J. Müller WiSe 2019/2020
08.01.2020

8. Übung zur Höheren Funktionentheorie

A29: Es seien X eine Menge, $f : X \to X$ und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) A ist vollständig invariant,

b) $f^{-1}(A) = A$,

c) A und $X \setminus A$ sind invariant.

A30: (Newton-Iteration) Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $g \in H(\Omega)$ und a eine einfache Nullstelle von g. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von a so existiert, dass

$$f(z) = z - g(z)/g'(z)$$

für alle $z \in U$ definiert ist und dass a ein superattraktiver Fixpunkt von f ist.

A31: Es seien $f(z) = z(e^z + 1)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $g = (f^{\circ 2} - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})/(f - \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Bestimmen Sie die Urbildmenge $f^{-1}(\{0\})$ des (einzigen) Fixpunktes 0 von f und überlegen Sie sich, dass $g^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ gilt.

A32: Es sei f ein Polynom. Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $F(f^{\circ m}) = F(f)$.

Zusatzaufgabe: Versuchen Sie, die Behauptung auch für transzendente f zu beweisen.