Flachwassergleichungen

Stefan Henrichs

Universität Trier

16.Dezember 2010

Inhaltsverzeichnis

Tsunamis

Eintrag in Wikipedia: *Der Begriff Tsunami (jap. Hafenwelle) wurde durch japanische Fischer geprägt, die vom Fischfang zurückkehrten und im Hafen alles verwüstet vorfanden, obwohl sie auf offener See keine Welle gesehen oder gespürt hatten ...*

Etwa 86% aller Tsunamis werden durch Erdbeben (Seebeben) verursacht; die übrigen 14% entstehen, wenn durch Vulkanausbrüche, küstennahe Bergstürze, Unterwasserlawinen oder Meteoriteneinschläge große Wassermassen abrupt verdrängt werden.

Tsunamis

Eintrag in Wikipedia: *Der Begriff Tsunami (jap. Hafenwelle) wurde durch japanische Fischer geprägt, die vom Fischfang zurückkehrten und im Hafen alles verwüstet vorfanden, obwohl sie auf offener See keine Welle gesehen oder gespürt hatten . . .*

Etwa 86% aller Tsunamis werden durch Erdbeben (Seebeben) verursacht; die übrigen 14% entstehen, wenn durch Vulkanausbrüche, küstennahe Bergstürze, Unterwasserlawinen oder Meteoriteneinschläge große Wassermassen abrupt verdrängt werden.

Motivation

	Tiefwasserwellen	Flachwasserwellen
Wellenlänge vs Wassertiefe	$\lambda \ll$ d	$\lambda \gg$ d
Wellenhöhe vs Wassertiefe		h $\ll$ d
Geschwindigkeit	abh. von λ	abh. von d

Tsunamis im offenen Ozean sind **Flachwasserwellen!**

Inhaltsverzeichnis

Modellannahme

- Flüssigkeit in einem Kanal mit einer festen Länge,
- vertikale Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich null
- horizentale Geschwindigkeit ist u(x,t) (durchgehend konstant)
- Dichte ϱ konstant
- Höhe der Flüssigkeit darf sich ändern (Tiefe/Höhe = h(x,t))

Erhaltungssätze

Die Gesamtmasse im Intervall $[x_1,x_2]$ zum Zeitpunkt t ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho h(x,t)dx$$

$$Massenfluss = \varrho u(x,t)h(x,t)$$

$$h_t + (uh)_x = 0 \tag{1}$$

Die Größe hu wird oft „discharge“ (Abfluss/Zufluss)in unserem Zusammenhang genannt.

Erhaltungssätze

Die Gesamtmasse im Intervall $[x_1,x_2]$ zum Zeitpunkt t ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho h(x,t)dx$$

$$Massenfluss = \varrho u(x,t)h(x,t)$$

$$h_t + (uh)_x = 0 \quad (1)$$

Die Größe hu wird oft „discharge“ (Abfluss/Zufluss)in unserem Zusammenhang genannt.

Erhaltungssätze

Die Gesamtmasse im Intervall $[x_1,x_2]$ zum Zeitpunkt t ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho h(x,t)dx$$

$$Massenfluss = \varrho u(x,t)h(x,t)$$

$$h_t + (uh)_x = 0 \tag{1}$$

Die Größe hu wird oft „discharge“ (Abfluss/Zufluss)in unserem Zusammenhang genannt.

Erhaltungssätze

Die Impulserhaltungssatzgleichung hat die gleiche Form wie die Gasdynamik:

$$(\varrho hu)_t + (\varrho hu^2 + p)_x = 0 \tag{2}$$

Nach dem Hydrostatikgesetz gilt:

$$p = \frac{1}{2}\varrho g h^2 \qquad g = Gravitationskonstante$$

in (2) eingesetzt

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = 0 \tag{3}$$

Erhaltungssätze

Die Impulserhaltungssatzgleichung hat die gleiche Form wie die Gasdynamik:

$$(\varrho h u)_t + (\varrho h u^2 + p)_x = 0 \tag{2}$$

Nach dem Hydrostatikgesetz gilt:

$$p = \frac{1}{2}\varrho g h^2 \qquad g = Gravitationskonstante$$

in (2) eingesetzt

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = 0 \tag{3}$$

Die Impulserhaltungssatzgleichung hat die gleiche Form wie die Gasdynamik:

$$(\varrho hu)_t + (\varrho hu^2 + p)_x = 0 \tag{2}$$

Nach dem Hydrostatikgesetz gilt:

$$p = \frac{1}{2}\varrho g h^2 \qquad g = Gravitationskonstante$$

in (2) eingesetzt

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = 0 \tag{3}$$

Die Flachwassergleichungen

Wir können jetzt (1) und (3) kombinieren und erhalten das System der 1-dimensionalen Flachwassergleichungen:

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} uh \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = 0$$

Die Flachwassergleichungen

Wenn wir davon ausgehen, dass h und u glatt sind, dann kann die Gleichung (3) reduziert werden zu

$$(u)_t + (\frac{1}{2}u^2 + gh)_x = 0 \tag{4}$$

Nun definieren wir

$$\varphi := gh$$

Mit (1) und (4)

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u^2 + \varphi \\ u\varphi \end{bmatrix}_x = 0$$

Die Flachwassergleichungen

Wenn wir davon ausgehen, dass h und u glatt sind, dann kann die Gleichung (3) reduziert werden zu

$$(u)_t + (\frac{1}{2}u^2 + gh)_x = 0 \tag{4}$$

Nun definieren wir

$$\varphi := gh$$

Mit (1) und (4)

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u^2 + \varphi \\ u\varphi \end{bmatrix}_x = 0$$

Wenn wir davon ausgehen, dass h und u glatt sind, dann kann die Gleichung (3) reduziert werden zu

$$(u)_t + (\frac{1}{2}u^2 + gh)_x = 0 \tag{4}$$

Nun definieren wir

$$\varphi := gh$$

Mit (1) und (4)

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u^2 + \varphi \\ u\varphi \end{bmatrix}_x = 0$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem vorherigen System für glatte Lösungen.

Für Probleme mit Schockwellen sind die 2 Systeme von Erhaltungssätzen nicht identisch.

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = 0$$

ist das richtige System

Diese Gleichung ist identisch mit dem vorherigen System für glatte Lösungen.
Für Probleme mit Schockwellen sind die 2 Systeme von Erhaltungssätzen nicht identisch.

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = 0$$

ist das richtige System

Quasilinearform

Für dieses System setzten wir

$$q(x,t) = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \qquad f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ \frac{(q_2)^2}{q_1} + \frac{1}{2}g(q_1)^2 \end{bmatrix}$$

und wandeln es für glatte Lösungen in Quasilinearform um

$$q_t + f'(q)q_x = 0$$

Quasilinearform

Für die Jakobi-Matrix f'(q) gilt

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{q_2}{q_1})^2 + gq_1 & 2\frac{q_2}{q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von f'(q) sind

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \qquad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

und mit den daraus resultierenden Eigenvektoren

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{bmatrix} \qquad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{bmatrix}$$

Quasilinearform

Für die Jakobi-Matrix f'(q) gilt

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{q_2}{q_1})^2 + gq_1 & 2\frac{q_2}{q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von f'(q) sind

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \qquad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

und mit den daraus resultierenden Eigenvektoren

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{bmatrix} \qquad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{bmatrix}$$

Quasilinearform

Für die Jakobi-Matrix f'(q) gilt

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{q_2}{q_1})^2 + gq_1 & 2\frac{q_2}{q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von f'(q) sind

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} \qquad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}$$

und mit den daraus resultierenden Eigenvektoren

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \end{bmatrix} \qquad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \end{bmatrix}$$

Quasilinearform

Wenn wir kleine Wellen simulieren, können wir diese Gleichungen linearisieren. Angenommen die Flüssigkeit hat durchgehend eine konstante Tiefe $h_0 > 0$ und bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit u_0 (welche auch 0 sein kann). Sei q nun die Veränderung von diesen konstanten Status so, dass

$$q = \begin{bmatrix} h - h_0 \\ hu - h_0 u_0 \end{bmatrix} \qquad und \qquad q_0 = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 u_0 \end{bmatrix}$$

Quasilinearform

Aus dem linearen System

$$q_t + Aq_x = 0 \qquad \textit{wobei} \qquad A = f'(q_0)$$

folgt aus den vorherigen Überlegungen, dass die Wellen sich an den charakteristischen Geschwindigkeiten

$$\lambda_0^1 = u_0 - c_0 \qquad \textit{und} \qquad \lambda_0^2 = u_0 + c_0$$

wobei

$$c_0 = \sqrt{gh_0}$$

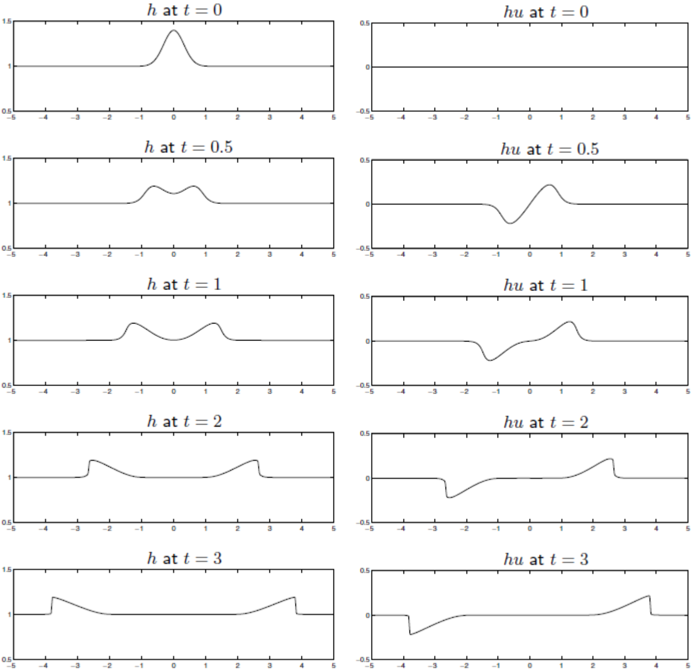
bewegen

Quasilinearform

- diese Wellen verbreiten sich mit geschwindigkeit $\pm c_0$ relativ zur Flüssigkeit

- genauso wie Akkustikwellen in einer bewegenden Flüssigkeit

- Flachwasserwellen sollten nicht mit Schallwellen verwechselt werden
    - Im Gegensatz zum Schall ignorieren wir die Kompressibilität der Flüssigkeit



h at $t = 0$
hu at $t = 0$
h at $t = 0.5$
hu at $t = 0.5$
h at $t = 1$
hu at $t = 1$
h at $t = 2$
hu at $t = 2$
h at $t = 3$
hu at $t = 3$

Froudesche Zahl

Die betrachteten Eigenwerte können von beiden Vorzeichen sein, abhängig von u im Verhältnis zu c.

$$Fr = |u|/c$$

Fr ist die Froude-Zahl

Froudesche Zahl

Die betrachteten Eigenwerte können von beiden Vorzeichen sein, abhängig von u im Verhältnis zu c.

$$Fr = |u|/c$$

Fr ist die Froude-Zahl

Inhaltsverzeichnis

Kleine Wellen

- Wellengeschwindigkeit $\sqrt{gh_0}$ ist abhängig von der Tiefe der Flüssigkeit
- beachte das innerhalb einer Welle die Tiefe der Flüssigkeit variiert
- ist die Wellenhöhe viel kleiner als h_0 so können wir die Geschwindigkeitsunterschiede ignorieren

Wellenlänge viel kleiner als die Wassertiefe

- hier ist eine ganz andere Theorie nötig

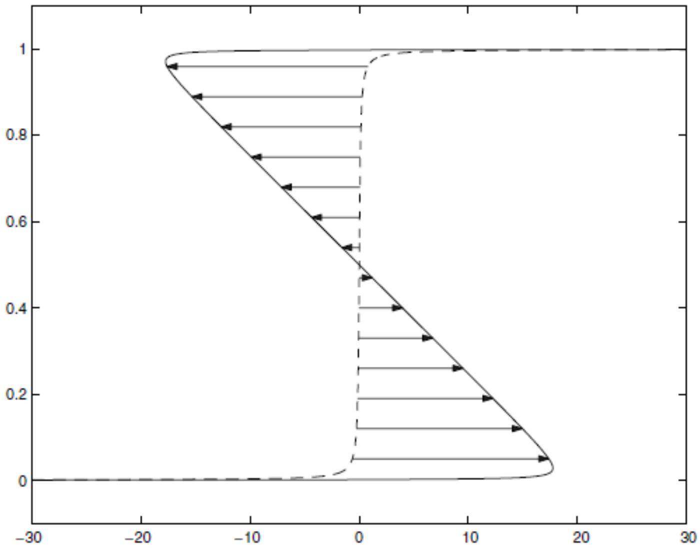
verschiedene Wellentypen

Kleine Wellen

- Wellengeschwindigkeit $\sqrt{gh_0}$ ist abhängig von der Tiefe der Flüssigkeit
- beachte das innerhalb einer Welle die Tiefe der Flüssigkeit variiert
- ist die Wellenhöhe viel kleiner als h_0 so können wir die Geschwindigkeitsunterschiede ignorieren

Wellenlänge viel kleiner als die Wassertiefe

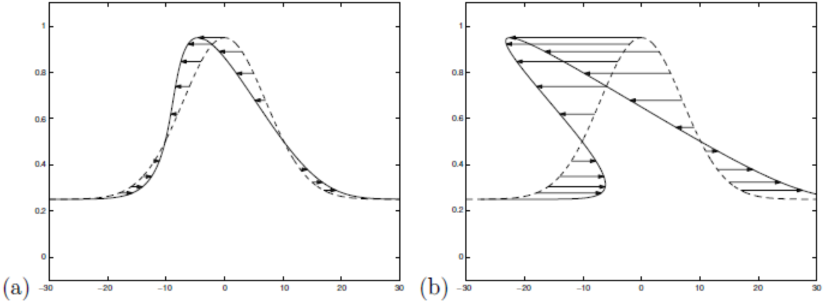
- hier ist eine ganz andere Theorie nötig


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−30
−20
−10
0
10
20
30

verschiedene Wellentypen

Große Wellen

- die Geschwindigkeitsunterschiede können hier nicht ignoriert werden
- dies führt zu einem steiler werder der Welle im Bereich wo der Kamm das Tal einholt
- der Kamm bewegt sich über das Tal
- dann sind die Vorraussetzungen für die Flachwassertheorie nicht mehr gegeben, da h drei Werte hat
- um diese "breakers" zu modellieren, bräuchten wir ein anderes System


(a)
(b)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-30
-20
-10
0
10
20
30

andere Störfaktoren

weitere Probleme sind z.B.

- kein flacher Meeresgrund
- Oberflächenspannung
- vertikale Geschwindigkeit

um diese Bedingungen zu modellieren brauchen wir höhere Grade der Ableitung in den Gleichungen (mit kleinen Koeffizienten). Dadurch können die Wellen unstetig werden und diese Schockwelle kann durch ein Hyperbolisches System gut approximiert werden.

In der Flachwassertheorie werden Schockwellen oft "Hydraulischer Sprung" genannt

andere Störfaktoren

weitere Probleme sind z.B.

- kein flacher Meeresgrund
- Oberflächenspannung
- vertikale Geschwindigkeit

um diese Bedingungen zu modellieren brauchen wir höhere Grade der Ableitung in den Gleichungen (mit kleinen Koeffizienten). Dadurch können die Wellen unstetig werden und diese Schockwelle kann durch ein Hyperbolisches System gut approximiert werden.
In der Flachwassertheorie werden Schockwellen oft "Hydraulischer Sprung" genannt

Inhaltsverzeichnis

Warum wachsen Tsunamis an Küstennähe?

Wiederholung:

$$m = \varrho * V [= \varrho * A * h] \qquad c = \sqrt{gh_0} \qquad E = \frac{1}{2}\varrho g h^2$$

Die Energiestromdichte eines Tsunamis ist

$$j = E/A * c = \frac{1}{2}\varrho g h^2 * c$$

$$\underbrace{j}_{konst} = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho g}_{konst} h^2 * c$$

$$\Rightarrow h \sim \frac{1}{\sqrt{c}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{h_0}}$$

Warum wachsen Tsunamis an Küstennähe?

Wiederholung:

$$m = \varrho * V[= \varrho * A * h] \qquad c = \sqrt{gh_0} \qquad E = \frac{1}{2}\varrho g h^2$$

Die Energiestromdichte eines Tsunamis ist

$$j = E/A * c = \frac{1}{2}\varrho g h^2 * c$$

$$\underbrace{j}_{konst} = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho g}_{konst} h^2 * c$$

$$\Rightarrow h \sim \frac{1}{\sqrt{c}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{h_0}}$$

Warum wachsen Tsunamis an Küstennähe?

Wiederholung:

$$m = \varrho * V[= \varrho * A * h] \qquad c = \sqrt{gh_0} \qquad E = \frac{1}{2}\varrho g h^2$$

Die Energiestromdichte eines Tsunamis ist

$$j = E/A * c = \frac{1}{2}\varrho g h^2 * c$$

$$\underbrace{j}_{konst} = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho g}_{konst} h^2 * c$$

$$\Rightarrow h \sim \frac{1}{\sqrt{c}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{h_0}}$$

Thank you!