\nu)}(z-a_\nu)^k$ holomorph in $(G \backslash A) \cup \{a_1, \ldots, a_n\} =:$ $\widehat{G}$ ist und $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0, z \in \mathbb{C} \setminus \widehat{G}$, liefert die CIF, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z) - \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=-p_\nu}^{-1} \alpha_k^{(\nu)}(z-a_\nu)^k \, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=-p_\nu}^{-1} \alpha_k^{(\nu)}(z-a_\nu)^k \, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\, dz - \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{ind}_\gamma(a_\nu) \operatorname{Res}(f, a_\nu). \end{aligned}$$

$\square$

**Satz 18.4.4** *Es sei $\gamma$ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in einem Gebiet $G$ mit $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0, z \in \mathbb{C} \backslash G$. Weiter sei $\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}, z \in G \backslash |\gamma|$, und sei*

$$G_1 := \{z \in G : \operatorname{ind}_\gamma(z) = 1\}.$$

*i) (Prinzip des Argumentes) Ist $f$ eine meromorphe Funktion auf $G$ mit Werten in $\mathbb{C}$, ohne Null- oder Polstellen auf $|\gamma|$,*
*so gilt*

$$N_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \; (= \operatorname{ind}_{f \circ \gamma}(0)),$$

*wobei $N_f$ die Zahl der Nullstellen und $P_f$ die Zahl der Polstellen von $f$ in $G_1$ ist, jeweils* **mit** *Vielfachheiten gezählt.*
*ii) (Satz von Rouché) Sind $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$\left|f(\xi) + g(\xi)\right| < \left|f(\xi)\right| + \left|g(\xi)\right|, \; \xi \in |\gamma|,$$

*so haben $f$ und $g$ dieselbe Anzahl von Nullstellen, jeweils* **mit** *Vielfachheiten gezählt, auf $G_1$.*

**Beweis.** i) Es sei $g := \frac{f'}{f}$. Dann ist $g$ meromorph auf $G$. Es sei $A$ die Menge aller Polstellen von $g$. Nach Voraussetzung an den Index gilt mit dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz = \sum_{a\in G_1} \operatorname{Res}(g,a).$$

Ist nun $z_0 \in G_1$ Polstelle von $f$ mit Ordnung $p$, so ist $h = (z-z_0)^p f$ holomorph in der Nähe von $z_0$ und $h(z_0) \neq 0$, also gilt

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

also $\operatorname{Res}(g,z_0) = -p$. Analog zeigt man für eine Nullstelle $z_0 \in G_1$ der Ordnung $m$ von $f$, dass $\operatorname{Res}(g,z_0) = m$.
ii) Es sei $h := \frac{f}{-g}$. Da aufgrund der Bedingung $g$ (und auch $f$) nullstellenfrei auf $|\gamma|$ sind, existiert eine offene Umgebung $U \subset G$ von $|\gamma|$ mit $h|_U$ holomorph.
Wir zeigen zunächst, dass $h\big(|\gamma|\big) \subset \mathbb{C}_- := \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$.
Wir nehmen an, es existiert $\xi \in |\gamma|$ mit $h(\xi) =: \alpha \leq 0$. Dividieren wir beide Seiten der Ungleichung durch $|g(\xi)|$, so ergibt sich

$$\Big|\frac{f(\xi)}{-g(\xi)} - \frac{g(\xi)}{g(\xi)}\Big| = \frac{1}{|g(\xi)|}\Big|f(\xi)+g(\xi)\Big| < \Big|\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\Big| + \frac{|g(\xi)|}{|g(\xi)|},$$

also (wegen $\alpha < 0$) $|\alpha|+1 = |\alpha-1| < |\alpha|+1$, Widerspruch.
Da $h(|\gamma|)$ kompakt ist, können wir $U$ (wenn notwendig) so verkleinern, dass auch $h(U) \subset \mathbb{C}_-$ gilt.
Sei log der Hauptzweig des Logarithmus in $\mathbb{C}_-$ Dann ist $\log\circ h$ eine Stammfunktion von $\frac{h'}{h}$ auf $U$, also ist

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz,$$

und damit haben $f$ und $g$ dieselbe Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheiten) nach dem Teil i). □

**Bemerkung 18.4.5** Wir können natürlich in der vorausgesetzten Ungleichung "+" durch "−" ersetzen, aber man merkt sich die Ungleichung am besten so: Es gilt auf $|\gamma|$ die Dreiecksungleichung $|f+g| < |f|+|g|$ mit "<"

anstelle von "$\leq$".
Üblicherweise wird im Satz von Rouché die (stärkere) Ungleichung

$$\big|f(\xi) - g(\xi)\big| < \big|f(\xi)\big|,\ \xi \in |\gamma|,$$

vorausgesetzt, welche für die Anwendungen ausreicht.

## 18.5 Anwendungen des Residuensatzes

Um den Residuensatz anwenden zu können, bemerken wir zunächst:

**Satz 18.5.1** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$.*

*i) Hat $f : G \to E$ an $z_0$ einen Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, so ist (nach 18.2.4) $g := (z - z_0)^p f$ auf ganz $G$ holomorph, und es gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(p-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(p-1)!}\, g^{(p-1)}(z_0). \end{aligned}$$

*ii) Sind $g, h : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$, so gilt*

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{g}{h}, z_0\Big) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**Beweis.**

i) Es sei $\sum\limits_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu\,(z - z_0)^\nu$ die Laurententwicklung von $f$ an $z_0$. Dann gilt in der Nähe von $z_0$, dass

$$g(z) = \sum_{\nu=-p}^{\infty} a_\nu\,(z - z_0)^{\nu+p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}\,(z - z_0)^\nu,$$

also

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!}\, g^{(p-1)}(z_0).$$

ii) Es sei $f := \frac{g}{h}$. Dann hat $f$ einen Pol der Ordnung 1 an $z_0$. Somit gilt nach i), dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \\ &= \lim_{z\to z_0} g(z) \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.\end{aligned}$$

□

**Beispiel 18.5.2** i) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.
Dann gilt mit $g(z) = \cos z, h(z) = \sin z$, dass $g(k\pi) = (-1)^k, h(k\pi) = 0, h'(k\pi) = (-1)^k$ und damit

$$\operatorname{Res}(\cot, k\pi) = \frac{g(k\pi)}{h'(k\pi)} = 1$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Ist $f : \mathbb{C}\backslash\{i, -i\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$.
Dann sieht man mit obigem Satz sofort

$$\operatorname{Res}(f, i) = -\frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}(f, -i) = \frac{i}{2}.$$

iii) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{i, -i\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$.
Dann hat $f$ an $i$ und an $-i$ jeweils einen Pol der Ordnung 2. Es folgt mit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = (z - i)^2 f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, dass

$$\operatorname{Res}(f, i) = g'(z)\big|_i = \frac{-2}{(z + i)^3}\Big|_i = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

Analog berechnet man das Residuum von $f$ an $-i$:
Es sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = (z + i)^2 f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -i) &= g'(z)\big|_{-i} = \frac{-2}{(z - i)^3}\Big|_{-i} \\ &= \frac{-2}{(-2i)^3} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}.\end{aligned}$$

**Beispiel 18.5.3** Für $0 < r < 1$ betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\,dt.$$

Um den Residuensatz anwenden zu können, berechnen wir zuerst

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{1-r^2}{(z-r)(1-rz)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{(e^{it}-r)(1-re^{it})}\,e^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{e^{-it}(e^{it}-re^{i2t}-r+r^2e^{it})}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-re^{it}-re^{-it}+r^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

und erhalten somit aus dem Residuensatz mit $f : \mathbb{C}\backslash\left\{r, \frac{1}{r}\right\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1-r^2}{(z-r)(1-rz)}$, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt = \operatorname{Res} f(r) = 1.$$

Wir wollen nun den Residuensatz einsetzen, um Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ zu berechnen.

**Satz 18.5.4** *(Hauptmethode)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \supset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Weiter sei $A \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ endlich und $f : G\backslash A \to E$*

*holomorph, so dass*

$$\lim_{R\to\infty} R\int\limits_0^\pi \|f(Re^{it})\|_E dt = 0.$$

*Dann existiert* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ *(d.h. das Integral existiert im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes), und es gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a\in A} \mathrm{Res}(f,a).$$

*Dies ist sicher der Fall wenn es* $\alpha > 1, R, C > 0$ *gibt mit* $\left\|f(z)\right\|_E \le \frac{C}{|z|^\alpha}$, $|z| >, R,\ \mathrm{Im} z \ge 0$. *Dann existiert das Integral auch als uneigentliches Regelintegral.*

**Beweis.** Wähle $R_0 > 0$, so dass $|a| < R_0$ für alle $a \in A$. Es sei $\gamma_1^R$ : $[-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2^R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$ und $\gamma^R$ die Aneinanderhängung von $\gamma_1^R$ und $\gamma_2^R$. Da nach 18.3.10 $\mathrm{ind}_{\gamma^R}(z) = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ und $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ sowie $\mathrm{ind}_{\gamma^R}(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ oder $\mathrm{Im}\,(z) < 0$, können wir den Residuensatz anwenden und erhalten für $R > R_0$

$$\int\limits_{\gamma^R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in A} \mathrm{Res}(f,a).$$

Wegen

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_1^R} f(z)\,dz &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

bleibt nur $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2^R} f(z)\,dz = 0$ zu zeigen.
Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int\limits_{\gamma_2^R} f(z)\,dz \Big\|_E \\
&= \Big\| \int\limits_0^\pi f(Re^{it})\, i\, Re^{it}\, dt \Big\|_E \\
&\le \int\limits_0^\pi R\, \big\| f(Re^{it}) \big\|_E\, dt \\
&\Big( \le \int\limits_0^\pi \frac{RC}{R^\alpha}\, dt \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Big).
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 18.5.5** i) Es sei $a \ge 0,\ b > 0$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{ib, -ib\} \to \mathbb{C},\ g(z) := \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$. Dann gilt $\operatorname{Re} g(x) = \frac{\cos ax}{x^2+b^2}$ und $\operatorname{Im} g(x) = \frac{\sin ax}{x^2+b^2},\ x \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}, dx &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2}\, dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\Big| \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \Big| \le \frac{e^{-a\mathrm{Im} z}}{|z|^2 - b^2} \le \frac{1}{|z|^2 - b^2}$$

für $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, ist die Hauptmethode anwendbar, und wir erhalten

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(g, ib) = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

Insbesondere ist also $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+b^2}\, dx = \frac{\pi}{b}$.

ii) Es sei $b > 0$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{ib\} \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{e^{iz}}{z-ib}$.
Beim Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ funktioniert immer noch die Hauptmethode, denn es gilt

$$\int\limits_0^\pi \left|g(Re^{i\varphi})\right| R\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{e^{-R\sin\varphi}R}{\sqrt{(R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi - b)^2}}\,d\varphi$$

$$= \int\limits_0^\pi \frac{e^{-R\sin\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{2b}{R}\sin\varphi + \frac{b^2}{R^2}}}\,d\varphi \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty)$$

(Beim letzten Integral konvergiert der Nenner gleichmäßig gegen 1, der Zähler ist beschränkt und konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ gleichmäßig gegen 0). Somit folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ib}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(g, ib) = 2\pi i e^{-b}.$$

iii) Um das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ zu berechnen, beachten wir, dass mit i), ii) für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
2\pi i e^{-\varepsilon} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\varepsilon}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{x^2 + \varepsilon^2}\,(x + i\varepsilon)\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \frac{-\varepsilon\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0} \\
&\qquad + i\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varepsilon\cos x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + i\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\Bigg) \\
&= \lim_{R\to\infty} i\varepsilon \int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{R\to\infty} i\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx \\
&= \frac{\varepsilon i\pi}{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon} + \lim_{R\to\infty} i\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Da $x \mapsto \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2}$ eine gerade Funktion ist, folgt hieraus die Existenz des uneigentlichen Regelintegrals sowie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \pi e^{-\varepsilon}$.

Wegen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\sin x}{x} - \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\Big|\,dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\Big|\frac{-\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\Big|\,dx$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \varepsilon^2\frac{\pi e^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \pi.$$

**Beispiel 18.5.6** i) Wir wollen mit dem Residuensatz noch einmal

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

oder äquivalent

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

zeigen. Dazu sei $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (beachte $a^2 = \pi i$) und

$$g : \mathbb{C} \setminus (\frac{a}{2} + a\mathbb{Z}) \to \mathbb{C},\ g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}.$$

Dann hat $g$ einfache Pole an den Stellen $z_0 \in \frac{a}{2} + a\mathbb{Z}$ und es gilt

$$\begin{aligned} g(z) - g(z+a) &= \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}} - \frac{e^{-(z+a)^2}}{1+e^{-2a(z+a)}} \\ &= e^{-z^2}\Big(\frac{1}{1+e^{-2az}} - \frac{e^{-2az-a^2}}{1+e^{-2az-2a^2}}\Big) \\ &= e^{-z^2}\Big(\frac{1}{1+e^{-2az}} + \frac{e^{-2az}}{1+e^{-2az}}\Big) = e^{-z^2}. \end{aligned}$$

Es sei nun

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^R &: [-R,R]\to\mathbb{C},\ \gamma_1^R(t)=t,\\
\gamma_2^R &: [0,1]\to\mathbb{C},\ \gamma_2^R(t)=(1-t)R+t(R+a),\\
\gamma_3^R &: [-R,R]\to\mathbb{C},\ \gamma_3^R(t)=a-t,\ \text{und}\\
\gamma_4^R &: [0,1]\to\mathbb{C},\ \gamma_1^R(t)=(1-t)(-R+a)+t(-R),
\end{aligned}
$$

und $\gamma^R$ die Aneinanderhängung dieser vier Kurven. $\gamma^R$ parametrisiert also das Rechteck mit den Eckpunkten $-R, R, R+a, -R+a$. Nach 18.3.10 ii) ist der Residuensatz anwendbar und wir erhalten

$$
\int\limits_{\gamma^R} g(z)dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}g(\frac{a}{2}) = 2\pi i \frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{-2ae^{-a^2}} = \sqrt{\pi}.
$$

Nun gilt wegen $g(z)-g(z+a)=e^{-z^2}$, dass

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx &= \int\limits_{-R}^{R} g(x)dx - \int\limits_{-R}^{R} g(x+a)dx\\
&= \int\limits_{\gamma_1^R} g(z)dz + \int\limits_{\gamma_3^R} g(z)dz\\
&= \int\limits_{\gamma^R} g(z)dz - \int\limits_{\gamma_2^R} g(z)dz - \int\limits_{\gamma_4^R} g(z)dz\\
&= \sqrt{\pi} - \int\limits_{\gamma_2^R} g(z)dz - \int\limits_{\gamma_4^R} g(z)dz.
\end{aligned}
$$

Da die beiden letzten Integrale mit $R\to\infty$ gegen 0 konvergieren (warum?), erhalten wir

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.
$$

Wir erhalten aus dem Satz von Fubini, dass

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}}d\lambda^n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2}{2}}d\lambda^n(x)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{\nu=1}^{n} e^{-\frac{x_\nu^2}{2}}d\lambda^n(x)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{\nu=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_\nu^2}{2}}d\lambda(x_\nu)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

ii) Die Fouriertransformierte einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f$ ist definiert als

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} d\lambda^n(x) \quad (\text{mit } x\xi := \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \xi_\nu).$$

Wir wollen zeigen, dass $\hat{\varphi} = \varphi$ für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}},$$

gilt. Durch eine Anwendung des Satzes von Fubini (siehe i)) erhält man sofort

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\xi} d\lambda^n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_\nu + i\xi_\nu)^2}{2}} d\lambda(x_\nu).$$

Wir sind also fertig, wenn wir

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t+i\tau)^2}{2}} d\lambda(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t)^2}{2}} d\lambda(t),\ \tau \in \mathbb{R},$$

gezeigt haben. Ohne Einschränkung sei $\tau > 0$ (Den Fall $\tau < 0$ behandelt man analog). Wir definieren

$$\begin{aligned}
\gamma_1^R &: [-R, R] \to \mathbb{C},\ \gamma_1^R(t) = t, \\
\gamma_2^R &: [0, 1] \to \mathbb{C},\ \gamma_2^R(t) = (1-t)R + t(R + i\tau), \\
\gamma_3^R &: [-R, R] \to \mathbb{C},\ \gamma_3^R(t) = i\tau - t, \text{ und} \\
\gamma_4^R &: [0, 1] \to \mathbb{C},\ \gamma_1^R(t) = (1-t)(-R + i\tau) + t(-R),
\end{aligned}$$

und $\gamma^R$ die Aneinanderhängung dieser vier Kurven. $\gamma^R$ parametrisiert also das Rechteck mit den Eckpunkten $-R, R, R + i\tau, -R + i\tau$. Der Cauchysche Integralsatz liefert nun $\int_{\gamma^R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$. Da

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \int\limits_{\gamma_1^R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ und} \\
-\int\limits_{-R}^{R} e^{-\frac{(t+i\tau)^2}{2}} dt &= \int\limits_{\gamma_3^R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung aus

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2^R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_4^R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.$$

Dies letzte wiederum folgt aus

$$|e^{-\frac{(-R+ti\tau)^2}{2}}| = |e^{-\frac{(R+ti\tau)^2}{2}}| = e^{\frac{t^2\tau^2}{2}} e^{-\frac{R^2}{2}} \leq e^{\frac{\tau^2}{2}} e^{-\frac{R^2}{2}}, \; t \in [0,1].$$

# Kapitel 19

# Folgen und Reihen holomorpher Funktionen

## 19.1 Einführung

Wir wiederholen einige Begriffe und Sätze aus der Analysis II, angepasst auf unsere Situation.

**Satz/Definition 19.1.1** Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f_n : U \to E,\ n \in \mathbb{N}$, (holomorphe) Abbildungen.
Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen $f : U \to E$, wenn für jedes $z_0 \in U$ ein $\rho > 0$ existiert, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\sup_{|z-z_0|<\rho} \left\| f_n(z) - f(z) \right\|_E < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.
Dies ist äquivalent im Folgenden:
Für jedes $K \subset U$ kompakt und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{z\in K} \left\| f_n(z) - f(z) \right\|_E < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

**Beweis.** Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen $f$, und es sei $K \subset U$ kompakt.

Dann existiert zu jedem $z \in K$ ein $\rho_z > 0$, so dass

$$\sup_{|w-z|<\rho_z} \left\| f_n(w) - f(w) \right\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Da $K$ kompakt ist , existieren $z_1, \ldots, z_k \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{\rho_{z_j}}(z_j)$. Es folgt

$$\sup_{z\in K} \left\| f_n(z) - f(z) \right\|_E \le \sup_{1\le j\le k} \sup_{|w-z_j|<\rho_{z_j}} \left\| f_n(w) - f(w) \right\|_E \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Für die Umkehrung wähle zu $z_0 \in U$ einfach $\operatorname{dist}(\partial G, z_0) > \rho > 0$ und setze $K := B_\rho(z_0)$. □

**Bemerkung 19.1.2** Analog gilt natürlich ein Cauchykriterium wie in 6.2.4.

Wir wissen aus Satz 6.2.5, dass die Grenzfunktion $f$ einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n$ wieder stetig ist.

**Beispiel 19.1.3** Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,(z - z_0)^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$.
Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ lokal gleichmäßig auf $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ gegen $f : U_R(z_0) \to E$, $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$.
Wir wollen zeigen, dass die Grenzfunktion einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge holomorpher Funktionen sogar wieder holomorph ist.

**Satz 19.1.4** *Es sei $G$ ein Gebiet, $f_n : G \to E, n \in \mathbb{N}$, holomorph mit Werten in dem vollständigen normierten Raum $E$ über $\mathbb{C}$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : G \to E$, so ist auch $f$ holomorph, und es gilt auch, dass für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(\nu)})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(\nu)}$ konvergiert.*

**Beweis.** Es sei dazu $z_0 \in G$.
Wähle $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset G$. Dann gilt aufgrund der gleichmäßigen Kon-

vergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, dass

$$\begin{aligned}
f(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_n\left(z_0 + R\, e^{it}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + R\, e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \;\; |z - z_0| < R.
\end{aligned}$$

Somit ist mit der Analytizität Cauchyscher Integrale unser $f$ holomorph. Es sei nun $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{|z - z_0| \le \frac{R}{2}} \left\| f_n^{(\nu)}(z) - f^{(\nu)}(z) \right\|_E \\
&= \sup_{|z - z_0| \le \frac{R}{2}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{\nu+1}}\, d\xi \right\|_E \\
&\le \sup_{|z - z_0| \le \frac{R}{2}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(\frac{R}{2})^\nu} \left\| f_n(z_0 + Re^{it}) - f(z_0 + Re^{it}) \right\|_E dt \\
&\longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

**Satz/Definition 19.1.5** (Siehe 6.3.1, 6.3.2.)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein vollständiger normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f_\nu : G \to E, \nu \in \mathbb{N}_0$, Abbildungen.
Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ heißt normal konvergent auf $G$, falls zu jedem $z_0 \in G$ ein $\rho > 0$ existiert mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{|z - z_0| \le \rho} \left\| f_\nu(z) \right\|_E < +\infty.$$

In diesem Fall gilt mit $F_n : G \to E$, $F_n(z) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(z)$, dass die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen ein $f : G \to E$ konvergiert. Sind also alle $f_n$ zusätzlich holomorph, so ist auch $f : G \to E$, $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ holomorph, und es gilt $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}(z), z \in G, k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Cauchy-Ungleichungen ist die Konvergenz auch hier normal.

## 19.2 Der Satz von Mittag-Leffler

**Lemma 19.2.1** *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen und $\big(|z_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend mit $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$. Es sei $R > 0$ und $z_1, \ldots, z_n \in B_R(0)$, $z_{n+1} \notin B_R(0)$, sowie $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Polynom $P$ mit $P(z_\nu) = 0, 1 \le \nu \le n, P(z_\nu) = \alpha_\nu, n+1 \le \nu \le k$ und $\sup\limits_{z\in B_R(0)} \big|P(z)\big| < \varepsilon$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $z_1 = 0$. Wir setzen zusätzlich $\alpha_1 := \ldots := \alpha_n := 0$. Für $s \in \mathbb{N}$ sei

$$P_s(z) := \sum_{\nu=2}^{k} \alpha_\nu \frac{z^s}{z_\nu^s} \prod_{\ell\neq\nu} \frac{z - z_\ell}{z_\nu - z_\ell}.$$

Dann gilt $P_s(z_\nu) = \alpha_\nu, 1 \le \nu \le k$, und wegen $|z_k| \ge \ldots \ge |z_{n+1}| > R$ folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\le R} \big|P_s(z)\big| &= .\sup_{|z|\le R} \Big| \sum_{\nu=n+1}^{k} \alpha_\nu \frac{z^s}{z_\nu^s} \prod_{\ell\neq\nu} \frac{z - z_\ell}{z_\nu - z_\ell} \Big| \\
&\le \Big( \sup_{|z|\le R} \Big|\frac{z}{z_{n+1}}\Big|^s \Big) \Big( \sum_{\nu=n+1}^{k} |\alpha_\nu| \sup_{|z|\le R} \prod_{\ell\neq\nu} \frac{|z - z_\ell|}{|z_\nu - z_\ell|} \Big) \\
&\longrightarrow 0 \ (s \to \infty)
\end{aligned}$$

□

**Satz 19.2.2** *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $\big(|z_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend sowie $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$. Ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen, so existiert eine ganze Funktion $f$ mit $f(z_\nu) = \alpha_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.*

**Beweis.** Ohne Einschränkung sei $|z_1| < 1$.
Es sei $|z_{n_1}| \leq 1$, $|z_{n_1+1}| > 1$. Setze

$$P_1(z) := \sum_{\nu=1}^{n_1} \alpha_\nu \prod_{\substack{\ell \neq \nu \\ 1 \leq \ell \leq n_1}} \frac{z - z_\ell}{z_\nu - z_\ell}.$$

Es seien nun $|z_{n_2}| \leq 2$, $|z_{n_2+1}| > 2$. Wähle nach dem Lemma ein Polynom $P_2$ mit

$$\sup_{|z| \leq 1} \left|P_2(z)\right| \leq \frac{1}{4}, \quad P_2(z_\nu) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq n_1,$$

$$P_2(z_\nu) = \alpha_\nu - P_1(z_\nu), \quad n_1 + 1 \leq \nu \leq n_2.$$

Ist das Polynom $P_{k-1}$ konstruiert, so sei $|z_{n_k}| \leq k$, $|z_{n_k+1}| > k+1$. Wähle nach dem Lemma ein Polynom $P_k$ mit

$$\sup_{|z| \leq k-1} \left|P_k(z)\right| \leq \frac{1}{2^k}, \quad P_k(z_\nu) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq n_{k-1}$$

$$P_k(z_\nu) = \alpha_\nu - \sum_{\ell=1}^{k-1} P_\ell(z_\nu), \quad n_{k-1} + 1 \leq \nu \leq n_k.$$

Wir setzen

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} P_\ell(z).$$

Wegen $\sup\limits_{|z| \leq k-1} \left|P_k(z)\right| \leq \frac{1}{2^k}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} P_\ell$ normal auf $\mathbb{C}$, $f$ ist also eine ganze Funktion. Ist $\nu \leq n_1$ so gilt $f(z_\nu) = P_1(z_\nu) = \alpha_\nu$ und ist $n_{k-1} + 1 \leq \nu \leq n_k$ (für $k \geq 2$) so gilt ebenso $f(z_\nu) = \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} P_\ell(z_\nu)$

$$= P_1(z_\nu) + \ldots + P_{k-1}(z_\nu) + \Big(\alpha_\nu - \sum_{\ell=1}^{k-1} P_\ell(z_\nu)\Big) = \alpha_\nu.$$

$\square$

**Satz 19.2.3** *(von Mittag-Leffler für $\mathbb{C}$)* *Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $\lim_{n \to \infty} |z_n| = \infty$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein Polynom $q_n$ mit $q_n(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{p_n} a_\nu^{(n)} z^\nu$ vorgegeben. Dann existiert* *eine meromorphe Funktion $f$ auf $\mathbb{C}$ mit Polen genau in $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f$ an $z_n$ eine Laurententwicklung $f(z) = \sum\limits_{\nu=-p_n}^{-1} a_\nu^{(n)} (z-z_n)^\nu + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{(n)} (z-z_n)^\nu$ besitzt. Mit anderen Worten, man kann an allen $z_n$ die Hauptteile vorschreiben.*

**Beweis.** Die Idee besteht darin, $f(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z)$ mit so genannten konvergenzerzeugenden ganzen Funktionen $h_n$ zu definieren.
Um die normale Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z)$ auf $G\backslash\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu garantieren, genügt es, ganze Funktionen $h_n$ mit

$$\sup_{|z|\leq|z_n|-1} \left|q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z)\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

zu finden. Dann löst

$$f : G\backslash\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - h_n(z)$$

unser Problem. Da aber $z \mapsto q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ holomorph auf $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_n|\right\}$, können wir diese Funktion um 0 in ihre Potenzreihe $q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)} z^\nu$ entwickeln, und diese konvergiert gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_n| - 1\}$. Also existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{|z|\leq|z_n|-1} \left|q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - \sum_{\nu=0}^{k_n} c_\nu^{(n)} z^\nu\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Wir setzen also $h_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{k_n} c_\nu^{(n)} z^\nu$. □

**Bemerkung 19.2.4** Die beiden obigen Sätze kann man auf beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{C}$ verallgemeinern, da muss man natürlich an die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voraussetzen, dass $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ keinen Häufungspunkt in $G$ besitzt. Wir werden diese Sätze im nächsten Semester zeigen.

## 19.3 Der Satz von Montel

**Lemma 19.3.1** *(Arzelà-Ascoli)*
*Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und es existiere eine wachsende Folge*

*kompakter Teilmengen* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* $X$ *mit* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ *und* $K_n \subset \circ K_{n+1}$.
*Ist nun* $F$ *eine Menge stetiger Funktionen* $f : X \to \mathbb{C}$ *mit*

*i)* $\sup\limits_{f\in F} \big|f(x)\big| < +\infty$ *für alle* $x \in X$ *und*

*ii) für alle* $x \in X$ *und* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $\sup\limits_{f\in F} \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$ *für alle* $y \in U_\delta(x)$,

*so besitzt jede Folge in* $F$ *eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

**Beweis.** Wir bemerken, dass jede kompakte Teilmenge $K$ von $X$ in einem $K_n$ enthalten ist (da ja $(\circ K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $K$ ist).
Es sei also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $F$. Da jedes $K_n$ kompakt ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein endliche Menge $M_{n,\varepsilon} \subset K_n$ mit $K_n \subset \bigcup\limits_{y\in M_{n,\varepsilon}} U_\varepsilon(y)$.
Hieraus folgt mit $M_n := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{n,\frac{1}{k}}$, dass $K_n \subset \overline{M}_n$, also auch $X \subset \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n}$.

Wir zeigen nun, dass eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass $\big(f_{n_k}(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in M := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$ konvergiert. $M$ ist abzählbar, schreiben wir also $M = \{q_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ mit paarweise verschiedenen $q_\ell \in M$. Da $\big(f_n(q_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ beschränkt ist, existiert also $I_1 \subset \mathbb{N}, |I_1| = \infty$, mit

$$\big|f_n(q_1) - f_m(q_1)\big| < 1$$

für alle $n, m \in I_1$.
Sind $I_1, \ldots, I_k$ konstuiert, so wähle $I_{k+1} \subset I_k$ mit $|I_{k+1}| = \infty$ und

$$\sup_{1\le j\le k+1} \big|f_n(q_j) - f_m(q_j)\big| < \frac{1}{k+1}$$

für alle $n, m \in I_{k+1}$. Wir wählen nun eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k \in I_k,\ k \in \mathbb{N}$. Ist $l \in \mathbb{N}$ so gilt

$$\big|f_{n_k}(q_\ell) - f_{n_m}(q_\ell)\big| < \frac{1}{\min\{k, m\}}$$

für $k, m \ge l$, somit ist $\big(f_{n_k}(q_\ell)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und damit konvergent.

Wir zeigen nun, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dazu genügt es, wegen 6.2.4 folgendes zu zeigen:
Es sei $x_0 \in K$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\sup_{y\in U_\delta(x_0)} \big|f_{n_k}(y) - f_{n_m}(y)\big| < \varepsilon$$

für alle $k, m \geq K$.
Wähle also nach ii) $\delta > 0$ mit $\sup\limits_{y \in U_\delta(x_0)} \left|f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{6}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Mit der Dreiecksungleichung folgt sofort $\sup\limits_{x,y \in U_\delta(x_0)} \left|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wegen $X \subset \overline{M}$ gibt es ein $x \in M$ mit $x \in U_\delta(x_0)$.
Wähle nun $K$ so groß, dass $\left|f_{n_k}(x) - f_{n_m}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k, m \geq K$. Dann gilt für solche $k, m$, dass

$$\begin{aligned}
&\sup_{y \in U_\delta(x_0)} \left|f_{n_k}(y) - f_{n_m}(y)\right| \\
&\leq \sup_{y \in U_\delta(x_0)} \left|f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)\right| + \left|f_{n_k}(x) - f_{n_m}(x)\right| + \left|f_{n_m}(x) - f_{n_m}(y)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Definition 19.3.2** Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Menge $F \subset H(G)$ heißt normale Familie, falls jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $F$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt, welche lokal gleichmäßig auf $G$ konvergiert.

**Beispiel 19.3.3** i) Es sei $G = \mathbb{D}$ und $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n(z) = z^n$. Dann ist $F$ eine normale Famiile.

ii) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : G \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = n \cdot z$. Dann ist $F$ keine normale Familie.

**Satz 19.3.4** *(Montel) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F \subset H(G)$ eine Menge holomorpher Funktionen, welche gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von $G$ beschränkt ist, d.h.*

$$\sup_{\substack{z \in K \\ f \in F}} \left|f(z)\right| < +\infty$$

*für alle $K \subset G$ kompakt. Dann ist $F$ eine normale Familie.*

**Beweis.** Es sei $K_n := \left\{z \in G : |z| \leq n, \operatorname{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{n}\right\}$.
Dann erfüllt $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die im Lemma geforderte Eigenschaft.
Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $F$ folgt sofort i). Wir müssen noch ii) zeigen.
Es sei dazu $z_0 \in G$ und $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset G$.
Wähle $R > \rho > 0$ mit

$$C := \sup_{\substack{z\in B_\rho(z_0)\\ |\xi - z_0| = R}} \left|\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{1 + \sup\limits_{\substack{|\xi - z_0| = R\\ f\in F}} |f(\xi)|} \cdot \frac{1}{R}.$$

Dann gilt für alle $f \in F$ und $z \in U_\rho(z_0)$, dass

$$\begin{aligned} \left|f(z) - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = R} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right) d\xi\right| \\ &\leq C \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} R \left|f(z_0 + Re^{ie})\right| d\xi \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Arzelà-Ascoli erfüllt, und es folgt die Behauptung. □

**Satz 19.3.5** *(Vitali)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, die auf den kompakten Teilmengen von $G$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h.*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ z\in K}} \left|f_n(z)\right| < +\infty$$

*für alle $K \subset G$ kompakt. Ist $A \subset G$ eine Teilmenge, welche einen Häufungspunkt in $G$ hat, so dass $\big(f_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $z \in A$ konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon lokal gleichmäßig auf $G$.*

**Beweis.** Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine normale Familie ist, existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein holomorphes $f : G \to \mathbb{C}$, so dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Wir nehmen an, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f$ konvergiert. Dann existiert insbesondere ein $z_0 \in G$ und eine Teilfolge $(f_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$f_{m_k}(z_0) \not\longrightarrow f(z_0)$ $(k \to \infty)$.
Da $\{f_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}$ eine normale Familie ist, existiert eine weitere Teilfolge $(f_{m_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $(f_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_{m_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen ein holomorphes $g : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Insbesondere folgt $g(z_0) \neq f(z_0)$.
Da für alle $z \in A$ gilt, dass

$$g(z) = \lim_{\ell\to\infty} f_{m_{k_\ell}}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f(z),$$

liefert der Identitätssatz $f = g$ im Widerspruch zu $g(z_0) \neq f(z_0)$. $\square$

# Kapitel 20

# Schlichte Funktionen, Riemannscher Abbildungssatz

Hauptziel dieses Kapitels ist es, folgenden berühmten Satz von Bernhard Riemann zu zeigen:

> Zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$ existiert eine bijektive holomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$.

## 20.1 Schlichte Funktionen und konforme Abbildungen

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe und injektive Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt schlichte Funktion. Offensichtlich sind Verknüpfungen schlichter Funktionen wieder schlicht.

**Satz 20.1.1** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine schlichte Funktion. Dann gilt*

*i)* $H := f(G)$ *ist wieder ein Gebiet.*

*ii)* $f'$ *hat keine Nullstelle auf* $G$.

*iii)* $f^{-1} : H \to G$ *ist ebenfalls schlicht.*

*iv)* $G$ *ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn* $H$ *einfach zusammenhängend.*

**Beweis.**

i) folgt sofort mit der Gebietstreue holomorpher Funktionen, da $f$ nicht konstant ist.

ii) Wegen Bemerkung 17.2.22 hat $f - f(z_0)$ für jedes $z_0 \in G$ aufgrund der Injektivität eine einfache Nullstelle, es gilt also $f'(z_0) \neq 0$.

iii) Mit ii) und 17.1.9 ist $f^{-1} : H \to G$ holomorph, und da $f : G \to H$ bijektiv, ist also $f^{-1}$ dies auch.

iv) Es sei $G$ einfach zusammenhängend. Dann existiert $z_0 \in G$, so dass für alle geschlossenen Kurven $\gamma$ in $G$ mit Anfangs- und Endpunkt $z_0$ eine Homotopie zwischen $\gamma$ und $\sigma \equiv z_0$ besteht. Setze $w_0 := f(z_0)$.
Es sei nun $\rho : [0,1] \to H$ eine Kurve mit $\rho(0) = w_0 = \rho(1)$. Dann ist $\gamma := f^{-1} \circ \rho$ ein Kurve in $G$ mit $\gamma(0) = z_0 = \gamma(1)$. Wähle eine Homotopie $A : [0,1]^2 \to G$ zwischen $\gamma$ und $\sigma \equiv z_0$ und setze $B : [0,1]^2 \to H, B := f \circ A$.
Dann ist $B$ eine Homotopie in $H$, welche $\rho$ und $\delta \equiv w_0$ verbindet.
Somit ist auch $H$ einfach zusammenhängend.
Die Umkehrung folgt durch Anwendung des gerade Gezeigten auf $f^{-1}$ anstelle von $f$.

□

**Definition 20.1.2** Es seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G \to H$ schlicht und bijektiv. Dann heißt $f$ konforme Abbildung von $G$ auf $H$.

**Bemerkung 20.1.3** Nach obigem Satz ist eine schlichte Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung von $G$ auf $f(G)$. Natürlich ist dann $f^{-1} : f(G) \to G$ auch konform.

**Beispiel 20.1.4**

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z$, ist schlicht.

2. Ist $G$ ein Gebiet mit $0 \in G$, so ist $f : G \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2$, nicht schlicht (da z. B. $f'(0) = 0$). Ist aber $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, so ist $f : H \to \mathbb{C},\ f(z) = z^2$, schlicht und $f(H) = \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$.

3. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z - w \notin 2\pi i\mathbb{Z}\backslash\{0\}, z, w \in G$, so ist $\exp : G \to \mathbb{C}$ schlicht.

4. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, ist schlicht, denn aus $f(z_1) = f(z_2)$ folgt $z_1(1-z_2)^2 = z_2(1-z_1)^2$, also $z_1 + z_1 z_2^2 = z_2 + z_1^2 z_2$, somit $z_1 - z_2 = z_1 z_2(z_1 - z_2)$, was wegen $|z_1, z_2| < 1$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ nur für $z_1 = z_2$ möglich ist.

5. $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$, ist schlicht.

6. Für $a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = az + b$, schlicht.

**Bemerkung 20.1.5** i) Ist $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $g : G \to \mathbb{C}$ schlicht und ohne Nullstelle, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $e^f = g$, so ist auch $f$ schlicht.
ii) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f'$ ohne Nullstelle auf $G$, so braucht $f$ nicht schlicht zu sein, wie das Beispiel $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schon zeigt.

**Satz 20.1.6** *(Noshiro-Wolff) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $Re(f')$ habe keine Nullstelle in $G$. Dann ist $f$ schlicht.*

**Beweis.** Da $Re(f')$ stetig in $G$ ist und $G$ zusammenhängend, ist auch $Re(f')(G)$ zusammenhängend in $\mathbb{R}$, also ein Intervall. Da $Re(f')$ keine Nullstelle hat, muss also entweder $Re(f') > 0$ oder $Re(f') < 0$ auf ganz $G$ gelten. Ohne Einschränkung sei $Re(f'(z)) > 0, z \in G$, ansonsten betrachte $-f$ anstelle von $f$. Da $f$ eine Stammfunktion von $f'$ ist, folgt für $z_1, z_2 \in G, z_1 \neq z_2$, dass

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_0^1 f'\big(z_1 + t(z_2 - z_1)\big)(z_2 - z_1)\, dt,$$

somit

$$Re\left(\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right) = \int_0^1 Re\big(f'(z_1 + t(z_2 - z_1)\big)\, dt > 0.$$

Also gilt auch $f(z_2) \neq f(z_1)$, und damit ist $f$ injektiv. $\square$

## 20.2 Folgen schlichter Funktionen

**Lemma 20.2.1** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Haben alle $f_n$ keine Nullstelle auf $G$, so hat $f$ keine Nullstelle auf $G$ oder $f \equiv 0$.*

**Beweis.**Es sei $f \not\equiv 0$. Sei $z_0 \in G$. Dann hat $f$ eine $m$-fache Nullstelle (für $m \in \mathbb{N}_0$) an $z_0$. Wähle $R > 0$, so dass $f$ keine Nullstelle in $B_R(z_0)\backslash\{z_0\}$ hat. Nach dem Prinzip des Argumentes ist $m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$. Da mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\{z : |z - z_0| = R\}$ konvergiert, folgt aus $|f| > 0$ auf dieser Menge, dass ebenso $\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\{z : |z - z_0| = R\}$ gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$ konvergiert. Es folgt $m = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = 0$, da jedes $f_n$ keine Nullstelle in $G$ hat, also hat $f$ an $z_0$ eine 0-fache Nullstelle, und damit ist $f(z_0) \neq 0$. □

**Satz 20.2.2** *(Hurwitz)* *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, und es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge schlichter Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, welche lokal gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist $f$ schlicht oder konstant.*

**Beweis.** Für $z_0 \in G$ sei $F_n : G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$, $F_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Dann hat $F_n$ hat keine Nullstelle auf $G\backslash\{z_0\}, n \in \mathbb{N}$, und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f - f(z_0)$. Mit obigem Lemma ist also $f - f(z_0) \equiv 0$, also $f$ konstant, oder $f$ ist nicht konstant, und es gilt $f(z) \neq f(z_0), z \in G$. Da $z_0 \in G$ beliebig, ist im letzeren Falle $f$ injektiv. □

## 20.3 Das Schwarzsche Lemma und der Eindeutigkeitssatz für konforme Abbildungen

**Satz 20.3.1** *(Schwarzsches Lemma)* *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1, z \in \mathbb{D}$, und $f(0) = 0$. Dann gilt schon $|f(z)| \leq |z|, z \in \mathbb{D}$.*
*Existiert $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\big|f(z_0)\big| = |z_0|$, so existiert schon $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$,*

*mit* $f(z) = cz, \;\; z \in \mathbb{D}$.
*Weiter ist* $|f'(0)| \leq 1$ *und* $|f'(0)| = 1$ *genau dann, wenn* $f(z) = cz$.

**Beweis.** Es sei

$$F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & : z \neq 0 \\ f'(z) & : z = 0, \end{cases}$$

dann ist $F$ holomorph, und es gilt daher mit dem Maximumprinzip:

$$\sup_{|z| \leq \rho} \big|F(z)\big| \leq \frac{1}{\rho} \sup_{|z| \leq \rho} \big|f(z)\big| \leq \frac{1}{\rho}$$

für alle $\rho < 1$, also $\sup\limits_{|z|<1} \big|F(z)\big| \leq 1$. Nach Definition von $F$ ist also $\big|f(z)\big| \leq |z|, z \in \mathbb{D}$.
Ist $f$ nicht von der Form $f(z) = cz$, also $F$ nicht von der Form $F \equiv c$, für $|c| = 1$, so müssen wir zeigen, dass $|F| < 1$ auf $\mathbb{D}$. Dies folgt aber sofort aus der Gebietstreue holomorpher Funktionen. In diesem Fall gilt auch $f'(0) = F(0) \in \mathbb{D}$. □

Wir wollen nun den Eindeutigkeitssatz für konforme Abbildungen zeigen:

**Satz 20.3.2** *Es sei* $G \subset \mathbb{C}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet,* $z_0 \in G$. *Gibt es eine konforme Abbildung* $f : G \to \mathbb{D}$ *von* $G$ *auf* $\mathbb{D}$ *mit* $f(z_0) = 0$ *und* $f'(z_0) > 0$, *so ist diese eindeutig bestimmt.*

**Beweis.** Es seien $f_1, f_2$ zwei konforme Abbildungen von $G$ auf $\mathbb{D}$ mit der entsprechenden Normierung. Dann sei $f := f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Als Verküpfung konformer Abbildungen ist $f$ wieder konform, und wegen $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ gilt $f(0) = 0$.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} f'(0) &= f_1'(z_0) \cdot (f_2^{-1})'(0) \\ &= f_1'(z_0) \cdot \frac{1}{f_2'(z_0)} > 0. \end{aligned}$$

Wegen des Schwarzschen Lemmas gilt außerdem $\big|f(z)\big| \leq |z|$.
Analog gilt für $f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, f^{-1} = f_2 \circ f_1^{-1}$, dass $\big|f^{-1}(z)\big| \leq |z|, z \in \mathbb{D}$.

Wir erhalten zusammen $\big|f(z)\big| \le |z| = \big|f^{-1}\big(f(z)\big)\big| \le \big|f(z)\big|, z \in \mathbb{D}$, also $\big|f(z)\big| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$, somit aus dem Schwarzschen Lemma $f(z) = az$ für ein $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$. Aus $0 < f'(0) = a$ folgt $a = 1$, also $f(z) = z, z \in \mathbb{D}$. Hieraus folgt $f_1\big(f_2^{-1}(z)\big) = z$, also $f_1(z) = f_2(z), z \in \mathbb{D}$. □

**Satz 20.3.3** *Jede konforme Abbildung* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *ist von der Form* $f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$, *mit einem* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *und* $z_0 \in \mathbb{D}$. *Insbesondere ist* $f$ *durch* $f(0)$ *und* $\frac{f'(0)}{|f'(0)|}$ *eindeutig bestimmt.*

**Beweis.**

i) Es seien $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z_0 \in \mathbb{D}$ gegeben.
Wir betrachten die Funktion $\widetilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}, \widetilde{f}(z) = e^{i\varphi}\,\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$.
Diese ist stetig sowie holomorph auf $\mathbb{D}$, also gilt mit dem Maximumprinzip, dass $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}\big|\widetilde{f}(z)\big| = \sup\limits_{|z|=1}\big|\widetilde{f}(z)\big|$.
Für $|z| = 1$ gilt nun

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |z|\left|1 - \frac{z_0}{z}\right| = \left|1 - \frac{z_0}{z}\right| = \left|1 - \frac{z_0\overline{z}}{|z|^2}\right| \\ &= \big|1 - \overline{z}_0 z\big|, \end{aligned}$$

also $\widetilde{f}(z) = 1, |z| = 1$. Somit gilt $\widetilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Es sei $f := \widetilde{f}|_{\mathbb{D}}$.
Setzen wir $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, g(w) = e^{i\psi}\,\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}$, mit $\psi = -\varphi, w_0 = -e^{i\varphi}z_0$, so folgt analog, dass $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f\big(g(w)\big) &= e^{i\varphi}\,\frac{e^{i\psi}\,\frac{w-w_0}{1-w\overline{w}_0} - z_0}{1 - \overline{z}_0 e^{i\psi}\,\frac{w-w_0}{1-w\overline{w}_0}} \\ &= \frac{w - w_0 - e^{i\varphi}z_0(1 - w\overline{w}_0)}{(1 - w\overline{w}_0) - \overline{z}_0 e^{i\psi}(w - w_0)} \\ &= \frac{w - w_0 + w_0(1 - w\overline{w}_0)}{1 - w\overline{w}_0 + \overline{w}_0(w - w_0)} \\ &= \frac{w - w|w_0|^2}{1 - |w_0|^2} = w, \quad w \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

und analog $g\big(f(z)\big) = z, z \in \mathbb{D}$. Damit ist $g = f^{-1}$, und $f$ ist eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$.

ii) Es sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung.
Sei $z_0 := g^{-1}(\{0\})$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $e^{i\varphi} = \frac{g'(z_0)}{|g'(z_0)|}$. Es ist also $g'(z_0) = |g'(z_0)|\, e^{i\varphi}$. Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, h(z) = e^{-i\varphi} g(z)$. Hierfür gilt $h(z_0) = 0, h'(z_0) = |g'(z_0)|$, und $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist auch eine konforme Abbildung.
Ist nun $\widetilde{h} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \widetilde{h}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, so ist $\widetilde{h}$ ebenfalls eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$, und wegen $\widetilde{h}(z_0) = 0$, $\widetilde{h}'(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} > 0$ ist nach dem Eindeutigkeitssatz für konforme Abbildungen $h = \widetilde{h}$, also mit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, gilt $g = f$.

□

**Satz 20.3.4** *Es seien $g : G \to \mathbb{D}$ und $h : H \to \mathbb{D}$ konforme Abbildungen sowie $z_0 \in G$ und $w_0 \in H$. Dann gilt:*
*i) Sind $f_1, f_2 : G \to H$ konforme Abbildungen mit $f_1(z_0) = f_2(z_0) = w_0$ so ist $|f_1'(z_0)| = |f_2'(z_0)|$. Gilt zusätzlich $\frac{f_1'(z_0)}{|f_1'(z_0)|} = \frac{f_2'(z_0)}{|f_2'(z_0)|}$ so ist $f_1 = f_2$.*
*ii) Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ existiert genau ein konformes $f : G \to H$ mit $f(z_0) = w_0$ und $\frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} = e^{i\varphi}$.*

**Beweis.** Durch eventuelles Nachschalten geeigneter konformer Abbildungen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $g(z_0) = 0 = f(w_0)$ gilt.
i) Es sei $\psi_j := h \circ f_j \circ g^{-1}$. Dann sind die $\psi_j$ konforme Abbildungen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ und es gilt $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ sowie

$$\psi_j'(0) = h'(w_0) f_j'(z_0) \frac{1}{g'(z_0)} = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)} f_j'(z_0),\ j = 1, 2.$$

Wegen $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ liefert obiger Satz sofort $\psi_2 = e^{i\varphi}\psi_1$ mit einem $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dies impliziert sofort $|f_1'(z_0)| = |f_2'(z_0)|$. Weiter ist $f_1 = f_2$ genau dann, wenn $\psi_1 = \psi_2$ also genau dann, wenn $\frac{\psi_1'(0)}{|\psi_1'(0)|} = \frac{\psi_2'(0)}{|\psi_2'(0)|}$. Und dies ist nach obigem genau dann der Fall, wenn $\frac{f_1'(z_0)}{|f_1'(z_0)|} = \frac{f_2'(z_0)}{|f_2'(z_0)|}$.
ii) Setze $v := e^{i\varphi} \frac{h'(w_0)|g'(z_0)|}{|h'(w_0)|g'(z_0)}$ und $f : G \to H,\ f(z) := h^{-1}(vg(z))$. Dann ist $f$ konform als Verknüpfung konformer Abbildungen und es gilt $f(z_0) = w_0$ sowie $f'(z_0) = \frac{1}{h'(w_0)} v g'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{|g'(z_0)|}{|h'(w_0)|}$, also $\frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} = e^{i\varphi}$. Die Eindeutigkeit von $f$ folgt aus i). □

Was uns natürlich noch fehlt um den Satz anständig anwenden zu können ist der Riemannsche Abbildungssatz. Wir ziehen aber schon einmal eine konkrete Folgerung.

**Satz 20.3.5** *Es sei $H^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die (offene) obere Halbebene.*

*i) Jede konforme Abbildung $f : H^+ \to \mathbb{D}$ ist von der Form $f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$ mit $z_0 \in H^+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.*

*ii) Jede konforme Abbildung $f : H^+ \to H^+$ ist von der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$.*

**Beweis.** i) Zunächst überprüft man leicht, dass jede Abbildung obiger Form die obere Halbebene $H^+$ bijektiv auf $\mathbb{D}$ abbildet (und natürlich holomorph ist) sowie die Umkehrfunktion durch $f^{-1} : \mathbb{D} \to H^+,\ f^{-1}(w) = \frac{z_0-\overline{z}_0 e^{-i\varphi}w}{1-e^{-i\varphi}w}$, gegeben ist. Ist $g : H^+ \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung, so sei $z_0 := g^{-1}(0)$, $e^{i\varphi} = \frac{g'(z_0)}{|g'(z_0)|}$ und

$$f : H^+ \to \mathbb{D},\ f(z) = e^{i\varphi}\frac{|z_0 - \overline{z}_0|}{z_0 - \overline{z}_0}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}.$$

Dann gilt $f(z_0) = g(z_0)$ und $\frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} = e^{i\varphi}$, also ist nach obigem Satz $g = f$.
ii) Es sei $f : H^+ \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$. Aus $\operatorname{Im}(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ folgt, dass $f$ die obere Halbebene in sich selbst abbildet. ist $\tilde{f} : H^+ \to \mathbb{C},\ \tilde{f}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$, so gilt auch $da-(-b)(-c) = 1$ und also bildet $\tilde{f}$ die obere Halbebene in sich selbst ab. Man überprüft noch $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = id$. Somit ist $f$ eine konforme Abbildung von $H^+$ auf sich selbst.
Ist $f : H^+ \to H^+$ eine konforme Abbildung, so ist nach dem Beweis des obigen Satzes $f = g \circ h$ wobei $h : H^+ \to \mathbb{D}$ und $g : \mathbb{D} \to H^+$ konforme Abbildungen sind. Ohne Einschränkung können wir dann $g(z) = i\frac{z+1}{z-1}$ und $h(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$ annehmen, wobei $f(z_0) = i$, siehe i). Dann rechnet man mit etwas Mühe nach, dass $g \circ h$ die geforderte Form besitzt. □

**Beispiel 20.3.6** Es sei $G = \mathbb{C}$, dann lässt sich $G$ nicht konform auf $\mathbb{D}$ abbilden. In der Tat, nehmen wir an, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ sei eine solche konforme Abbildung. Dann ist $f$ eine ganze beschränkte Funktion, also mit Liouville konstant, Widerspruch.
Es gilt aber der berühmte Riemannsche Abbildungssatz:

**Satz 20.3.7** *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängndes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$. Ist $z_0 \in G$, so existiert eine eindeutig bestimmte konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$.*

**Beweis.** Die Eindeutigkeit haben wir schon gezeigt.
Wir wollen nun den Satz von Montel und den Satz von Hurwitz in Stellung bringen. Dazu setzen wir $\mathscr{M}$ als die Menge aller schlichten Funktionen $f : G \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ und wir zeigen

1. $\mathscr{M} \neq \emptyset$.
2. Es gibt $f_0 \in \mathscr{M}$ mit $f_0'(z_0) \geq f'(z_0)$ für alle $f \in \mathscr{M}$.
3. $f_0(G) = \mathbb{D}$ (Dies liefert dann die Behauptung).

**Zu 1.:** Da $G \neq \mathbb{C}$, gibt es ein $w_0 \in \mathbb{C}\backslash G$. Die schlichte Funktion $g : G \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{z-w_0}{z_0-w_0}$, hat in $G$ keine Nullstelle (da $w_0 \notin G$), und es gilt $g(z_0) = 1$. Daher gibt es nach 17.1.12 eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $e^F = g$ und $F(z_0) = 0$. Dieses $F$ ist nach 20.1.5 schlicht.
Wähle nach der Gebietstreue holomorpher Funktionen ein $1 > r > 0$ mit $F(G) \supset U_r(0)$.
Wir zeigen nun, dass $F(G) \cap U_r(2\pi i) = \emptyset$.
Nehmen wir an, es gäbe ein $z_1 \in G$ mit $F(z_1) \in U_r(2\pi i)$, so ist $F(z_1) - 2\pi i \in U_r(0)$, es gibt also ein $z_2 \in G$ mit $F(z_2) = F(z_1) - 2\pi i$.
Aufgrund der Schlichtheit von $F$ ist $z_1 \neq z_2$. Andererseits gilt aber $g(z_1) = e^{F(z_1)} = e^{F(z_2)} = g(z_2)$, was der Schlichtheit von $g$ widerspricht.
Insgesamt ist also $F(G) \cap U_r(2\pi i) = \emptyset$, und aufgrund der Gebietstreue gilt auch $F(G) \cap B_r(2\pi i) = \emptyset$.
Nun ist die Abbildung $h : \mathbb{C}\backslash B_r(2\pi i) \to \mathbb{C}, h(z) = \frac{r}{z-2\pi i}$ schlicht mit $h\big(\mathbb{C}\backslash B_r(2\pi i)\big) \subset \mathbb{D}$, somit ist also $h \circ F$ eine schlichte Abbildung von $G$ in $\mathbb{D}$. Ist nun $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \psi(z) = \frac{z-h(0)}{1-z\overline{h(0)}}$, so ist auch $\psi \circ h \circ F : G \to \mathbb{D}$ schlicht, und es gilt $\psi \circ h \circ F(z_0) = \psi(h(0)) = 0$.
Schließlich sei $f := \frac{|(\psi \circ h \circ F)'(z_0)|}{(\psi \circ h \circ F)'(z_0)} \psi \circ h \circ F$. Dann ist $f \in \mathscr{M}$.

**Zu 2.:** Es sei $s := \sup\limits_{f \in \mathscr{M}} f'(z_0) \in (0, +\infty]$.
Ist $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset G$, so folgt aufgrund der Cauchyabschätzungen für $f \in \mathscr{M}$

$$f'(z_0) = \left|f'(z_0)\right| \leq \frac{1}{R} \sup_{|z-z_0| \leq R} \left|f(z)\right| \leq \frac{1}{R},$$

also ist $s \in (0, +\infty)$.

Wir wählen nun eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{M}$ mit $f_n'(z_0) \to s\ (n \to \infty)$. Nach dem Satz von Montel (beachte $|f_n| \leq 1$ auf ganz $G$) gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche auf $G$ lokal gleichmäßig gegen ein holomorphes $f_0 : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Für diese $f_0$ ist $f_0(z_0) = 0$ (da dies für alle $f_{n_k}$ gilt) sowie $f_0'(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k}'(z_0) = s$.
Wegen $f_0'(z_0) = s \neq 0$ ist $f_0$ nicht konstant, und somit nach dem Satz von Hurwitz ist $f_0$ schlicht.
Weiter gilt $\big|f_0(z)\big| = \lim\limits_{k\to\infty} \big|f_{n_k}(z)\big| \leq 1, z \in G$, und mit der Gebietstreue holomorpher Funktionen liefert dies $f_0(G) \subset \mathbb{D}$. Somit ist $f_0 \in \mathscr{M}$, und es gilt

$$f_0'(z_0) = s \geq f'(z_0) \ \text{ für alle } f \in \mathscr{M}.$$

**Zu 3.:** Wir müssen zeigen, dass $f_0(G) = \mathbb{D}$ gilt.
Nehmen wir an, dass $f_0(G)$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist. Dann wähle $w_0 \in \mathbb{D}\backslash f_0(G)$.

$\alpha)$ Es sei $g_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, g_1(z) = -\frac{z-w_0}{1-\overline{w}_0 z}$.
Dann bildet $g_1 \circ f_0$ das Gebiet $G$ konform auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G_1 \subset \mathbb{D}$ ab, und es gilt $0 \notin G_1$ und $(g_1 \circ f_0)(z_0) = g_1(0) = w_0$.

$\beta)$ Wähle nach 17.1.12 eine holomorphe Funktion $g_2 : G_1 \to \mathbb{C}$ mit $e^{g_2(z)} = z, z \in G_1$. $g_2$ ist nach Bemerkung 20.1.5 wieder schlicht. Wegen $e^{\operatorname{Re} g_2(z)} = |e^{g_2(z)}| = |z| < 1, z \in G_1$, gilt $\operatorname{Re} g_2(z) < 0, z \in G_1$, also ist $g_2 \circ g_1 \circ f_0$ eine konforme Abbildung von $G$ auf ein Gebiet $G_2 \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

$\gamma)$ Es sei $g_3 : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung (siehe 20.3.5), durch Nachschalten einer konformen Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $g_3\big(g_2\big(g_1\big(f_0(z_0)\big)\big)\big) = 0$ gilt.
Weiter ist $g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f_0 : G \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung von $G$ auf $G_3 := g_3(G_2) = g_3 \circ g_2(G_1) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(f_0(G)) = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f_0(G)$.

$\delta)$ Es sei nun $\varphi := g_3 \circ g_2 \circ g_1 : f_0(G) \to \mathbb{D}$. Dann ist $\varphi$ konform von $f_0(G)$ auf $G_3$.
Wir setzen $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\psi(z) := g_1^{-1}\big(e^{g_3^{-1}(z)}\big)$. Dann ist $\psi$ holomorph, und für $z \in f_0(G)$ gilt $\psi\big(\varphi(z)\big) = z$.
Da $\varphi$ bijektiv von $f_0(G)$ nach $G_3$, ist also $\psi|_{G_3} : G_3 \to f_0(G)$ die

Umkehrfunktion von $\varphi$.
Insbesondere gilt also $\psi(0) = 0$ (da $\varphi(0) = 0$).
Mit dem Schwarzschen Lemma folgt $\left|\psi'(0)\right| < 1$, also $\left|\varphi'(0)\right| > 1$.

$\varepsilon$) Es sei $e^{i\theta} = \frac{|(\varphi'(0)|}{(\varphi'(0)}$ mit einem $\theta \in [0, 2\pi)$.
Wir setzen $F : G \to \mathbb{D}, F := e^{i\theta}\,\varphi \circ f_0 = e^{i\theta}\,g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f_0$.
Dann ist nach $\gamma$) $F$ schlicht und $F(z_0) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} F'(z_0) &= e^{i\theta}(\varphi \circ f_0)'(z_0) = e^{i\theta}\varphi'\big(f_0(z_0)\big)f_0'(z_0) \\ &= \left|\varphi'(0)\right| f_0'(z_0) > f_0'(z_0), \end{aligned}$$

also ist $F \in \mathscr{M}$ und $F'(z_0) > f_0'(z_0)$, im Widerspruch zur Maximalität von $f_0'(z_0)$.
Die Annahme $f_0(G) \neq \mathbb{D}$ war also falsch, und es gilt $f_0(G) = \mathbb{D}$.

□

**Korollar 20.3.8** *Es seien $G, H \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete mit $G \neq \mathbb{C}, H \neq \mathbb{C}$. Dann gilt*

*i) Es existiert eine konforme Abbildung $f$ von $G$ auf $H$.*

*ii) Sind $z_0 \in G$ und $w_0 \in H$, dann existiert eine konforme Abbildung $f$ von $G$ auf $H$ mit $f(z_0) = w_0$. Für jedes solche $f$ ist $\left|f'(z_0)\right|$ gleich.*

*iii) Sind $z_0 \in G$ und $w_0 \in H$ sowie $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ gegeben, so existiert eine eindeutig bestimmte konforme Abbildung $f$ von $G$ auf $H$ mit $f(z_0) = w_0$ und $f'(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{i\varphi_0}$.*

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus 20.3.4 und dem Riemannschen Abbildungssatz. □

**Satz 20.3.9** *(Satz von Study)* *Es sei $f :\to G$ konform und $G_r := f\big(U_r(0)\big) = \{f(z) : |z| < r\},\ 0 < r < 1$.*
*Dann gilt*

*i) Ist $G$ konvex, so ist jedes $G_r$ konvex, $0 < r < 1$.*

*ii) Ist $G$ sternförmig bezüglich $f(0)$, so ist jedes $G_r$ sternförmig bezüglich $f(0)$, $0 < r < 1$.*

**Beweis.** Sei ohne Einschränkung $f(0) = 0$ (sonst betrachte $z \mapsto f(z) - f(0)$ anstelle von $f$).
Es seien $w_0, w_1 \in G_r$ (und im Falle ii) $w_0 = f(0)$). Es ist zu zeigen, dass

$$[w_0, w_1] = \big\{(1-t)\,w_0 + tw_1 : t \in [0,1]\big\} \subset G_r.$$

Es seien $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$. Ohne Einschränkung sei $|z_0| \le |z_1|$ und $z_1 \neq 0$, ansonsten vertausche $w_0$ und $w_1$.
Dann ist $z\,z_0\,z_1^{-1} \in \mathbb{D}$ für alle $z \in \mathbb{D}$, also ist

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, g(z) = (1-t)\,f(z\,z_0\,z_1^{-1}) + tf(z),$$

wohldefiniert und holomorph. Da $G$ konvex ist, gilt $g(\mathbb{D}) \subset G$. Somit ist auch $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, h(z) = f^{-1}\big(g(z)\big)$, wohldefiniert. Wegen $f(0) = 0$ gilt $g(0) = 0$, also auch $h(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $\big|h(z)\big| \le |z|, z \in \mathbb{D}$, also insbesondere $\big|f^{-1}\big(g(z_1)\big)\big| \le |z_1|$.
Da $g(z_1) = (1-t)\,f(z_0) + tf(z_1) = (1-t)\,w_0 + t\,w_1$ und $|z_1| < r$, folgt also

$$f^{-1}\big((1-t)\,w_0 + t\,w_1\big) = f^{-1}\big(g(z_1)\big) \le |z_1| < r,$$

also $(1-t)\,w_0 + t\,w_1 \in G_r$. □