

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen

Abgabetermin: 7.5.2013, 14.00 Uhr, Übungskasten 24

Aufgabe 9 (Projektiver Limes, Kolmogorov/4 Punkte)

Es seien \mathbb{W} -Maße P_n auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $P_{n+1}(A \times \mathbb{R}) = P_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, gegeben.

Zeigen Sie, dass genau ein \mathbb{W} -Maß P auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ mit

$$P^{\Pi_{\{1, \dots, n\}}} = P_n, n \in \mathbb{N}$$

existiert.

Aufgabe 10 (Produkt- σ -Algebra/4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folgenräume

$$\begin{aligned} c_0 &= \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \\ l^p &= \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, 0 < p < \infty \\ l^\infty &= \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\} \end{aligned}$$

in der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ liegen.

Aufgabe 11 (Gestörter Nachrichtenkanal/4 Punkte)

Es gelten die Voraussetzungen aus Beispiel 2.4.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein empfangenes Zeichen richtig empfangen wurde?

Aufgabe 12 (Faltung/2+4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $U(0, 1) \star B(1, \frac{1}{2}) = U(0, 2)$.

b) $\Gamma(a, b_1) * \Gamma(a, b_2) = \Gamma(a, b_1 + b_2)$, $a, b_1, b_2 > 0$.

Hinweis zu b):

Man verwende die Gleichung

$$B(x_1, x_2) := \int_0^1 (1-y)^{x_1-1} y^{x_2-1} dy = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1+x_2)}, x_1, x_2 > 0 \text{ (Betafunktion).}$$